# BAB II
# LANDASAN TEORI

Di sini dijelaskan mengenai interpolasi Lagrange dan interpolasi Hermite yang nantinya digunakan pada BAB III dalam pembentukan formula kuadratur Lagrange dan formula kuadratur Hermite.

Selain interpolasi dibahas juga mengenai sifat-sifat dari polinomial ortogonal . Dan dengan menggunakan sifat polinomial ortogonal tersebut terbentuklah formula kuadratur Gauss.

Adapun penunjang lain yang digunakan adalah fungsi Gamma-Beta dan metode Newton-Rapshon. Fungsi Gamma-Beta pada BAB IV berguna dalam penentuan formula kuadratur Gauss-Legendre, Gauss-Leguere dan Gauss-Hermite. Sedang metode Newton-Rapshon digunakan pada BAB IV untuk menentukan titik basis.

## 2.1. Formula Interpolasi Lagrange

Di berikan m buah titik-titik $(x_o,y_o)$, $(x_1,y_1)$, $(x_2,y_2)$,........,$(x_{m-1},y_{m-1})$ dengan nilai-nilai x tak harus berjarak sama dengan yang lainnya, dan akan dicari suatu polinom derajat m-1 $[\phi_{m-1}(x)]$, sedemikian sehingga :

$$\phi_{m-1}(x_i) = y(x_i) = y_i\ ,\ i = 0,1,2,\ldots\ldots,m-1 \quad ..(2.1)$$

Misalkan :

$$\phi_{m-1}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_{m-1} x^{m-1}, \quad ..(2.2)$$

adalah polinom yang akan dicari.

Dengan mensubstitusikan persamaan (2.1) ke dalam (2.2), diperoleh sistem persamaan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} y_0 &= a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots\ldots + a_{m-1} x_0^{m-1} \\ y_1 &= a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots\ldots + a_{m-1} x_1^{m-1} \\ y_2 &= a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \ldots\ldots + a_{m-1} x_2^{m-1} \quad \ldots\ldots\ldots(2.3) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{m-1} &= a_0 + a_1 x_{m-1} + a_2 x_{m-1}^2 + \ldots\ldots + a_{m-1} x_{m-1}^{m-1} \end{aligned}$$

Sistem persamaan tersebut memberikan solusi bila determinannya :

$$\text{DET} = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \ldots\ldots x_0^{m-1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 \ldots\ldots x_1^{m-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1 & x_{m-1} & x_{m-1}^2 \ldots x_{m-1}^{m-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

Nilai determinan diatas yang disebut determinan *Vandermonde*, adalah :

$$\text{DET} = -(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots\ldots(x_0-x_{m-1})(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots\ldots\ldots$$

$$(x_1-x_{m-1})\ldots\ldots(x_{m-2}-x_{m-1}).$$

dengan :

$$a_o = \frac{\begin{vmatrix} y_o & x_o & x_o^2 & \cdots\cdots x_o^{m-1} \\ y_1 & x_1 & x_1^2 & \cdots\cdots x_1^{m-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ y_{m-1} & x_{m-1} & x_{m-1}^2 & \cdots\cdots x_{m-1}^{m-1} \end{vmatrix}}{DET}$$

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & y_o & x_o^2 & \cdots\cdots x_o^{m-1} \\ 1 & y_1 & x_1^2 & \cdots\cdots x_1^{m-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ 1 & y_{m-1} & x_{m-1}^2 & \cdots\cdots x_{m-1}^{m-1} \end{vmatrix}}{DET}$$

$$a_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_o & y_o & \cdots\cdots x_o^{m-1} \\ 1 & x_1 & y_1 & \cdots\cdots x_1^{m-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ 1 & x_{m-1} & y_{m-1} & \cdots\cdots x_{m-1}^{m-1} \end{vmatrix}}{DET}$$

.........................................

.........................................

.........................................

.........................................

$$a_{m-1} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_o & x_o^2 \cdots\cdots\cdots x_o^{m-2} & y_o \\ 1 & x_1 & x_1^2 \cdots\cdots\cdots x_1^{m-2} & y_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_{m-1} & x^2_{m-1} \cdots\cdots x_{m-1}^{m-2} & y_{m-1} \end{vmatrix}}{\text{DET}}$$

Eliminasi $a_o, a_1, \ldots\ldots, a_{m-1}$ ke persamaan (2.2) akan menghasilkan :

$$\phi_{m-1}(x) = \frac{1}{\text{DET}} \left[ \begin{vmatrix} y_o & x_o & x_o^2 \cdots\cdots x_o^{m-1} \\ y_1 & x_1 & x_1^2 \cdots\cdots x_1^{m-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{m-1} & x_{m-1} & x^2_{m-1} \cdots\cdots x_{m-1}^{m-1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & y_o & x_o^2 \cdots\cdots x_o^{m-1} \\ 1 & y_1 & x_1^2 \cdots\cdots x_1^{m-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & y_{m-1} & x^2_{m-1} \cdots\cdots x_{m-1}^{m-1} \end{vmatrix} .x + \cdots\cdots + \begin{vmatrix} 1 & x_o & x_o^2 \cdots\cdots\cdots x_o^{m-2} & y_o \\ 1 & x_1 & x_1^2 \cdots\cdots\cdots x_1^{m-2} & y_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_{m-1} & x^2_{m-1} \cdots\cdots x_{m-1}^{m-2} & y_{m-1} \end{vmatrix} x^{m-1} \right]$$

$$\text{DET}.\phi_{m-1}(x) = \left[ \begin{vmatrix} y_o & x_o & x_o^2 \ldots\ldots x_o^{m-1} \\ y_1 & x_1 & x_1^2 \ldots\ldots x_1^{m-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{m-1} & x_{m-1} & x_{m-1}^2 \ldots\ldots x_{m-1}^{m-1} \end{vmatrix} + \right.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & y_o & x_o^2 \ldots\ldots x_o^{m-1} \\ 1 & y_1 & x_1^2 \ldots\ldots x_1^{m-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & y_{m-1} & x_{m-1}^2 \ldots\ldots x_{m-1}^{m-1} \end{vmatrix} .x + \ldots\ldots +$$

$$\left. \begin{vmatrix} 1 & x_o & x_o^2 \ldots\ldots x_o^{m-2} & y_o \\ 1 & x_1 & x_1^2 \ldots\ldots x_1^{m-2} & y_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_{m-1} & x_{m-1}^2 \ldots\ldots x_{m-1}^{m-2} & y_{m-1} \end{vmatrix} x^{m-1} \right]$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.4)$$

persamaan diatas bisa ditulis sebagai berikut :

$$\begin{vmatrix} \phi_{m-1}(x) & 1 & x & x^2 \ldots\ldots x^{m-1} \\ y_o & 1 & x_o & x_o^2 \ldots\ldots x_o^{m-1} \\ y_1 & 1 & x_1 & x_1^2 \ldots\ldots x_1^{m-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{m-1} & 1 & x_{m-1} & x_{m-1}^2 \ldots\ldots x_{m-1}^{m-1} \end{vmatrix} = 0 \ \ldots\ldots (2.5)$$

yang menunjukkan bahwa $\phi_{m-1}(x)$ adalah kombinasi linier dari $y_o, y_1, \ldots\ldots, y_{m-1}$

Berdasarkan persamaan diatas bisa juga ditulis :

$$\phi_{m-1}(x) = l_o(x).y_o + l_1(x).y_1 + \ldots\ldots + l_{m-1}(x).y_{m-1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.6)$$

dengan :

$$l_o\ x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \ldots & x^{m-1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 \ldots & x_1^{m-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 \ldots & x_2^{m-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_{m-1} & x_{m-1}^2 \ldots & x_{m-1}^{m-1} \end{vmatrix}}{\text{DET}}$$

$$l_1(x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_o & x_o^2 \ldots\ldots & x_o^{m-1} \\ 1 & x & x^2 \ldots\ldots & x^{m-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 \ldots\ldots & x_2^{m-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_{m-1} & x_{m-1}^2 \ldots & x_{m-1}^{m-1} \end{vmatrix}}{\text{DET}}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$l_{m-1}(x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_o & x_o^2 \ldots\ldots & x^{m-1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 \ldots\ldots & x_1^{m-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 \ldots\ldots & x_2^{m-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_{m-3} & x_{m-3}^2 \ldots & x_{m-3}^{m-1} \\ 1 & x_{m-2} & x_{m-2}^2 \ldots & x_{m-2}^{m-1} \end{vmatrix}}{\text{DET}}$$

atau rumus lain :

$$l_o(x) = \frac{\mathrm{DET}\Big|_{x_o = x}}{\mathrm{DET}}$$

$$= \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\ldots\ldots.(x - x_{m-1})}{(x_o - x_1)(x_o - x_2)(x_o - x_3)\ldots\ldots.(x_o - x_{m-1})}$$

$$l_1(x) = \frac{\mathrm{DET}\Big|_{x_1 = x}}{\mathrm{DET}}$$

$$= \frac{(x - x_o)(x - x_2)(x - x_3)\ldots\ldots.(x - x_{m-1})}{(x_1 - x_o)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\ldots\ldots.(x_1 - x_{m-1})}$$

..........................................

$$l_{m-1}(x) = \frac{\mathrm{DET}\Big|_{x_{m-1} = x}}{\mathrm{DET}}$$

$$= \frac{(x - x_o)(x - x_1)(x - x_2)\ldots\ldots(x - x_{m-2})}{(x_{m-1} - x_o)(x_{m-1} - x_1)(x_{m-1} - x_2)\ldots\ldots(x_{m-1} - x_{m-2})}$$

Sehingga bisa ditulis rumus sebagai berikut :

$$\phi_{m-1}(x) = \sum_{i=0}^{m-1} l_i(x).y_i \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.7)$$

dimana $l_i(x)$ adalah polinom dalam x berderajat m-1.

Karena $\phi_{m-1}(x_j) = y_j$ , untuk $j = 0,1,2,3,\ldots.,m-1$.

Persamaan (2.7) memberikan bentuk :

$$\left.\begin{array}{l} l_i(x_j) = 0, \text{ bila } i \neq j \\ l_j(x_j) = 1, \text{ untuk semua } j \end{array}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots.(2.8)$$

Jadi $l_i(x)$ dapat ditulis sebagai :

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_{m-1})}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_{m-1})} \qquad \ldots\ldots(2.9)$$

yang memenuhi kondisi (2.7).

Bila sekarang ditulis :

$$\pi(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_i)(x - x_{i+1})\ldots\ldots$$

$$(x - x_{m-1}). \qquad \ldots\ldots(2.10)$$

maka $\pi^1(x_i) = \frac{d}{dx} \left| \pi(x) \right|_{x = x_i}$

$$\pi^1(x_i) = (x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_{m-1})$$

Jadi persamaan (2.9) dapat ditulis sebagai :

$$l_i(x) = \frac{\pi(x)}{(x - x_i).\ \pi^1(x_i)} \qquad \ldots\ldots(2.11)$$

Dari persamaan (2.7). dan persamaan (2.11). diperoleh bentuk :

$$\phi_{m-1}(x) = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\pi(x)}{(x - x_i)\ \pi^1(x_i)}\ y_i \qquad \ldots\ldots(2.12)$$

Koefisien -koefisien $l_i(x)$ yang didefinisikan persamaan (2.9) disebut *koefisien-koefisien interpolasi LAGRANGE.*

2.2. Formula Interpolasi Hermite.

Diberikan suatu bentuk persamaan sebagai berikut :

$$y(x) = \sum_{k=1}^{m} h_k(x) \cdot f(x_k) + \sum_{k=1}^{m} \bar{h}_k(x) \cdot f^1(x_k) \quad \ldots.(2.13)$$

dengan $f(x_k)$ dan $f^1(x_k)$ adalah nilai-nilai fungsi dan turunan di $x_k$.

Sedangkan $h_i(x)$ dan $\bar{h}_i(x)$, ( $i = 1,2,3,\ldots m$ ) adalah polinomial dengan derajat maksimum (2m-1), yang mempunyai sifat serupa dengan pengali Lagrange $[l_i(x)]$.

Dengan memandang persamaan (2.13) maka untuk $i = 1,2,\ldots.,m$ dan $j = 1,2,\ldots.,m$ berlaku :

$y(x_j) = f(x_j)$ jika $h_i(x_j) = \delta_{ij}$ dan $\bar{h}_i(x_j) = 0$ ...(2.14)

Dengan mendiferensialkan terhadap x persamaan (2.13) bisa dihasilkan persamaan sebagai berikut :

$$y^1(x) = \sum_{k=1}^{m} h_k^1(x) \cdot f(x_k) + \sum_{k=1}^{m} \bar{h}_k^{\,1}(x) \cdot f^1(x_k)$$

........................(2.15)

Dari persamaan tersebut diatas, jika $i = 1,2,\ldots.,m$ dan $j = 1,2,\ldots.,m$ maka berlaku :

$y^1(x_j) = f^1(x_j)$ jika $h_i^1(x_j) = 0$ dan $\bar{h}_i^{\,1}(x_j) = \delta_{ij}$

...................(2.16)

dengan : $\delta_{ij} = 0$ untuk $i \neq j$

$\delta_{ij} = 1$ untuk $i = j$

Menurut persamaan (2.9), $l_i(x)$ merupakan polinomial derajat (m-1), sehingga $[l_i(x)]^2$ akan berbentuk polinomial derajat (2m-2).

Karena $h_i(x)$ dan $\bar{h}_i(x)$ polinomial derajat (2m-1), sehingga boleh ditulis persamaan sebagai berikut :

$$h_i(x) = r_i(x)\,[l_i(x)]^2 \quad \text{.....................(2.17)}$$

$$\bar{h}_i(x) = s_i(x)\,[l_i(x)]^2 \quad \text{.....................(2.18)}$$

dengan : $r_i(x), s_i(x)$ adalah fungsi linier dari x

$l_i(x)$ adalah polinomial derajat m-1 , yang mempunyai sifat : $l_i(x_j) = 0$, untuk $i \neq j$

$l_i(x_j) = 1$, untuk $i = j$

Pandang persamaan (2.14), karena $h_i(x_j) = \delta_{ij}$ maka untuk $i = j$ berlaku $h_i(x_i) = 1$.

Substitusi $h_i(x_i) = 1$ ke persamaan (2.17) dihasilkan bentuk sebagai berikut :

$$r_i(x_i)\;[l_i(x_i)]^2 = 1$$

Padahal $l_i(x_i) = 1$ maka $[l_i(x_i)]^2 = 1$ akibatnya diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$r_i(x_i) = 1 \quad \text{..................................(2.19)}$$

Pandang persamaan (2.14), karena $\bar{h}_i(x_j) = \delta_{ij}$ maka untuk $i = j$ berlaku $\bar{h}_i(x_i) = 0$.

Dengan memasukkan harga $\overline{h}_i(x_i) = 0$ ke persamaan (2.18) dihasilkan bentuk sebagai berikut :

$$s_i(x_i)\ [l_i(x_i)]^2 = 0$$

Padahal $l_i(x_i) = 1$ maka $[l_i(x_i)]^2 = 1$ sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$s_i(x_i) = 0 \qquad \text{.....................................(2.20)}$$

Sekarang pandang persamaan (2.16), karena $h_i^1(x_j) = 0$ maka untuk $i = j$ berlaku $h_i^1(x_i) = 0$.

Padahal turunan terhadap x dari persamaan (2.17) diperoleh bentuk sebagai berikut :

$$h_i^1(x_i) = r_i^1(x_i)\ [l_i(x_i)]^2 + r_i(x_i)\ 2[l_i^1(x_i)]$$

Maka substitusi $h_i^1(x_i) = 0$ ke bentuk turunan diatas akan menghasikan persamaan sebagai berikut :

$$r_i^1(x_i)\ [l_i(x_i)]^2 + r_i(x_i)\ 2\ [l_i^1(x_i)] = 0$$

karena $[l_i(x_i)]^2 = 1$ dan $r_i(x_i) = 1$ akibatnya diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$r_i^1(x_i) + 2\ [l_i^1(x_i)] = 0 \qquad \text{.........(2.21)}$$

Pandang persamaan (2.16), karena $\overline{h}_i^{\,1}(x_j) = \delta_{ij}$ maka untuk $i = j$ berlaku $\overline{h}_i^{\,1}(x_i) = 1$

Padahal turunan terhadap x dari persamaan (2.18) diperoleh bentuk sebagai berikut :

$$\bar{h}_i^1(x_i) = s_i^1(x_i)\ \ [l_i(x_i)]^2 + s_i(x_i)\ 2\ [l_i^1(x_i)]$$

Maka dengan memasukkan nilai $\bar{h}_i^1(x_i) = 1$ ke bentuk turunan di atas akan dihasilkan persamaan sebagai berikut

$$s_i^1(x_i)\ \ [l_i(x_i)]^2 + s_i(x_i)\ 2\ [l_i^1(x_i)] = 0$$

karena $[l_i(x_i)]^2 = 1$ dan $s_i(x_i) = 0$ akibatnya diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$s_i^1(x_i) = 1 \qquad \text{.........(2.22)}$$

Dari persamaan (2.19) dan persamaan (2.21) bisa diselesaikan sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$r_i(x) = 1 - 2\ [l_i^1(x_i)]\ (x-x_i) \qquad \text{................(2.23)}$$

Dengan memandang persamaan (2.20) dan persamaan (2.22) akan menghasilkan penyelesaian sebagai berikut :

$$s_i(x) = (x-x_i) \qquad \text{.................(2.24)}$$

Substitusi persamaan (2.23) ke persamaan (2.17) diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$h_i(x) = [1 - 2\ [l_i^1(x_i)]\ (x-x_i)]\ [l_i(x)]^2 \text{.....(2.25)}$$

Selanjutnya dengan memasukkan persamaan (2.24) ke persamaan (2.18) diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$\bar{h}_i(x) = (x-x_i)\,[l_i(x)]^2 \qquad \text{.........(2.26)}$$

Dari persamaan (2.25) dan persamaan (2.26) bisa dihasilkan formula interpolasi dengan memasukkan persamaan tersebut ke persamaan (2.13) sehingga diperoleh formula sebagai berikut :

$$y(x) = \sum_{k=1}^{m} h_k(x)\cdot f(x_k) + \sum_{k=1}^{m} \bar{h}_k(x)\cdot f^1(x_k) \qquad \text{....(2.27)}$$

dengan : $h_i(x) = [1 - 2\,[l_i^1(x_i)]\,(x-x_i)]\,[l_i(x)]^2$

$\bar{h}_i(x) = (x-x_i)]\,[l_i(x)]^2$

Persamaan (2.27) biasa disebut *formula interpolasi HERMITE.*

2.3. Fungsi Gamma dan Fungsi Beta.

Bentuk fungsi gamma yang diberi simbol $\tau(n)$ dinyatakan sebagai berikut :

$$\tau(n) = \int_0^{\infty} e^{-x}.x^{n-1}.\,dx \qquad \text{...............(2.28)}$$

yang konvergen untuk $n > 0$.

maka berlaku : $\tau(n+1) = n.\tau(n)$

*Bukti :*

Dari persamaan (2.28) di peroleh :

$$\tau(n+1) = \int_0^\infty e^{-x}.x^n.\,dx$$

$$= -\int_0^\infty x^n.\,de^{-x}$$

$$= -\,e^{-x}.x^n\Big|_0^\infty + n\int_0^\infty e^{-x}.x^{n-1}.\,dx.$$

$$= n\int_0^\infty e^{-x}.x^{n-1}.\,dx.$$

$$= n\,\tau(n) \longrightarrow \text{terbukti}$$

Sehingga :

$$\tau(n+1) = n.\tau(n)$$

$$= n.(n-1).\tau(n-1)$$

$$= n.(n-1).(n-2)........3.2.1.\tau(1)$$

$$= n\,!\int_0^\infty e^{-x}.\,dx$$

$$= n\,!\left[-e^{-x}\right]_0^\infty$$

$$\tau(n+1) = n\,!$$

Jadi $\tau(n+1) = \int_0^\infty e^{-x}.x^n.\,dx = n\,!$ ......(2.29)

*Contoh 1 :*

Tunjukkan bahwa :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^m.\,e^{-x^2}.dx = \begin{cases} \tau\left[\dfrac{m+1}{2}\right] & ; \quad m = 0,2,4,.... \\ 0 & ; \quad m = 1,3,5,... \end{cases}$$

Dengan mensubstitusi $x^2 = y \longrightarrow x = \sqrt{y}$

$$\longrightarrow dx = d\sqrt{y}$$

Sehingga integral diatas menjadi :

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\sqrt{y}\,]^m . e^{-y} .d\sqrt{y} =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} [\sqrt{y}\,]^m . e^{-y} .d\sqrt{y} + \int_{0}^{\infty} [\sqrt{y}\,]^m . e^{-y} .d\sqrt{y}$$

karena untuk m = 0,2,4,6,..... berlaku :

$$\int_{-\infty}^{0} [\sqrt{y}\,]^m . e^{-y} .d\sqrt{y} = \int_{0}^{\infty} [\sqrt{y}\,]^m . e^{-y} .d\sqrt{y}$$

$$= \frac{1}{2}\, \Gamma \left[\frac{m+1}{2}\right]$$

Sehingga :

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\sqrt{y}\,]^m . e^{-y} .d\sqrt{y} = \frac{1}{2}\, \Gamma \left[\frac{m+1}{2}\right] + \frac{1}{2}\, \Gamma \left[\frac{m+1}{2}\right]$$

$$= \Gamma \left[\frac{m+1}{2}\right]$$

karena untuk m = 1,3,5,7,..... berlaku :

$$\int_{-\infty}^{0} [\sqrt{y}\,]^m . e^{-y} .d\sqrt{y} = - \int_{0}^{\infty} [\sqrt{y}\,]^m . e^{-y} .d\sqrt{y}$$

Sehingga :

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\sqrt{y}\,]^m . e^{-y} .d\sqrt{y} = - \frac{1}{2}\, \Gamma \left[\frac{m+1}{2}\right] + \frac{1}{2}\, \Gamma \left[\frac{m+1}{2}\right]$$

$$= 0 \longrightarrow \text{terbukti} \qquad \blacksquare$$

Bentuk fungsi Beta ditulis dengan $\beta(m,n)$ dinyatakan sebagai berikut :

$$\beta(m,n) = \int_{-1}^{1} x^{m-1}.(1-x)^{n-1}.dx \qquad \text{.........(2.30)}$$

yang konvergen untuk $m > 0$ , $n > 0$.

Hubungan antara fungsi Gamma dan fungsi Beta dirumuskan sebagai berikut :

$$\beta(m,n) = \frac{\tau(m).\tau(n)}{\tau(m+n)} \qquad \text{...........(2.31)}$$

## 2.4. Polinomial Ortogonal.

Pandang $w(x) \geq 0$ , untuk $\forall\ x \in [a,b]$. Sehingga bisa didefinisikan hasil kali skalar sebagai berikut :

$$\langle g,h \rangle = \int_{a}^{b} g(x).h(x).w(x).dx$$

Dari definisi tersebut dua fungsi $g(x)$ dan $h(x)$ dikatakan ortogonal satu sama lain jika :

$$\langle g,h \rangle = 0 \quad \text{atau} \quad \int_{a}^{b} g(x).h(x).w(x).dx = 0$$

Diberikan contoh sebagai berikut :

i. Fungsi $g(x) = 1$ dan $h(x) = x$ adalah ortogonal terhadap fungsi bobot $w(x) = 1$ pada selang $[-1,1]$.

*Bukti :*

$$<g,h> = \int_{-1}^{1} x.dx$$

$$= \frac{1}{2} x^2 \Big|_{-1}^{1}$$

$$= 0 \; . \longrightarrow \text{terbukti ortogonal.}$$ ■

ii. Fungsi g(x) = sin nx dan h(x) = sin mx adalah ortogonal terhadap fungsi bobot w(x) = 1 pada selang [0,2π]; (dengan n ≠ m dan n,m = bilangan bulat ).

Bukti :

$$<g,h> = \int_{0}^{2\pi} \sin nx.\ \sin mx.\ dx$$

$$= \int_{0}^{2\pi} \frac{1}{2} \Big[ \cos (m-n)x - \cos (m+n)x \Big].dx$$

$$= \frac{1}{2} \Big[ \int_{0}^{2\pi} \cos (m-n)x\ dx - \int_{0}^{2\pi} \cos (m+n)x\ .dx \Big]$$

$$= \frac{1}{2} \Big[ \frac{\sin (m-n)x}{(m-n)} - \frac{\sin (m+n)x}{(m+n)} \Big]_{0}^{2\pi}$$

Substitusi : m-n = r dan m+n = k

karena m,n = bilangan bulat ⟶ k,r = bilangan bulat.

Sehingga :

$$<g,h> = \frac{1}{2} \Big[ \frac{\sin rx}{r} - \frac{\sin kx}{k} \Big]_{0}^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \left[ \frac{\sin 2r\pi}{r} - \frac{\sin 2k\pi}{k} \right] - \right.$$

$$\left. \left[ \frac{\sin 0}{r} - \frac{\sin 0}{k} \right] \right\}$$

karena k,r = bilangan bulat $\longrightarrow \sin 2k\pi = 1$

$\longrightarrow \sin 2r\pi = 1$

Sehingga :

$$\langle g,h \rangle = \frac{1}{2} \left\{ \left[ 1 - 1 \right] - \left[ 1 - 1 \right] \right\}$$

$\langle g,h \rangle = 0. \longrightarrow$ terbukti ortogonal. ∎

Selanjutnya $\phi_o(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \ldots\ldots\ldots$ dikatakan barisan terhingga dari polinom ortogonal asalkan $\phi_k(x)$ semua ortogonal satu sama lain dan tiap-tiap $\phi_k(x)$ merupakan polinom berderajat eksak k. Dengan kata lain :

i. Untuk $\forall$ k, $\phi_k(x) = A_k . x^k$ + polinom berderajat $\leq$ k, dengan $A_k \neq 0$.

ii. Bila $k \neq r$ maka berlaku $\langle \phi_k, \phi_r \rangle = 0$

*Contoh 2 :*

Fungsi $\phi_o(x) = 1$, $\phi_1(x) = 1 - x$ dan $\phi_2(x) = x^2 - 4x + 2$ membentuk barisan dari tiga polinom ortogonal terhadap fungsi bobot $w(x) = e^{-x}$ pada selang $[0, \infty]$ atau dengan kata lain :

$$<\phi_k,\phi_r> = \int_0^{\infty} e^{-x}.\phi_k(x).\phi_r(x).\,dx = 0 \text{ , dengan } k \neq r$$

$k = 0,1,2.$ dan $r = 0,1,2.$

Untuk membuktikan kebenaran bahwa jika barisan tersebut ortogonal.

Ambil $k = 0$ dan $r = 1$, sehingga :

$$<\phi_0,\phi_1> = \int_0^{\infty} e^{-x}.(1-x).dx$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-x}.\,dx - \int_0^{\infty} e^{-x}.\,x.dx$$

$$= 0\,! - 1\,!$$

$$<\phi_0,\phi_1> = 0$$

Ambil $i = 0$ dan $j = 2$, sehingga :

$$<\phi_0,\phi_2> = \int_0^{\infty} e^{-x}.(x^2 - 4x + 2).\,dx$$

$$= \int_0^{\infty} x^2.e^{-x}.\,dx - 4.\int_0^{\infty} x.e^{-x}.dx + 2.\int_0^{\infty} e^{-x}.\,dx$$

$$= 2\,! - 4\,.\,1\,! + 2\,.\,0\,!$$

$$<\phi_0,\phi_2> = 0$$

Ambil $i = 1$ dan $j = 2$, sehingga :

$$<\phi_1,\phi_2> = \int_0^{\infty} e^{-x}.(1 - x).(x^2 - 4x + 2).\,dx$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-x}.(-x^3 + 5x^2 - 6x + 2).\,dx$$

$$= -\int_0^\infty x^3.e^{-x}.\,dx + 5\int_0^\infty x^2.e^{-x}.\,dx - 6\int_0^\infty x.\,e^{-x}.dx$$

$$+ 2\int_0^\infty e^{-x}.\,dx$$

$$= -(3\,!) + 5\,.\,2\,! - 6\,.\,1\,! + 2\,.\,0\,!$$

$<\phi_1,\phi_2> = 0$

Karena $\forall\ k \neq r$, $<\phi_k,\phi_r> = 0$. Jadi terbukti barisan tiga polinom tersebut ortogonal terhadap fungsi bobot $w(x) = e^{-x}$ pada selang $[0,\infty]$. ∎

Andaikan $\phi_o(x),\phi_1(x),\phi_2(x),\ldots\ldots,\phi_m(x)$ merupakan barisan terhingga dari polinom ortogonal. Maka berlaku sifat berikut ini :

*Sifat 1 :*

Jika $y(x)$ merupakan sembarang polinom berderajat $\leq$ m, maka $y(x)$ dapat ditulis sebagai :

$$y(x) = d_o\phi_o(x) + d_1\phi_1(x) +\ldots.+ d_m\phi_m(x) \quad \ldots.(2.32)$$

dengan koefisien $d_o,d_1,d_2,\ldots,d_m$ telah ditetapkan secara unik oleh $y(x)$.

Jika $y(x) = a_m.x^m$ + suatu polinom berderajat < m maka bisa ditulis ke bentuk persamaan (2.32).,dengan :

$$d_m = \frac{a_m}{A_m}$$

$d_m$ = koefisien $\phi_m(x)$ dari $y(x)$
$a_m$ = koefisien $x^m$ dari $y(x)$
$A_m$ = koefisien $x^m$ dari $\phi_m(x)$

*Contoh 3 :*

Ambil polinom umum derajat $\leq 2$, sebagai berikut :

$y_2(x) = a_o + a_1.x + a_2.x^2$

Dengan mengambil tiga barisan polinomial yang ortogonal terhadap fungsi bobot $w(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$ pada selang [-1,1] sebagai berikut :

$$\phi_o(x) = 1,\ \phi_1(x) = x \text{ dan } \phi_2(x) = 2x^2 - 1$$

maka polinom $y_2(x)$ tersebut bisa ditulis sebagai :

$$y_2(x) = \left( a_o + \frac{a_2}{2} - \frac{a_2}{2} \right) + a_1.x + a_2.x^2$$

$$= \left( a_o + \frac{a_2}{2} \right) + a_1.x + \frac{a_2}{2}(2x^2 - 1)$$

$$y_2(x) = \left( a_o + \frac{a_2}{2} \right) \phi_o(x) + a_1.\phi_1(x) + \frac{a_2}{2}\phi_2(x)$$

dengan $\phi_o(x)$,$\phi_1(x)$ dan $\phi_2(x)$ merupakan barisan dari tiga polinom Cheybeshev.

Jadi persamaan $y_2(x)$ bisa dibawa ke bentuk persamaan (2.32), sehingga memenuhi sifat 1. ∎

*Sifat 2 :*

Jika $y(x)$ polinom berderajat $< m$, maka $y(x)$ ortogonal pada $\phi_m(x)$.

Sehingga bisa ditulis : $\langle y, \phi_m \rangle = 0$

*Contoh 4 :*

Ambil $y(x) = 1 + 2x$ , akan perlihatkan bahwa $y(x)$ ortogonal dengan $\phi_2(x) = x^2 - 4x + 2$ terhadap fungsi bobot $w(x) = 1$ pada selang $[0,\tilde{}]$

$$<y\ ,\phi_2> = \int_0^\infty e^{-x}.(1 + 2x).(x^2 - 4x + 2).dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-x}.(2x^3 - 7x^2 + 2).dx$$

$$= 2\int_0^\infty x^3.e^{-x}.dx - 7\int_0^\infty x^2.e^{-x}.dx + 2\int_0^\infty e^{-x}.dx$$

$$= 2\ .\ 3\ ! - 7\ .\ 2\ ! - 2\ .\ 0\ !$$

$<y\ ,\phi_2> = 0 \longrightarrow$ sifat 2 terpenuhi. ■

*Sifat 3 :*

$\phi_m(x)$ mempunyai m titik nol yang nyata dan semuanya terletak pada interval [a,b]. Sehingga $\phi_m(x)$ bisa ditulis dalam bentuk :

$$\phi_m(x) = A_m(x-x_1)(x-x_2)......(x-x_m) \quad ............(2.33)$$

untuk m titik tertentu yang berbeda dalam [a,b].

*Contoh 5 :*

Dengan mengambil tiga barisan polinomial yang ortogonal terhadap fungsi bobot $w(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$ pada selang [-1,1] sebagai berikut :

$$\phi_o(x) = 1,\ \phi_1(x) = x \ \text{ dan } \ \phi_2(x) = 2x^2 - 1$$

Maka barisan dari tiga polinom ortogonal tersebut bisa dibentuk sebagai berikut :

$$\phi_o(x) = A_o = 1$$

$$\phi_1(x) = A_1(x-x_1)$$
$$= 1\ (x - 0)$$

$$\phi_2(x) = A_2(x-x_2)(x-x_1)$$

$$= 2\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

karena memenuhi bentuk persamaan (2.33), jadi sifat 3 terpenuhi. ■

*Sifat 4 :*

Polinom ortogonal memenuhi hubungan tiga suku berulang, jika ditentukan : $a_k = \frac{A_{k+1}}{A_k}$ , untuk semua k

$$\phi_{-1}(x) = 0$$

Dan jika $\gamma_k = \langle\phi_k,\phi_k\rangle \neq 0$ , untuk k = 0,1,2,...,m-1 maka hubungan ulangan ini dapat ditulis sebagai :

$$\phi_{k+1}(x) = (a_k x + b_k)\, \phi_k(x) + c_k \phi_{k-1}(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.34)$$

untuk k = 0,1,2,......,m-1

dimana :

$$b_k = \frac{\langle x\,\phi_k(x),\phi_k(x)\rangle}{\gamma_k} \quad ; k = 0,\ 1,\ldots,m-1$$

dan

$$c_k = \begin{cases} \text{sembarang} & ; \text{ untuk } k = 0 \\ -\dfrac{a_k \cdot \gamma_k}{a_{k-1} \cdot \gamma_{k-1}} & ; \text{ untuk } k > 0 \end{cases} \quad \ldots\ldots(2.35)$$

## 2.5. Metode Newton-Rapshon.

Misal $x_0$ adalah pendekatan akar dari $f(x) = 0$ dan misalnya h kekeliruan dari pendekatan tersebut sedemikian hingga $x_1 = x_0 + h$ dan $f(x_1) = 0$ . Ekspansi $f(x_1) = 0$ oleh deret Taylor diperoleh :

$$f(x_o) + h\, f^1(x_o) + \frac{h^2}{2!} f^{(2)}(x_o) + \ldots. = 0$$

Karena pendekatan yang baik adalah yang kekeliruannya terkecil, dalam hal ini h sangat kecil, maka turunan kedua atau lebih dapat diabaikan, sehingga diperoleh:

$$f(x_o) + h\, f^1(x_o) = 0$$

$$h = -\frac{f(x_o)}{f^1(x_o)}$$

Pendekatan $x_o$ yang baik diberikan oleh $x_1$ dengan rumus :

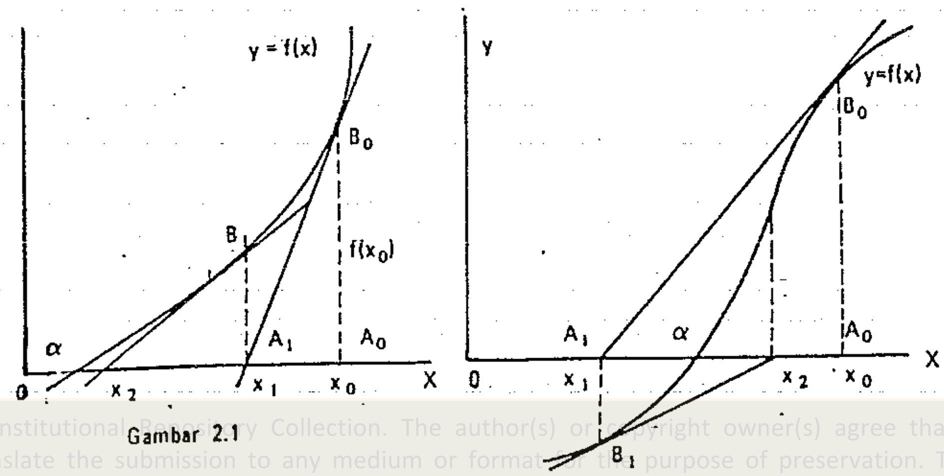
$$x_1 = x_o - \frac{f(x_o)}{f^1(x_o)}$$

Pendekatan-pendekatan yang lain adalah $x_o$, $x_1$, . . . , . . . , $x_{n+1}$ dengan rumus :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f^1(x_n)} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(2.36)$$

rumus diatas disebut dengan *formula NEWTON-RAPSHON.*

Untuk Interpretasi Geometri Metode Newton-Ropshon, perhatikan gambar 2.1. berikut ini :




Gambar 2.1

$OA_o = x_o$ dan $B_o$ $(x_o, f(x_o))$, sehingga $A_oB_o = f(x_o)$. Garis $A_1B_o$ adalah tangen $y = f(x)$ di titik $B_o$ pada kurva tersebut . Jadi gradien garis $A_1B_o$ adalah $f^1(x_o)$ sehingga :

$$f^1(x_o) = \frac{A_oB_o}{A_1A_o} = \frac{f(x_o)}{A_1A_o}$$

$$\text{dan} \quad A_1A_o = \frac{f(x_o)}{f^1(x_o)}$$

Dari persamaan diatas diperoleh :

$$x_1 = x_o - \frac{f(x_o)}{f^1(x_o)} = OA_o - A_1A_o = OA_1,$$

dengan $x_1$ adalah perpotongan sumbu x dengan kurva $y = f(x)$ di titik $(x_o, f(x_o))$ pada kurva tersebut, demikian pula $x_2$ diperoleh dengan nilai awal $x_1$. Umumnya $x_{n+1}$ adalah perpotongan sumbu x dengan tangen pada kurva $y = f(x)$ di titik $(x_n, f(x_n))$ pada kurva tersebut.

*Contoh 6 :*

Gunakan metode Newton-Rapshon untuk menentukan pendekatan akar real dari persamaan $x^4 - x^3 - x^2 - x - 3 = 0$

Bila dimisalkan $f(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x - 4$, maka diperoleh penyelesaian dengan menggunakan metode Newton Rapshon sebagai berikut :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f^1(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n^4 - x_n^3 - x_n^2 - x_n - 4)}{(4x_n^3 - 3x_n^2 - 2x_n - 1)}$$

Dengan nilai awal $x_o = 2.0$ dan pembulatan kesembilan desimal diperoleh hasil berikut ini :

| n | $x_n$ | $\frac{f(x_n)}{f^1(x_n)}$ |
|---|---|---|
| 0 | 2,000000000 | -0,133333333 |
| 1 | 2,133333333 | -0,016023724 |
| 2 | 2,117309609 | 0,000263447 |
| 3 | 2,117046162 | 0,000000070 |
| 4 | 2,117046092 | 0,000000000 |

Jadi akar tersebut adalah 2.117046092 (teliti sampai 9 tempat desimal).

Bila diinginkan suatu ketelitian yang lebih tinggi maka proses tersebut harus dilakukan secara kontinu, dengan angka signifikasi yang lebih besar dalam perhitungannya. ■