BAB III

FORMULA KUADRATUR GAUSS DENGAN MENGGUNAKAN POLINOMIAL ORTOGONAL

Untuk mendapatkan suatu formula integrasi numerik dengan selang tidak harus sama atau biasa disebut dengan formula kuadratur. Masalah yang dihadapi ialah bagaimana membentuk formula kuadratur yang mempunyai kesalahan (error) seminimal mungkin.

3.1. FORMULA KUADRATUR GAUSS

Untuk mendapatkan formula kuadratur , pertama-tama dibentuk persamaan integral sebagai berikut :

$$I = \int_a^b F(x).dx = \int_a^b w(x).f(x).dx \qquad (3.1)$$

dimana : w(x) = fungsi non negatif

f(x) = fungsi khusus

Didekati f(x) ke bentuk interpolasi Hermite, dengan rumus:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} h_i(x).f(x_i) + \sum_{i=1}^{m} \bar{h}_i.f^1(x_i) + E(x) \qquad (3.2)$$

dengan : $h_i(x) = [1-2l_i^1(x_i)(x-x_i)][l_i(x)]^2$

$$\bar{h}_i(x) = (x-x_i)[l_i(x)]^2$$

$$E(x) = \frac{f^{(2m)}(\xi)}{(2m)!}[\pi(x)]^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.3)$$

Mengalikan persamaan (3.2) dengan $w(x)$, kemudian diintegralkan pada interval $[a,b]$ akan didapat :

$$\int_a^b w(x).f(x).dx = \int_a^b \sum_{i=1}^m h_i(x).f(x_i).w(x).dx \quad +$$

$$\int_a^b \sum_{i=1}^m \bar{h}_i(x).f^1(x_i).w(x).dx + \int_a^b w(x).E(x).dx$$

$$= \sum_{i=1}^m \left[\int_a^b h_i(x).w(x).dx\right].f(x_i) +$$

$$\sum_{i=1}^m \left[\int_a^b \bar{h}_i(x).w(x).dx\right].f^1(x_i) +$$

$$\int_a^b w(x).E(x).dx$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.4)$$

Persamaan di atas bisa ditulis sebagai berikut :

$$\int_a^b w(x).f(x).dx = \sum_{i=1}^m H_i.f(x_i) + \sum_{i=1}^m \bar{H}_i.f^1(x_i) + E \quad \ldots(3.5)$$

dimana :

$$H_i = \int_a^b h_i(x).w(x).dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.6)$$

$$\bar{H}_i = \int_a^b \bar{h}_i(x).w(x).dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.7)$$

$$E = \int_a^b w(x).E(x).dx \qquad ....(3.8)$$

Persamaan (3.5) biasa disebut dengan *formula kuadratur Hermite.*

Pandang persamaan (2.26) dan $l_i(x)$ polinomial berderajat $\leq$ (m-1). Dengan mensubstitusikan persamaan (2.26) ke persamaan (3.7) akan terbentuk persamaan sebagai berikut :

$$\bar{H}_i = \int_a^b w(x).(x-x_i)[l_i(x)].[l_i(x)].dx$$

$$= \int_a^b w(x) \frac{\pi(x)}{\pi^1(x_i)}.l_i(x).dx$$

$$= \frac{1}{\pi^1(x_i)} \int_a^b w(x).\pi(x).l_i(x).dx \qquad ....(3.9)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (2.25) ke persamaan (3.9) diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$H_i = \int_a^b w(x).(1-2l_i^1(x_i)(x-x_i)[l_i(x)]^2.dx$$

$$= \int_a^b w(x).[l_i(x)]^2.dx - 2\int_a^b w(x).l_i^1(x_i)(x-x_i)[l_i(x)]^2.dx$$

$$= \int_a^b w(x).[l_i(x)]^2.dx - 2\, l_i^1(x_i).\int_a^b w(x).(x-x_i)[l_i(x)]^2.dx$$

$$= \int_a^b w(x).[l_i(x)].dx - 2\, l_i^1(x_i).H_i \qquad ....(3.10)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan Error dari formula interpolasi Hermite yaitu $E(x) = \frac{f^{(2m)}(\xi)}{(2m)!}[\pi(x)]^2$ kepersamaan (3.8) akan diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$E = \int_a^b w(x).\frac{f^{(2m)}(\xi)}{(2m)!}[\pi(x)]^2.dx$$

$$= \frac{f^{(2m)}(\xi)}{(2m)!}\int_a^b w(x).[\pi(x)]^2.dx \quad \text{..................(3.11)}$$

Persamaan (3.5) bisa dibandingkan dengan hasil korespondensi interpolasi Lagrange, yang mana rumus interpolasi Lagrange bisa ditulis sebagai berikut :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} l_i(x).f(x_i) + E. \quad \text{...........(3.12)}$$

dimana : $l_i(x) = \frac{\pi(x)}{(x-x_i)\quad \pi^1(x_i)}$

$$E(x) = \frac{f^{(m)}(\xi)}{m!}.\pi(x)$$

Mengalikan persamaan (3.12) dengan w(x), kemudian diintegralkan pada [a,b] akan diperoleh bentuk :

$$\int_a^b w(x).f(x).dx = \int_a^b \sum_{i=1}^{m} l_i.f(x_i).w(x).dx + \int_a^b E(x).w(x).dx$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\left[\int_a^b w(x).l_i(x).dx\right].f(x_i) +$$

$$\int_a^b \frac{f^{(m)}(\xi)}{m!} . \pi(x) . w(x) . dx$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.13)$$

Sehingga bisa ditulis ke bentuk :

$$\int_a^b w(x) . f(x) . dx = \sum_{i=1}^{m} W_i . f(x_i) + E \qquad \ldots (3.14)$$

dimana : $W_i = \int_a^b w(x) . l_i(x) . dx$ ....(3.15)

$$E = \int_a^b \frac{f^{(m)}(\xi)}{m!} . \pi(x) . w(x) . dx \qquad \ldots\ldots\ldots (3.16)$$

Persamaan (3.14) biasa disebut dengan *formula kuadratur Lagrange.*

Dari formula kuadratur Hermite dan formula kuadratur Lagrange akan dicari hubungan sedemikian sehingga kedua formula kuadratur tersebut identik. Untuk itu 2 syarat berikut ini harus berlaku, yaitu :

1. $\overline{H}_i = 0$.

   $\overline{H}_i = 0$ jika sifat polinomial ortogonal ada, yaitu $\pi(x)$ harus merupakan polinomial derajat m yang ortogonal pada $l_i(x)$ polinomial derajat $\leq (m - 1)$.

2. $H_i = W_i$.

Sekarang pandang persamaan (3.9) dan $\overline{H}_i$ sebagai polinomial dengan derajat (2m−1). Akan dibuktikan bahwa untuk $1 \leq i \leq m$ maka $\overline{H}_i = 0$ jika $\pi(x)$ polinomial derajat m ortogonal pada $l_i(x)$ polinomial derajat $\leq$ (m-1) pada interval [a,b] terhadap fungsi bobot w(x).

Untuk memperlihatkan pernyataan diatas, andaikan $\bar{H}_i = 0$ ($1 \leq i \leq m$); dengan $\bar{H}_i$ polinomial derajat (2m-1).

Diberikan f(x) polinomial derajat $\leq$ (2m-1) berbentuk sebagai berikut :

$$f(x) = \pi(x).U_{m-1}(x),$$

dimana : $U_{m-1}(x)$ = polinomial derajat $\leq$ (m-1).

Jika $1 \leq i \leq m$ maka x_i terletak pada interval $[x_1, x_m]$. Karena $\pi(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)...........(x-x_m)$ maka $\pi(x_i) = 0$ untuk $1 \leq i \leq m$, sehingga diperoleh $f(x_i) = 0$.

Karena f(x) merupakan polinomial derajat $\leq$ (2m-1), maka $f^{(2m)}(x) = 0$. Sehingga diperoleh E = 0.

Karena $\bar{H}_i = 0$, $f(x_i) = 0$ dan E = 0 maka menurut persamaan (3.5) bisa dibentuk persamaan sebagai berikut :

$$\int_a^b w(x).f(x).dx = 0$$

karena $f(x) = \pi(x).U_{m-1}(x)$ maka diperoleh persamaan :

$$\int_a^b w(x).\pi(x).U_{m-1}(x).dx = 0 \quad ....(3.17)$$

Dari persamaan (3.17) diatas bisa disimpulkan bahwa

$\pi(x)$ ortogonal pada $U_{m-1}(x)$ pada selang [a.b] terhadap fungsi bobot $w(x)$. (TERBUKTI) ■

Karena $\bar{H}_i = 0$ untuk $1 \le i \le m$, maka persamaan (3.10) berubah menjadi :

$$H_i = \int_a^b w(x).[l_i(x)]^2.dx \qquad (3.18)$$

maka persamaan (3.5) berubah menjadi persamaan :

$$\int_a^b w(x).f(x).dx = \sum_{i=1}^{m} H_i.f(x_i) + E \qquad (3.19)$$

dimana : $H_i = \int_a^b w(x).[l_i(x)]^2.dx$

$$E = \frac{f^{(2m)}(\xi)}{(2m)!}\int_a^b w(x).[\pi(x)]^2.dx , \quad (a \le \xi \le b)$$

Formula dari persamaan (3.19) disebut dengan *formula kuadratur Gauss*.

Untuk menentukan nilai titik basis (x_i) dan koefisien bobot (H_i) akan dijelaskan pada sub bab 3.2. dan sub bab 3.3.

Dari uraian sub bab 3.1 bisa disimpulkan bahwa dengan menggunakan sifat dari polinomial ortogonal maka formula kuadratur Hermite yang dikorespondensikan dengan formula kuadratur Lagrange bisa dibentuk formula baru yaitu formula kuadratur Gauss.

3.2. Menentukan Titik Basis dengan Menggunakan Polinomial Ortogonal.

Pertama-tama dibentuk suatu himpunan polinomial -

polinomial $\phi_0, \phi_1 . \phi_2 . . . . . , \phi_r , . .$ sedemikian sehingga setiap anggota himpunan akan ortogonal pada anggota himpunan yang lain terhadap fungsi bobot w(x) pada interval [a,b]. Karena ϕ_r merupakan polinomial derajat r maka bisa dibentuk suatu persamaan yang mana polinomial ϕ_r ortogonal pada semua polinomial derajat $\leq$ r-1 terhadap fungsi bobot w(x) pada interval [a,b] sebagai berikut :

$$\int_a^b w(x)\ \phi_r(x)\ q_{r-1}(x)\ dx = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3.20)$$

dimana : $q_{r-1}(x)$ = semua polinomial dengan derajat $\leq$ r-1

Sekarang pandang :

$$w(x)\ \phi_r(x) = \frac{d^r\, U_r(x)}{dx^r} = U_r^{(r)}(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.21)$$

Sehingga persamaan (3.20) bisa ditulis dalam bentuk :

$$\int_a^b U_r^{(r)}(x)\ q_{r-1}(x)\ dx = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.22)$$

Dengan menggunakan integrasi parsiil persamaan diatas bisa diubah menjadi bentuk sebagai berikut :

Ambil $U = q_{r-1}(x)$ ------> $dU = q_{r-1}^{1}(x)$

$dV = U_r^{(r)}(x).dx$ ----> $V = U_r^{(r-1)}(x)$

sehingga

$$\int_a^b U_r^{(r)}(x)\ q_{r-1}(x)\ dx =$$

$$= \left[q_{r-1}(x)\, U_r^{(r-1)}(x) - \int U_r^{(r-1)}(x).dq_{r-1}(x) \right]_a^b$$

$$= \left[q_{r-1}(x)\, U_r^{(r-1)}(x) - \int q_{r1}^{1}(x).dU_r^{(r-2)}(x) \right]_a^b$$

$$= \left[q_{r-1}(x)\, U_r^{(r-1)}(x) - q_{r-1}^{1}(x)\, U_r^{(r-2)}(x) \right.$$

$$\left. + \int U_r^{(r-2)}(x).dq_{r-1}^{1}(x) \right]_a^b$$

Akhirnya diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$\left[q_{r-1}(x)\, U_r^{(r-1)}(x) - q_{r-1}^{1}(x)\, U_r^{(r-2)}(x) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \right.$$

$$\left. (-1)^{r-1}\, U_r(x)\, q_{r-1}^{(r-1)}(x) \right]_a^b = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.23)$$

Dari persamaan (3.21) maka $\phi_r(x)$ bisa didefinisikan sebagai berikut :

$$\phi_r(x) = \frac{1}{w(x)} \frac{d^r\, U_r(x)}{dx^r} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.24)$$

dengan $\phi_r(x)$ = polinomial derajat r

Karena $\phi_r(x)$ merupakan polinomial derajat r maka terdapat persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\frac{d^{r+1}}{dx^{r+1}} \phi_r(x) = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.25)$$

Dari persamaan (3.24) dan persamaan (3.25) maka $U_r(x)$ harus memenuhi persamaan diferensial sebagai berikut :

$$\frac{d^{r+1}}{dx^{r+1}}\left[\frac{1}{w(x)}\frac{d^r U_r(x)}{dx^r}\right] = 0 \quad ....(3.26)$$

Pandang persamaan (3.23), mengingat $q_{r-1}(x)$ merupakan polinomial derajat $\leq$ (r−1) maka $q_{r-1}(a)$, $q_{r-1}(b)$, $q^{1}_{r-1}(a)$, $q^{1}_{r-1}(b)$,.... . ... . , $q^{(r-1)}_{r-1}(a)$, $q^{(r-1)}_{r-1}(b)$. mempunyai nilai, sehingga $U_r(x)$ harus memenuhi syarat berikut ini :

$$U_r(a) = U_r^{1}(a) = ...= U_r^{(r-1)}(a) = 0 \quad ......(3.27)$$

$$U_r(b) = U_r^{1}(b) = ...= U_r^{(r-1)}(b) = 0 \quad ......(3.28)$$

Sehingga rumus dari $U_r(x)$ yang memenuhi persamaan (3.26), (3.27) dan (3.28) bisa ditentukan.

Dengan mensubstitusikan rumus $U_r(x)$ yang diperoleh ke persamaan (3.24) dan kemudian $U_r(x)$ tersebut didiferensialkan sebanyak r kali dihasilkan bentuk polinomial derajat r [$\phi_r(x)$] sebagai berikut :

$$\phi_r(x) = A_r x^r + A_{r-1}x^{r-1} +.......+ A_0 \quad ...(3.29)$$

Dari bentuk persamaan $\phi_r(x)$, titik- titik basis formula kuadratur Gauss ($x_1,x_2,....,x_r$) bisa ditentukan dengan cara mencari akar-akar dari $\phi_r(x) = 0$ dengan menggunakan metode Newton-Rapshon. Dan dari persamaan (3.29) diperoleh rumus A_r yang merupakan koefisien dari x^r.

Dari sifat 4 polinomial ortogonal yaitu $\gamma_k = \langle\phi_k,\phi_k\rangle$ dan persamaan (3.31) diperoleh bentuk sebagai berikut :

$$\gamma_r = \int_a^b w(x)\ \phi_r(x)\left[A_r x^r + A_{r-1}x^{r-1} + \ldots\ldots + A_o\right] dx$$

$$= \int_a^b w(x)\ \phi_r(x) A_r x^r dx$$

$$+ \int_a^b w(x)\ \phi_r(x)\left[\ A_{r-1}x^{r-1} + \ldots\ldots + A_o\right] dx$$

$$= \int_a^b w(x)\ \phi_r(x)\ A_r x^r\ dx + \int_a^b w(x)\ \phi_r(x)\phi_{r-1}(x)\ dx$$

Menurut sifat dari polinomial ortogonal :

$$\int_a^b w(x)\ \phi_r(x)\phi_k(x)\ dx\ ,\ \text{untuk}\ \ r \neq k$$

Sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$\gamma_r = \int_a^b w(x)\ \phi_r(x)\ A_r x^r\ dx$$

$$= A_r \int_a^b x^r\ w(x)\ \phi_r(x)\ dx \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(3.30)$$

karena $w(x).\phi_r(x) = U_r^{(r)}(x)$

akibatnya diperoleh bentuk sebagai berikut :

$$\gamma_r = A_r \int_a^b x^r\ U_r^{(r)}(x)\ dx$$

$$= A_r\left[x^r\ U_r^{(r-1)} - \int rx^{r-1} dU_r^{(r-2)} \right]_a^b$$

$$= A_r\left[x^r\ U_r^{(r-1)} - rx^{r-1}U_r^{(r-2)} + \int r(r-1)x^{r-2} dU_r^{(r-3)} \right]_a^b$$

Akhirnya dihasilkan bentuk sebagai berikut :

$$\gamma_r = A_r\left[x^r\ U_r^{(r-1)} - r(r-1)x^{r-1}U_r^{(r-2)} + r(r-1)(r-2)x^{r-2}U_r^{(r-3)} \right.$$

$$\left. - \ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^{r-1}.r!.x.U_r + (-1)^r.r!\int U_r.dx \right]_a^b.$$

$$= \quad A_r\left[x^r\ U_r^{(r-1)} - r(r-1)x^{r-1}U_r^{(r-2)} + r(r-1)(r-2)x^{r-2}U_r^{(r-3)} \right.$$

$$\left. - \ldots\ldots\ldots\ldots + (-1)^{r-1}.r!.x.U_r \right]_a^b + A_r(-1)^r.r!\int_a^b U_r.dx$$

Menurut persamaan (3.27) dan (3.28) yaitu :

$$U_r(a) = U_r^1(a) = \ldots\ldots\ldots\ldots = U_r^{(r-1)}(a) = 0$$

$$U_r(b) = U_r^1(b) = \ldots\ldots\ldots\ldots = U_r^{(r-1)}(b) = 0$$

Sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$\gamma_r = (-1)^r.r!.A_r.\int_a^b U_r.dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.31)$$

3.3. Menentukan Koefisien Fungsi (H_i) dengan Menggunakan Polinomial Ortogonal.

Pandang relasi rekurensif pada sifat 4 polinomial ortogonal sebagai berikut :

$$\phi_{k+1}(x) = a_k.x.\phi_k(x) + b_k.\phi_k(x) - \frac{a_k\ \gamma_k}{a_{k+1}\gamma_{k+1}}\ \phi_{k-1}(x)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.32)$$

Kemudian persamaan (3.32) dibagi dengan $a_k\gamma_k$, didapat :

$$\frac{\phi_{k+1}(x)}{a_k\gamma_k} = \frac{x\ \phi_k(x)}{\gamma_k} + \frac{b_k\ \phi_k(x)}{a_k\gamma_k} - \frac{\phi_{k-1}(x)}{a_{k-1}\gamma_{k-1}}$$

Dengan memindahkan ruas akan diperoleh bentuk sebagai berikut :

$$\frac{x\ \phi_k(x)}{\gamma_k} = \frac{\phi_{k+1}(x)}{a_k\gamma_k} + \frac{\phi_{k-1}(x)}{a_{k-1}\gamma_{k-1}} - \frac{b_k\ \phi_k(x)}{a_k\gamma_k}$$

Hasil perkalian bentuk di atas dengan $\phi_k(y)$ akan diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$\frac{x\ \phi_k(x)\phi_k(y)}{\gamma_k} = \frac{\phi_{k+1}(x)\phi_k(y)}{a_k\gamma_k} + \frac{\phi_{k-1}(x)\phi_k(y)}{a_{k-1}\gamma_{k-1}}$$

$$- \frac{b_k\ \phi_k(x)\phi_k(y)}{a_k\gamma_k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.33)$$

Sekarang pandang persamaan relasi rekurensif pada sifat 4 polinomial ortogonal. Dengan mensubstitusikan $x = y$ didapat persamaan :

$$b_k\phi_k(y) = \phi_{k+1}(y) - a_k y\ \phi_k(y) - c_k\phi_{k-1}(y) \quad \ldots\ldots.(3.34)$$

Sekarang persamaan (3.34) disubstitusikan ke persamaan (3.33) maka diperoleh bentuk sebagai berikut :

$$\frac{x\,\phi_k(x)\phi_k(y)}{\gamma_k} = \frac{\phi_{k+1}(x)\phi_k(y)}{a_k\gamma_k} + \frac{\phi_{k-1}(x)\phi_k(y)}{a_{k-1}\gamma_{k-1}}$$

$$- \frac{\phi_k(x)}{a_k\gamma_k}\Big[\phi_{k+1}(y) - a_k y\,\phi_k(y) - c_k\phi_{k-1}(y)\Big]$$

$$= \frac{\phi_{k+1}(x)\phi_k(y)}{a_k\gamma_k} + \frac{\phi_{k-1}(x)\phi_k(y)}{a_{k-1}\gamma_{k-1}} - \frac{\phi_k(y)\phi_k(x)}{a_k\ \gamma_k}$$

$$+ \frac{y\,\phi_k(y)\phi_k(x)}{\gamma_k} + \frac{c_k\phi_{k-1}(y)\phi_k(x)}{a_k\gamma_k}$$

$$\frac{(x-y)\,\phi_k(x)\phi_k(y)}{\gamma_k} = \frac{\phi_{k+1}(x)\phi_k(y) - \phi_{k+1}(y)\phi_k(x)}{a_k\ \gamma_k} +$$

$$+ \frac{\phi_{k-1}(x)\phi_k(y)}{a_{k-1}\gamma_{k-1}} + \frac{c_k\phi_{k-1}(y)\phi_k(x)}{a_k\gamma_k} \qquad \text{.................................(3.35)}$$

Dari sifat 4 polinomial ortogonal berlaku $c_k = - \dfrac{a_k\cdot\gamma_k}{a_{k-1}\cdot\gamma_{k-1}}$

maka persamaan diatas diubah menjadi :

$$\frac{(x-y)\,\phi_k(x)\phi_k(y)}{\gamma_k} = \frac{\phi_{k+1}(x)\phi_k(y) - \phi_{k+1}(y)\phi_k(x)}{a_k\ \gamma_k}$$

$$+ \frac{\phi_{k-1}(x)\phi_k(y)}{a_{k-1}\gamma_{k-1}} - \frac{\phi_{k-1}(y)\phi_k(x)}{a_{k-1}\gamma_{k-1}}$$

$$\frac{(x-y)\,\phi_k(x)\phi_k(y)}{\gamma_k} = \frac{\phi_{k+1}(x)\phi_k(y) - \phi_{k+1}(y)\phi_k(x)}{a_k\,\gamma_k}$$

$$\frac{\phi_{k-1}(y)\phi_k(x) - \phi_{k-1}(x)\phi_k(y)}{a_{k-1}\gamma_{k-1}} \quad \ldots.(3.36)$$

Sekarang akan ditentukan $\displaystyle\sum_{k=o}^{m} \frac{\phi_k(x)\phi_k(y)}{\gamma_k}$.

Padahal : $\displaystyle\sum_{k=o}^{m} \frac{\phi_k(x)\phi_k(y)}{\gamma_k} = \frac{1}{(x-y)} \sum_{k=o}^{m} (x-y) \frac{\phi_k(x)\phi_k(y)}{\gamma_k}$

Maka untuk menyelesaikannya , ditentukan dulu

$$\sum_{k=o}^{m} (x-y) \frac{\phi_k(x)\phi_k(y)}{\gamma_k} .$$

Untuk mempermudah perhitungan dimisalkan :

$$Z_k = (x-y)\frac{\phi_k(x)\phi_k(y)}{\gamma_k} \quad ; \quad z_k = \frac{\phi_{k+1}(x)\phi_k(y) - \phi_{k+1}(y)\phi_k(x)}{a_k\,\gamma_k}$$

Pandang persamaan (3.41).

Ambil k = 0 maka

$$Z_o = (x-y)\frac{\phi_o(x)\phi_o(y)}{\gamma_o}$$

$$= \frac{\phi_1(x)\phi_o(y) - \phi_1(y)\phi_o(x)}{a_o\,\gamma_o} - \frac{\phi_o(x)\phi_{-1}(y) - \phi_o(y)\phi_{-1}(x)}{a_{-1}\gamma_{-1}}$$

$$= z_o - z_{-1}$$

karena $\phi_{-1}(y) = 0$ dan $\phi_{-1}(x) = 0$, maka $z_{-1} = 0$ sehingga

$Z_0 = z_0$

untuk k = 1 maka

$$Z_1 = (x-y)\frac{\phi_1(x)\phi_1(y)}{\gamma_1}$$

$$= \frac{\phi_2(x)\phi_1(y) - \phi_2(y)\phi_1(x)}{a_1\ \gamma_1} - \frac{\phi_1(x)\phi_0(y) - \phi_1(y)\phi_0(x)}{a_0\ \gamma_0}$$

$$= z_1 - z_0$$

untuk k = 2 maka

$$Z_2 = (x-y)\frac{\phi_2(x)\phi_2(y)}{\gamma_2}$$

$$= \frac{\phi_3(x)\phi_2(y) - \phi_3(y)\phi_2(x)}{a_2\ \gamma_2} - \frac{\phi_2(x)\phi_1(y) - \phi_2(y)\phi_1(x)}{a_1\ \gamma_1}$$

$$= z_2 - z_1$$

....

....

untuk k = m maka :

$$Z_m = (x-y)\frac{\phi_m(x)\phi_m(y)}{\gamma_m}$$

$$= \frac{\phi_{m+1}(x)\phi_m(y)-\phi_{m+1}(y)\phi_m(x)}{a_m\ \gamma_m} - \frac{\phi_m(x)\phi_{m-1}(y)-\phi_m(y)\phi_{m-1}(x)}{a_{m-1}\gamma_{m-1}}$$

$$= z_m - z_{m-1}$$

Sehingga diperoleh persamaan :

$$\sum_{k=0}^{m} Z_k = Z_0 + Z_1 + Z_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + Z_m$$

$$= z_0 + (z_1 - z_0) + (z_2 - z_1) + \ldots\ldots\ldots + (z_m - z_{m-1})$$

$$= (z_0 - z_0) + (z_1 - z_1) + (z_2 - z_2) + \ldots\ldots + z_m$$

$$\sum_{k=0}^{m} Z_k = z_m \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.37)$$

Dengan mengembalikan Z_k dan z_m ke bentuk substitusi yaitu

$$Z_k = (x-y)\frac{\phi_k(x)\phi_k(y)}{\gamma_k} \quad ; \quad z_m = \frac{\phi_{m+1}(x)\phi_m(y) - \phi_m(x)\phi_{m+1}(y)}{a_m \gamma_m}$$

maka persamaan (3.37) dapat diubah menjadi :

$$\sum_{k=0}^{m} (x-y)\frac{\phi_k(x)\phi_k(y)}{\gamma_k} = \frac{\phi_{m+1}(x)\phi_m(y) - \phi_m(x)\phi_{m+1}(y)}{a_m \gamma_m} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.38)$$

Dengan memindahkan (x-y) ke ruas kanan maka persamaan (3.38) bisa diubah menjadi :

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{\phi_k(x)\phi_k(y)}{\gamma_k} = \frac{\phi_{m+1}(x)\phi_m(y) - \phi_m(x)\phi_{m+1}(y)}{(x-y) \quad a_m \gamma_m} \ldots\ldots (3.39)$$

Pandang sifat 3 polinomial ortogonal berbentuk sebagai berikut :

$$\phi_m(x) = A_m . \pi(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.40)$$

Ambil x_i akar dari $\pi(x)$, sehingga $\phi_m(x_i) = 0$.
Dengan mensubstitusikan $y = x_i$ ke persamaan (3.39) akan didapat bentuk sebagai berikut :

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{\phi_k(x)\phi_k(x_i)}{\gamma_k} = \frac{\phi_{m+1}(x)\phi_m(x_i)-\phi_m(x)\phi_{m+1}(x_i)}{(x-x_i)\ a_m\ \gamma_m}$$

Karena $\phi_m(x_i) = 0$ maka :

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{\phi_k(x)\phi_k(x_i)}{\gamma_k} = -\frac{\phi_m(x)\phi_{m+1}(x_i)}{(x-x_i)a_m\ \gamma_m}$$

atau bisa ditulis dalam bentuk :

$$\frac{\phi_m(x)\phi_{m+1}(x_i)}{(x-x_i)\ a_m\ \gamma_m} = -\sum_{k=0}^{m} \frac{\phi_k(x)\phi_k(x_i)}{\gamma_k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.41)$$

masing-masing anggota persamaan (3.41) dikalikan dengan $w(x).\phi_o(x)$ dan kemudian diintegralkan pada [a,b] sehingga didapat bentuk :

$$\frac{\phi_{m+1}(x_i)}{a_m\ \gamma_m} \int_a^b w(x)\ \frac{\phi_o(x)\phi_m(x)}{(x-x_i)}.dx =$$

$$= -\sum_{k=0}^{m} \frac{\phi_k(x_i)}{\gamma_k} \int_a^b w(x)\phi_o(x)\phi_k(x).dx$$

$$= -\left[\frac{\phi_o(x_i)}{\gamma_o} \int_a^b w(x)\left[\phi_o(x)\right]^2.dx + \sum_{k=1}^{m} \frac{\phi_k(x_i)}{\gamma_k} \int_a^b w(x)\phi_o(x)\phi_k(x).dx \right]$$

Karena pada polinomial ortogonal berlaku :

$$\int_a^b w(x)\phi_o(x)\phi_k(x).dx = 0, \qquad k = 1,2,3,\ldots\ldots,m.$$

dan $$\int_a^b w(x)\left[\phi_o(x)\right]^2 dx = \gamma_o$$

akibatnya dihasilkan persamaan sebagai berikut :

$$\frac{\phi_{m+1}(x_i)}{a_m\,\gamma_m}\int_a^b w(x)\,\frac{\phi_o(x)\phi_m(x)}{(x-x_i)}\,dx = -\left[\frac{\phi_o(x_i)}{\gamma_o}\,.\gamma_o\right]$$

$$\frac{\phi_{m+1}(x_i)}{a_m\,\gamma_m}\int_a^b w(x)\,\frac{\phi_o(x)\phi_m(x)}{(x-x_i)}\,dx = -\,\phi_o(x_i)\quad\ldots\ldots.(3.42)$$

Karena $\phi_o(x)$ merupakan polinomial derajat 0, maka :

$$\phi_o(x) = \phi_o(x_i) = \text{konstanta},$$

Sehingga akan diperoleh bentuk sebagai berikut :

$$\frac{\phi_{m+1}(x_i)}{a_m\,\gamma_m}\,\phi_o(x)\int_a^b w(x)\,\frac{\phi_m(x)}{(x-x_i)}\,dx = -\,\phi_o(x_i)$$

$$\int_a^b w(x)\,\frac{\phi_m(x)}{(x-x_i)}\,dx = -\,\frac{a_m\,\gamma_m}{\phi_{m+1}(x_i)}\quad\ldots(3.43)$$

Pandang syarat kedua dari hubungan formula kuadratur Hermite dan Formula kuadratur Lagarange yaitu $H_i = W_i$. Sehingga bisa ditulis persamaan sebagai berikut :

$$H_i = \int_a^b w(x).[l_i(x)]^2.dx = \int_a^b w(x).l_i(x).dx = W_i\quad\ldots(3.44)$$

akibatnya :

$$H_i = \int_a^b w(x).l_i(x).dx\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,(3.45)$$

Dari persamaan (2.11) dan persamaan (3.45) bisa dibentuk persamaan sebagai berikut :

$$l_i(x) = \frac{\phi_m(x)}{\phi_m^1(x_i)(x-x_i)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.46)$$

Substitusi persamaan (3.46) ke persamaan (3.45) diperoleh bentuk sebagai berikut :

$$H_i = \int_a^b w(x) \frac{\phi_m(x)}{\phi_m^1(x_i)(x-x_i)} dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3.47)$$

karena $\phi_m^1(x_i)$ merupakan konstanta, sehingga bisa dipindah diluar tanda integral maka persamaan H_i menjadi :

$$H_i = \frac{1}{\phi_m^1(x_i)} \int_a^b w(x) \frac{\phi_m(x)}{(x-x_i)} dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3.48)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.43) ke persamaan (3.48) didapat bentuk :

$$H_i = \frac{1}{\phi_m^1(x_i)} \left[-\frac{a_m \gamma_m}{\phi_{m+1}(x_i)} \right]$$

$$H_i = \frac{-a_m \gamma_m}{\phi_m^1(x_i)\phi_{m+1}(x_i)}$$

Pada sifat 4 polinomial ortogonal berlaku $a_m = \frac{A_m}{A_{m+1}}$, maka diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$H_i = \frac{-A_{m+1} \gamma_m}{A_m \phi_m^1(x_i)\phi_{m+1}(x_i)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3.50)$$

Sekarang pandang relasi rekurensif pada sifat 4 polinomial ortogonal.

Substitusi $x = x_i$ dan $k = m$ ke persamaan (2.34) diperoleh bentuk sebagai berikut :

$$\phi_{m+1}(x_i) = (a_m x_i + b_m)\,\phi_m(x_i) + c_m \phi_{m-1}(x_i)$$

karena $\phi_m(x_i) = 0$ maka :

$$\phi_{m+1}(x_i) = c_m \phi_{m-1}(x_i)$$

Menurut sifat 4 polinomial ortogonal berlaku $-\dfrac{a_m \gamma_m}{a_{m+1}\gamma_{m+1}}$ maka bentuk di atas bisa diekspresikan ke persamaan :

$$\phi_{m+1}(x_i) = -\frac{a_m \gamma_m}{a_{m+1}\gamma_{m+1}}\,\phi_{m-1}(x_i) \quad \text{.............(3.51)}$$

karena $a_m = \dfrac{A_m}{A_{m+1}}$; sehingga diperoleh persamaan :

$$\phi_{m+1}(x_i) = -\frac{A_{m+1}A_{m-1}\gamma_m}{A_m^2 \quad \gamma_{m+1}}\,\phi_{m-1}(x_i) \quad \text{...........(3.52)}$$

Persamaan (3.52) disubstitusikan ke persamaan (3.51) sehingga diperoleh persamaan H_i :

$$H_i = \frac{-\;A_{m+1}\,\gamma_m}{A_m\,\phi_m{}'(x_i)\left[-\dfrac{A_{m+1}A_{m-1}\gamma_m}{A_m^2 \quad \gamma_{m+1}}\,\phi_{m-1}(x_i)\right]}$$

$$= \frac{A_m^2\;A_{m+1}\gamma_m\gamma_{m+1}}{A_{m+1}A_{m-1}\gamma_m\;\phi_m{}^1(x_i)\;\phi_{m-1}(x_i)}$$

$$H_i = \frac{A_m \; \gamma_{m-1}}{A_{m-1} \; \phi_m^{1}(x_i) \; \phi_{m-1}(x_i)} \qquad \text{........(3.53)}$$

Persamaan (3.53) merupakan *persamaan koefisien bobot formula kuadratur Gauss.*

Karena A_r, γ_r, ϕ_r dan x_i (i = 1,2,.....,r) sudah bisa ditentukan, sehingga agar persamaan tersebut bisa untuk menentukan nilai H_i maka haruslah r = m. Sehingga persamaan tersebut berubah menjadi persamaan A_m, γ_m, ϕ_m dan x_i (i = 1,2,.....,m). Dengan memasukkan nilai-nilai tersebut ke persamaan (3.53) akan diperoleh nilai H_i atau koefisien yang dicari.

Jadi bisa disimpulkan bahwa dengan memandang koefisien bobot formula kuadratur Hermite identik dengan koefisien bobot formula kuadratur Lagrange dan dengan menggunakan sifat polinomial ortogonal akhirnya terbentuklah koefisien bobot formula kuadratur Gauss.

3.4. Menentukan Kesalahan (Error) dari Formula Kuadratur Gauss.

Dari sifat 3 polinomial ortogonal bisa dibentuk hubungan sebagai berikut :

$$\pi(x) = \frac{\phi_m(x)}{A_m}$$

Dengan mensubstitusikan $\pi(x)$ ke persamaan (3.11) akan diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$E = \frac{f^{(2m)}(\xi)}{(2m)!} \int_a^b w(x) . \frac{\phi_m^2(x)}{A_m^2} \quad dx$$

$$= \frac{1}{A_m^2} \frac{f^{(2m)}(\xi)}{(2m)!} \int_a^b w(x) . \phi_m^2(x) \ dx$$

Karena pada sifat 4 polinomial ortogonal terdapat rumus $\gamma_m = \langle\phi_m, \phi_m\rangle$ maka bentuk diatas bisa diubah ke persamaan sebaga berikut :

$$E = \frac{\gamma_m}{A_m^2} \frac{f^{(2m)}(\xi)}{(2m)!} \qquad \text{........................(3.54)}$$

Persamaan (3.54) merupakan *persamaan error dari formula kuadratur Gauss.*

Jadi bisa disimpulkan penerapan sifat polinomial ortogonal pada persamaan error formula kuadratur Hermite akan membentuk persamaan error baru yaitu persamaan error formula kuadratur Gauss.