BAB II
MATERI PENUNJANG

2.1 Integral Tak Wajar

Definisi 1

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx \qquad (2.1)$$

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx \qquad (2.2)$$

Integral tersebut dikatakan konvergen jika limit ruas kanan ada, dan jika limit itu tidak ada dikatakan divergen.

Definisi 2

Apabila $\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx$ dan $\int_{0}^{\infty} f(x)\,dx$ konvergen, maka dikatakan $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ konvergen dengan nilai

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\infty} f(x)\,dx \qquad (2.3)$$

Definisi 3

1. Jika f(x) menjadi diskontinu pada titik x = a dari interval $a \le x \le b$, maka :

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx \qquad (2.4)$$

Apabila limit pada ruas kanan ada, maka integral ruas kiri konvergen, jika tidak ada maka divergen.

2. Jika f(x) menjadi diskontinu pada titik x = b dari interval $a \le x \le b$, maka :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \qquad (2.5)$$

Apabila limit pada ruas kanan ada, maka integral ruas kiri konvergen, jika tidak ada maka divergen.

3. Jika f(x) menjadi diskontinu pada titik $x = x_o$ dari interval $a \le x \le b$, maka :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{x_o-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{x_o+\varepsilon}^b f(x)\,dx \qquad (2.6)$$

2.2 Teori Fungsi Kompleks

Definisi 4

Bilangan L disebut limit fungsi $f(z)$ untuk z mendekati z_o, dan ditulis $\lim_{z \to z_o} f(z) = L$, pada setiap $\varepsilon > 0$ yang ditentukan, terdapat $\delta > 0$, demikian sehingga untuk semua z dimana $0 < |z - z_o| < \delta$ berlaku $|f(z) - L| < \varepsilon$. Jadi untuk harga-harga z disekitar z_o dengan jari-jari δ kecuali di titik itu sendiri, harga $f(z)$ ada disekitar L dengan jari-jari ε.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

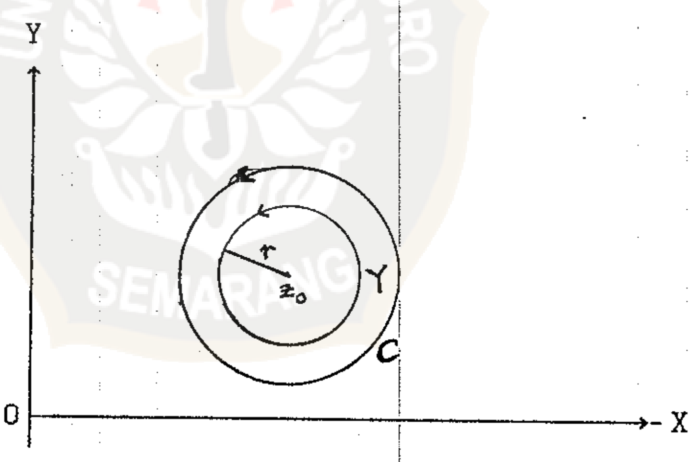
Theorema 1

Jika fungsi f analitik di dalam dan pada kontur tertutup C, dan z_o sebarang titik di dalam C, maka :

$$f(z_o) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_o}\, dz \qquad (2.7)$$

Rumus (2.7) disebut <u>rumus integral Cauchy</u>, yang menunjukkan bahwa suatu fungsi yang analitik dalam suatu daerah yang dibatasi oleh kontur tertutup C, harga fungsi di seluruh daerah itu ditentukan oleh harga-harganya pada C yaitu pada perbatasan daerah itu.

Bukti :



Diketahui lingkaran Y, $|z - z_o| = r$, dimana radius diambil cukup kecil sehingga Y terletak di dalam C. Sehingga akan diperoleh :

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_o}\, dz = \oint_Y \frac{f(z)}{z - z_o}\, dz\ , \qquad (2.8)$$

Karena fungsi $\dfrac{f(z)}{z - z_o}$ analitik pada C dan Y dan dalam daerah diantara kedua kontur tertutup tersebut. Maka persamaan (2.8) dapat ditulis :

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_o}\, dz = f(z_o) \oint_\gamma \frac{dz}{z - z_o} + \oint_\gamma \frac{f(z) - f(z_o)}{z - z_o}\, dz \tag{2.9}$$

Untuk setiap r positip integral yang pertama pada ruas kanan dari persamaan (2.9) mempunyai harga $2\pi i$. Jadi $\oint_C \frac{dz}{z - z_o} = 2\pi i$ untuk semua lingkaran kecil γ yang berada di dalam C dan berpusat di z_o.

Karena f analitik di z_o, maka f kontinu di z_o, sehingga jika diberikan sebarang $\varepsilon > 0$, terdapatlah $\delta > 0$ sedemikian sehingga berlaku :

$|f(z) - f(z_o)| < \varepsilon$ apabila $|z - z_o| < \delta$, apabila diambil radius $r < \delta$, maka ketidaksamaan itu berlaku untuk semua z yang terletak pada γ, dan

$$\left| \oint_\gamma \frac{f(z) - f(z_o)}{z - z_o}\, dz \right| < \frac{\varepsilon}{r}\, 2\pi r = 2\pi\varepsilon .$$

Jadi harga mutlak dari integral yang terakhir dalam persamaan (2.9) dapat dibuat kecil asal r diambil cukup kecil. Karena dua integral yang lain dalam persamaan (2.9) harganya tidak tergantung kepada r, maka integral itu harus juga tidak tergantung kepada r. Sehingga integral itu harus berharga nol, dan persamaan (2.9) akan menjadi :

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_o}\, dz = 2\pi i\, f(z_o).$$

Jadi terbukti rumus Integral Cauchy.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Theorema 2

Jika $f(z)$ analitik untuk $r_2 \leq |z - z_0| \leq r_1$, maka untuk setiap z dimana $r_2 < |z - z_0| < r_1$, $f(z)$ dapat ditulis dalam deret pangkat suku-suku pangkat positip dan negatip dari $(z - z_0)$.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \qquad (2.10)$$

dimana : $a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\xi)\ d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ (2.11)

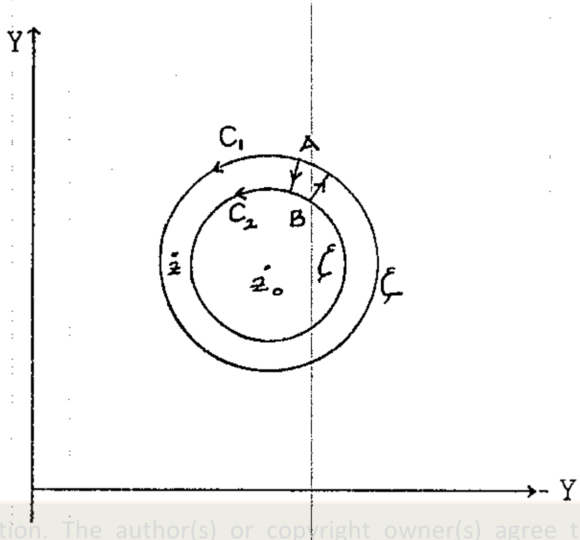
$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\xi)\ d\xi}{(\xi - z_0)^{-n+1}} \quad (n = 1, 2, \ldots) \qquad (2.12)$$

dengan C_1 lingkaran $|\xi - z_0| = r_1$ dan C_2 lingkaran $|\xi - z_0| = r_2$.

Deret pada persamaan (2.10) disebut dengan <u>Deret Laurent</u>.

Bukti :

Karena f analitik dalam daerah tertutup yang dibatasi oleh C_1 dan C_2 dan z suatu titik interior dari daerah itu, menurut rumus integral Cauchy



This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation: (http://eprints.undip.ac.id)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left\{ \oint_{C_1} \frac{f(\xi)\ d\xi}{z - z_o} - \oint_{C_2} \frac{f(\xi)\ d\xi}{z - z_o} \right\} \qquad (2.13)$$

Dengan menarik penggal garis yang menghubungkan titik A pada C_1 dan titik B pada C_2 dan seluruhnya terletak dalam daerah cincin diantara C_1 dan C_2, maka terbentuklah suatu kontur tertutup.

Diketahui :

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_o} + \frac{z - z_o}{(\xi - z_o)^2} + \dots + \frac{(z - z_o)^{n-1}}{(\xi - z_o)^n} + \frac{(z - z_o)^n}{(\xi - z_o)^n(\xi - z)} \qquad (2.14)$$

dengan menukar ξ dan z pada persamaan (2.14) akan diperoleh :

$$\frac{-1}{\xi - z} = \frac{1}{z - z_o} + \frac{\xi - z_o}{(z - z_o)^2} + \dots + \frac{(\xi - z_o)^{n-1}}{(z - z_o)^n} + \frac{(\xi - z_o)^n}{(z - z_o)^n(z - \xi)} \qquad (2.15)$$

Dengan mengalikan kedua ruas dari persamaan (2.14) dan (2.15) dengan $\frac{f(\xi)}{2\pi i}$ dan mengintegralkan sekeliling C_1 dan C_2, dan kemudian dijumlahkan, maka dari persamaan (2.13) akan diperoleh :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \frac{(z - z_o)^k}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\xi)\ d\xi}{(\xi - z_o)^{k+1}} \right\} + P_n +$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \frac{(z - z_o)^{-k}}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\xi)\ d\xi}{(\xi - z_o)^{-k+1}} \right\} + Q_n$$

dimana $P_n = \frac{(z - z_o)^n}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\xi)\ d\xi}{(z - z_o)^n(\xi - z)}$ dan

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$Q_n = \frac{(z - z_o)^{-n}}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\xi)\ d\xi}{(\xi - z_o)^{-n}(z - \xi)}$$

Sehingga berdasarkan persamaan (2.11) dan persamaan (2.12) diperoleh :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k\ (z - z_o)^k + P_n + \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{(z - z_o)^k} + Q_n$$

Misalkan $|z - z_o| = r$ dimana $r_2 < r < r_1$.

Akan dibuktikan bahwa $\lim\limits_{n \to \infty} P_n = 0$

Jika M harga maksimum dari $|f(\xi)|$ untuk ξ pada C_1, maka untuk harga ξ ini berlaku :

$|f(\xi)| \le M$, $|\xi - z_o| = r_1$ dan

$|\xi - z| \ge |\xi - z_o| - |z_o - z| = r_1 - r$, sehingga :

$$|P_n| = \frac{r^n}{2\pi} \left| \oint_{C_1} \frac{f(\xi)\ d\xi}{(\xi - z_o)^n(\xi - z)} \right| \le \frac{r^n}{2\pi} \frac{M}{(r_1 - r)r_1^n} 2\pi r_1$$

$$= \frac{M}{1 - \frac{r}{r_1}} \left(\frac{r}{r_1}\right)^n$$

Karena $0 \le \frac{r}{r_1} < 1$, maka dari ketidaksamaan tersebut

untuk $n \to \infty$ dapat diperoleh $P \longrightarrow 0$.

Jika M harga maksimum dari $|f(\xi)|$ untuk ξ pada C_2, maka :

$$|Q_n| = \frac{r^{-n}}{2\pi} \left| \oint_{C_2} \frac{f(\xi)\ d\xi}{(\xi - z_o)^{-n}(\xi - z)} \right| \le \frac{r^{-n}}{2\pi} \frac{M}{(r - r_2)r_2^{-n}} 2\pi r_2$$

$$= \frac{Mr_2}{r - r_2} \left(\frac{r_2}{r}\right)^n$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

sehingga $Q_n \longrightarrow 0$ untuk $n \longrightarrow \infty$, karena diketahui bahwa $\frac{r_2}{r} < 1$. Dengan demikian terbukti theorema Laurent.

Definisi 5

Residu suatu fungsi di titik singular terasing z_o dinotasikan $\text{Res}(f, z=z_o)$ adalah harga $\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)\, dz$, dimana C sebarang kontur tertutup sekeliling z_o, sedemikian sehingga f analitik di dalam dan pada C kecuali di z_o.

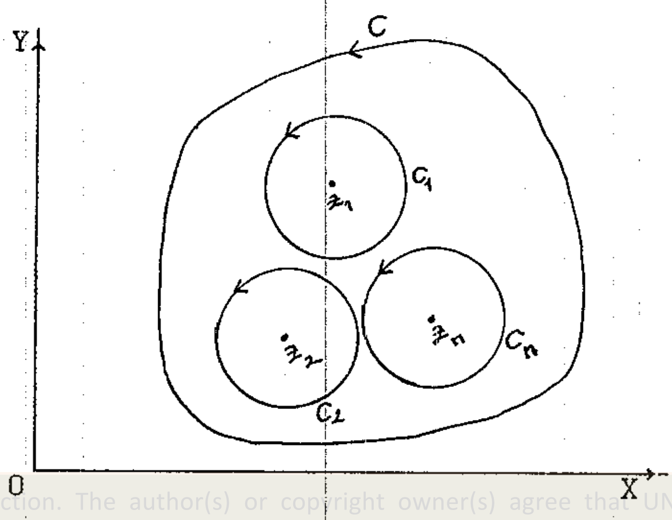
Theorema 3 (Theorema Residu)

Jika fungsi f di dalam dan pada kontur tertutup C, kecuali dititik-titik singular yang banyaknya berhingga $z_1, z_2, \ldots, z_n$ di dalam C, maka :

$$\oint_C f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \text{Res}\,(f, z=z_j) \qquad (2.16)$$

Bukti :

Dibuat lingkaran C_1, C_2, C_3, ... dengan titik pusat z_1, z_2, z_3, ... yang terletak seluruhnya di C. Sehingga dapat diperoleh :



This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_{C_1} f(z)\,dz + \oint_{C_2} f(z)\,dz + \ldots$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \oint_{C_j} f(z)\,dz \qquad (2.17)$$

Menurut definisi 5 diperoleh :

$$\mathrm{Res}(f,z=z_j) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_j} f(z)\,dz \qquad (2.18)$$

Sehingga dari persamaan (2.17) dan (2.18) diperoleh :

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res}(f,z=z_j).$$ Terbukti.

Definisi 6

Pada penderetan Laurent disekitar titik singular terasing z_o dari fungsi f, yaitu :

$$f(z) = \frac{b_1}{z - z_o} + \frac{b_2}{(z - z_o)^2} + \ldots + \frac{b_m}{(z - z_o)^m} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_o)^n \qquad (2.19)$$

untuk $0 < z - z_o < r$ dimana r suatu bilangan positip dan $b_m \neq 0$, maka titik singular z_o dinamakan <u>kutub tingkat m</u> dari fungsi f. Untuk m = 1 dinamakan <u>kutub tunggal</u>.

Theorema 4

Diketahui fungsi f, terdapat bilangan bulat positip m, sedemikian sehingga fungsi :

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation: (http://eprints.undip.ac.id)

$\Phi(z) = (z - z_o)^m f(z)$ ada dan analitik di z_o dan $\Phi(z_o) \neq 0$, maka f mempunyai kutub tingkat m di z_o, dan residu fungsi f di z_o mempunyai rumus :

$$\mathrm{Res}(f, z{=}z_o) = \frac{\Phi^{(m-1)}(z_o)}{(m-1)!} \qquad \text{untuk } m > 1 \qquad (2.20)$$

$$= \lim_{z \to z_o} (z - z_o)\, f(z) \qquad \text{untuk } m = 1 \qquad (2.21)$$

Bukti :

Misal z_o kutub tingkat m dari fungsi f. Dibentuk fungsi

$$\Phi(z) = (z - z_o)^m f(z), \text{ untuk } 0 < |z - z_o| < r, \qquad (2.22)$$

yang didefinisikan pada suatu sekitar dari z_o kecuali di z_o sendiri. Mengingat penderetan dari fungsi f di sekitar kutub z_o, maka Φ dapat ditulis :

$$\Phi(z) = b_m + b_{m-1}(z - z_o) + \ldots + b_1(z - z_o)^{m-1}$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_o)^{n+m}, \text{ dimana } b_m \neq 0. \qquad (2.23)$$

Didefinisikan $\Phi(z_o) = b_m$, maka persamaan (2.22) menjadi berlaku seluruh sekitar dari z_o, termasuk juga z_o, yaitu untuk $|z - z_o| < r$, sehingga dapat didefinisikan

$$\Phi(z_o) = \lim_{z \to z_o} (z - z_o)^m f(z) = b_m \qquad (2.24)$$

Karena $b_m \neq 0$, maka dari persamaan (2.24) dapat dilihat bahwa f(z) menjadi besar tak berhingga jika z mendekati kutub z_o, sehingga :

$$\lim_{z \to z_o} |f(z)| = \infty \qquad (2.25)$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Dari persamaan (2.22) maka $\Phi(z)$ mempunyai titik singular di z_o dan $\Phi(z_o) \neq 0$.
Berdasarkan deret Taylor dan dari persamaan (2.24) diperoleh :

$$b_1 = \frac{\Phi^{(m-1)}(z_o)}{(m-1)!} \tag{2.26}$$

yaitu residu dari f di kutub z_o dari tingkat m. Kalau m = 1, yaitu jika z_o kutub tunggal dari f, maka berdasarkan persamaan (2.24) diperoleh :

$$b_1 = \Phi(z_o) = \lim_{z \to z_o} (z - z_o)\, f(z) \tag{2.27}$$

Dari persamaan (2.26) dan (2.27), maka theorema 4 tersebut terbukti.

Definisi 7

Suatu fungsi disebut <u>meromorfik</u> pada suatu domin jika singularitas fungsi dalam domin itu hanyalah kutub.

Theorema 5

Jika fungsi f memenuhi syarat-syarat :
(1) f(z) meromorfik di setengah bidang atau $y \geq 0$,
(2) f(z) tidak mempunyai kutub pada sumbu riil,
(3) $z\, f(z) \to 0$ uniform, untuk $|z| \to \infty$ dan $0 \leq \arg z \leq \pi$,
(4) $\int_{-\infty}^{0} f(x)\, dx$ dan $\int_{0}^{\infty} f(x)\, dx$ keduanya konvergen, maka :

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \sum R^{+} \qquad (2.28)$$

dimana $\sum R^{+}$ merupakan jumlah semua residu dari $f(z)$ di kutub-kutubnya yang terletak di setengah bidang atas.

Bukti :

Dipilih kontur tertutup C yang terdiri dari :

(i) Bagian sumbu x dari $-R$ sampai R,

(ii) Setengah lingkaran C_R di setengah bidang atas yang pusatnya 0 dan berjari-jari R, dan R dipilih cukup besar sedemikian sehingga kontur tertutup C melingkupi semua kutub dari f yang terletak di setengah bidang atas.

Menurut teorema residu diperoleh :

$\int_{-R}^{R} f(x)\, dx + \int_{C_R} f(z)\, dz = 2\pi i \sum R^{+}$ yang berlaku untuk semua R yang cukup besar. Kalau $R \longrightarrow \infty$, maka menurut syarat (4) diperoleh :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx + \lim_{R \longrightarrow \infty} \int_{C_R} f(z)\, dz = 2\pi i \sum R^{+}$$

Menurut syarat (3) jika diberikan $\varepsilon > 0$, terdapatlah $\lambda > 0$, sedemikian sehingga untuk semua $|z| > \lambda$ dan $0 \le \arg z \le \pi$, berlaku $|z\, f(z)| < \varepsilon$.

Jadi untuk $R > \lambda$ dan z pada C_R berlaku $|z\ f(z)| < \varepsilon$.

Untuk z pada C_R, dapat ditulis $z = Re^{i\theta}$ $(0 \le \theta \le \pi)$ dan $dz = iR\, e^{i\theta}\, d\theta$, sehingga :

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

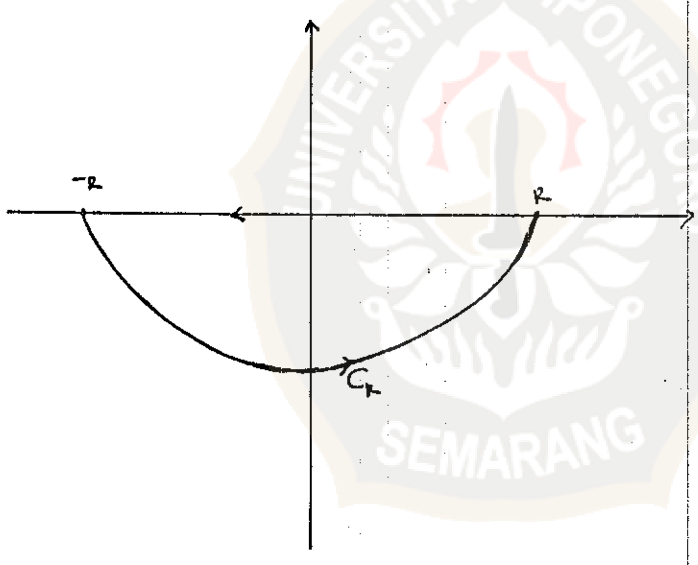
$$\left| \int_{C_R} f(z)\, dz \right| = \left| \int_0^{\pi} f(Re^{i\theta})\, iR\, e^{i\theta}\, d\theta \right| = \left| \int_0^{\pi} z\, f(z)\, d\theta \right|$$

$$< \int_0^{\pi} |z\, f(z)|\, d\theta < \int_0^{\pi} \varepsilon\, d\theta = \pi\varepsilon .$$

Jika $R > \lambda$, berarti bahwa $\lim \int_C f(z)\, dz = 0$.

Berdasarkan theorema diatas untuk kutub-kutub yang terletak di setengah bidang bawah akan diperoleh :

$$\int_{\infty}^{-\infty} f(x)\, dx = 2\pi i \sum R^- \qquad (2.29)$$



This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

2.3 Fungsi Gamma

Fungsi Gamma yang dinyatakan dengan $\Gamma(z)$ didefinisikan oleh :

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-x}\, x^{z-1}\, dx; \text{ dengan Re } \{z\} > 0 \qquad (2.30)$$

Sebuah rumus rekursi untuk Fungsi Gamma adalah :

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-x}\, x^{z}\, dx = \lim_{M\to\infty} \int_0^M e^{-x}\, x^{z}\, dx$$

$$= \lim_{M\to\infty} \left\{ (-e^{-x})\, x^{z} \Big|_0^M - z \lim_{M\to\infty} \int_0^M (-e^{-x})\, x^{z-1}\, dx \right\}$$

$$= \lim_{M\to\infty} \left[(-e^{-M})\, M^{z} - 0 \right] + z \lim_{M\to\infty} \int_0^M e^{-x}\, x^{z-1}\, dx$$

$$= z \int_0^\infty e^{-x}\, x^{z-1}\, dx$$

$$= z\, \Gamma(z) \qquad (2.31)$$

untuk $z = 1$ maka :

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\, dx = \lim_{M\to\infty} \int_0^M e^{-x}\, dx = \lim_{M\to\infty} \left[-e^{-x} \right]_0^M$$

$$= \lim_{M\to\infty} \left[1 - e^{-M} \right] = 1$$

Jadi untuk $z = 1$ maka $\Gamma(1) = 1$.

Jika $z=n$ merupakan bilangan bulat positip yang berada di dalam $\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n)$, maka :

$\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1.1 = 1!$

$\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2.1\Gamma(1) = 2.1 = 2!$

$\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3.2\Gamma(2) = 3.2.1\Gamma(1) = 3.2.1 = 3!$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation: (http://eprints.undip.ac.id)

dan seterusnya, sehingga $\Gamma(n+1) = n!$. Maka Fungsi Gamma kadang-kadang dinamakan *fungsi faktorial* yaitu :

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{2.32}$$

Dari persamaan (2.31) jika z adalah bilangan riil dan positip, maka $\Gamma(z)$ dapat digeneralisasikan sebagai Fungsi Gamma untuk $0 < z < 1$ (pecahan), dengan mengubah persamaan (2.31) sebagai berikut :

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} \tag{2.33}$$

Jika $z = -\frac{1}{2}$, maka dari persamaan (2.33) dapat diperoleh :

$$\Gamma(-\tfrac{1}{2}) = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2} + 1)}{-1/2} = -2\Gamma(\tfrac{1}{2})$$

Sekarang akan dihitung $\Gamma(\frac{1}{2})$ terlebih dahulu.

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^\infty e^{-x}\, x^{-1/2}\, dx$$

Substitusi $x = y^2 \longrightarrow dx = 2y\, dy$

batas-batas integrasi : $x = 0 \longrightarrow y = 0$

$x = \infty \longrightarrow y = \infty$

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^\infty e^{-y^2} y^{-1}\, 2y\, dy = 2\int_0^\infty e^{-y^2}\, dy.$$

Diambil $\Gamma(\frac{1}{2})$ dengan variabel lain, misalkan :

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = 2\int_0^\infty e^{-u^2}\, du \text{ maka :}$$

$$\left\{\Gamma(\tfrac{1}{2})\right\}^2 = 4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(y+u)^2} dy\, du$$

Substitusi $y = r\cos\theta$, $dy\, du = r\, dr\, d\theta$

$u = r\sin\theta$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Batas-batas integrasi :

$$u = 0 \longrightarrow \theta = 0$$

$$v = 0 \longrightarrow \theta = \pi/2$$

$$\left\{\Gamma(\tfrac{1}{2})\right\}^2 = 4\int_0^{\infty}\int_0^{\pi/2} e^{-r^2} r\, dr\, d\theta = 4\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} e^{-r^2}\, dr$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} d\theta\, [-e^{-r^2}]_0^{\infty} = 2\int_0^{\pi/2} d\theta = 2\,[\theta]_0^{\pi/2} = \pi$$

$$\left\{\Gamma(\tfrac{1}{2})\right\}^2 = \pi .$$

Jadi $\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ (2.34)

Rumus Asimptotik untuk $\Gamma(z)$

Jika n besar, maka kesukaran perhitungan yang merupakan bagian dari perhitungan $\Gamma(z)$ akan kelihatan nyata. Dari persamaan (2.30) :

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^z\, dx = \int_0^{\infty} e^{z\ln x - x}\, dx \qquad (2.35)$$

Fungsi z ln x mempunyai sebuah maksimum relatif untuk z = x. Substitusi x = z+y maka persamaan (2.35) diatas menjadi :

$$\Gamma(z+1) = e^{-z}\int_{-z}^{\infty} e^{z\ln(z+y)-y} dy = e^{-z}\int_{-z}^{\infty} e^{z\ln z + z\ln(1+y/z)-y} dy$$

$$= z^z\, e^{-z} \int_{-z}^{\infty} e^{z\ln(1+y/z)-y}\, dy$$

Diketahui bahwa $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$

dengan $x = \frac{y}{z}$, maka :

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$\Gamma(z+1) = z^z\, e^{-z} \int_{-z}^{\infty} e^{-y^2/2 + y^3/3z^2 - \cdots}\, dy$$

Misalkan $y = v\sqrt{z}$ maka dari persamaan diatas akan diperoleh :

$$\Gamma(z+1) = z^z\, e^{-z}\, \sqrt{z} \int_{-\sqrt{z}}^{\infty} e^{-v^2/2 + v^3/3\sqrt{z} - \cdots}\, dv$$

Bila z besar maka aproksimasi yang dekat adalah :

$$\Gamma(z+1) = z^z\, e^{-z}\, \sqrt{z} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2/2}\, dv$$

$$= z^z\, e^{-z}\, \sqrt{z} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(v/\sqrt{2})^2} \sqrt{2}\, d(v/\sqrt{2})$$

$$= z^z\, e^{-z}\, \sqrt{z}\, \sqrt{2}\, \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(z+1) = z^z\, e^{-z}\, \sqrt{2\pi z} \qquad (2.36)$$

Dari persamaan (2.36) dan persamaan (2.31) dapat diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$\Gamma(z+a) = z^{z+a-1/2}\, e^{-z}\, \sqrt{2\pi}$$

Sehingga untuk z yang besar terdapat harga pendekatan :

$$\frac{\Gamma(a+z)}{\Gamma(b+z)} \approx z^{a-b} \qquad (2.37)$$

Fungsi Gamma merupakan fungsi meromorphic dengan kutub sederhana pada z = 0, -1, -2, -3, ... Misalkan n merupakan bilangan bulat positip terkecil. Dari persamaan (2.31) dapat ditentukan :

$$\Gamma(z+n+1) = (z+n)\, \Gamma(z+n)$$

$$\Gamma(z+n) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{(z+n)}$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Maka diperoleh $\Gamma(z)$ sebagai berikut :

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)(Z+2)\ \ldots(z+n)} \tag{2.38}$$

Untuk menghitung residu pada sebuah kutub sederhana, misalkan $z = -n + \varepsilon$, maka residu di kutub tersebut adalah :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon\, \Gamma(-n+\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \frac{\Gamma(\varepsilon+1)}{(-n+\varepsilon)(-n+\varepsilon+1)\ \ldots}$$

$$= \frac{\Gamma(1)}{(-n)(-n+1)(-n+2)\ldots(-2)(-1)}$$

$$= \frac{(-1)^n}{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots2.1}$$

$$= \frac{(-1)^n}{n!} \tag{2.39}$$

Contoh soal :

1. Hitunglah setiap integral yang berikut :

a) $\int_0^\infty x^3 e^{-x}\, dx = \Gamma(4) = 3! = 3.2.1 = 6$

b) $\int_0^\infty \sqrt{y}\ e^{-y^3} dy$

Dengan memisalkan $y^3 = x$, maka integral tersebut menjadi :

$$\int_0^\infty \sqrt{x^{1/3}}\ e^{-x}\ \tfrac{1}{3}\ x^{-2/3}\ dx = \tfrac{1}{3} \int^\infty x^{-1/2}\ e^{-x} dx$$

$$= \tfrac{1}{3}\ \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{3}$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

2.4 Transformasi Fourier

Transformasi Fourier dari fungsi $f(x) \in L_2(-\infty, \infty)$ didefinisikan dengan :

$$F[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} f(x)\, dx \qquad (2.40)$$

F[f] merupakan transformasi Fourier dari f(x) dimana F[f] = F(s) dengan s adalah suatu peubah hasil transformasi.

Sedangkan transformasi invers Fourier dari F[f] ditulis sebagai :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} F(f)\, ds \qquad (2.41)$$

Jika f(x) merupakan fungsi genap yang berarti f(x) = f(-x) untuk semua x maka :

$$F[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos sx\, f(x)\, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} f(x) \cos sx\, dx \qquad (2.42)$$

F[f] merupakan transformasi Cosinus Fourier dari f(x) dan dinotasikan dengan $F_c[f]$. Dan transformasi invers Cosinus Fourier dinyatakan dengan :

$f(x) = F_c^*\{ F[f] \}$ dan didefinisikan dengan :

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} F_c(s) \cos sx\, dx \qquad (2.43)$$

Apabila f(x) merupakan fungsi ganjil yang berarti f(-x) = -f(x) untuk semua x, maka :

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$F[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sin sx\ f(x)\ dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} f(x) \sin sx\ dx \tag{2.44}$$

F[f] merupakan transformasi Sinus Fourier dan dinotasikan dengan $F_s[f]$ sehingga :

$$F_s[f] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} f(x) \sin sx\ dx \tag{2.45}$$

Sedangkan transformasi invers Sinus Fourier dari $F_s[f]$ dinyatakan dengan :

$$f(x) = F_s^{*}\{F\ [f]\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} F_s(s) \sin sx\ dx \tag{2.46}$$

Theorema 6 (Theorema Pergeseran)

a. Jika $F\{f(x)\} = F(s)$ maka $F\{f(x-a)\} = e^{isa}\ F(s)$

b. Jika $F\{f(x)\} = F(s)$ maka $F\{f(x+a)\} = e^{-isa}\ F(s)$

Bukti :

a) Jika $F\{f(x)\} = F(s)$ maka $F\{f(x-a)\} = e^{isa}\ F(s)$

$$F[s] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx}\ f(x)\ dx$$

$$F\{f(x-a)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx}\ f(x-a)\ dx$$

substitusi $u = x - a$ maka $x = u + a$, $dx = du$

$$x = -\infty \longrightarrow u = -\infty$$

$$x = \infty \longrightarrow u = \infty$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation: (http://eprints.undip.ac.id)

sehingga :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{isx}\ f(x-a)\ dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{is(u+a)}\ f(u)\ du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{isu}\ e^{isa}\ f(u)\ du$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{isa}\int_{-\infty}^{\infty} e^{isu}\ f(u)\ du$$

$$F\{f(x-a)\} = e^{isa}\ F(s) \qquad (2.47)$$

b) Jika $F\{f(x)\} = F(s)$ maka $F\{f(x+a)\} = e^{-isa}\ F(s)$

$$F[s] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{isx}\ f(x)\ dx$$

$$F\{f(x+a)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{isx}\ f(x+a)\ dx$$

substitusi $v = x + a$ maka $x = v - a$, $dx = dv$

$$x = -\infty \longrightarrow v = -\infty$$

$$x = \infty \longrightarrow v = \infty$$

sehingga :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{isx}\ f(x+a)\ dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{is(v-a)}\ f(v)\ dv$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{isv}\ e^{-isa}\ f(v)\ dv$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-isa}\int_{-\infty}^{\infty} e^{isv}\ f(v)\ dv$$

$$F\{f(x+a)\} = e^{-isa}\ F(s) \qquad (2.48)$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Theorema 7

Operator integral $F[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} f(x)\, dx$

dimana F[f] merupakan transformasi Fourier dari $f(x) \in L_2(-\infty, \infty)$ operator tersebut diatas bersifat unitary, maka :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|F[f]\right|^2 ds = \int_{-\infty}^{\infty} \left|f(x)\right|^2 dx \tag{2.49}$$

dan invers dari F adalah F^* sedemikian sehingga

$$f(x) = F^*\left\{F[f]\right\}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} F[f]\, ds$$

Persamaan (2.49) dikenal dengan *Identitas Parseval* untuk integral Fourier, dan persamaan yang lebih umum adalah :

$$\int_{-\infty}^{\infty} F[f]\, \overline{F[g]}\, ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \overline{g(x)}\, dx \tag{2.50}$$

dimana garis diatas menunjukkan kompleks konjugate yang didapat apabila i diganti dengan -i.

Bukti :

*) $\int_{-\infty}^{\infty} \left|F[f]\right|^2 ds = \int_{-\infty}^{\infty} \left|f(x)\right|^2 dx$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|F[f]\right|^2 ds = \int_{-\infty}^{\infty} F[f]\, \overline{F[f]}\, ds$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{F[f]} \, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} \, f(x) \, dx \, ds$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{F[f]} \, e^{isx} \, f(x) \, dx \, ds$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \int_{-\infty}^{\infty} \overline{F[f]} \, e^{isx} \, ds \, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \int_{-\infty}^{\infty} \overline{F[f]} \, e^{-\overline{isx}} \, ds \, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \int_{-\infty}^{\infty} \overline{F[f] \, e^{-isx}} \, ds \, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, \overline{f(x)} \, dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| F[f] \right|^2 ds = \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x) \right|^2 dx$$

**) $$\int_{-\infty}^{\infty} F[f] \, \overline{F[g]} \, ds = \int_{-\infty}^{\infty} F(f) \, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(x) \, e^{isx}} \, dx \, ds$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F[f] \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} \, \overline{g(x)} \, dx \, ds$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(x)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} \, F[f] \, ds \, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(x)} \, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} \, F[f] \, ds \, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(x)} \, f(x) \, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, \overline{g(x)} \, dx$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

2.5 Konvolusi

Definisi 8

Diberikan f(x) dan g(x) adalah dua fungsi yang berada dalam $L_2(-\infty, \infty)$, maka konvolusi untuk f(x) dan g(x) didefinisikan dengan :

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, g(x-y)\, dy \qquad (2.51)$$

biasanya ditulis dengan $h(x) = f(x) * g(x)$

Theorema 8

Jika $(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, g(x-y)\, dy$

maka invers transformasi Fourier untuk $(f*g)(x)$ adalah :

$$F^*\{f*g\} = \sqrt{2\pi}\, F^*(f)\, F^*(g) \qquad (2.52)$$

Bukti :

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, g(x-y)\, dy$$

$$F^*\{f*g\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (g*f)(x)\, e^{-isx}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, g(x-y)\, dy\, dx$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx}\, g(x-y)\, dx\, dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, \sqrt{2\pi}\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isx}\, g(x-y)\, dx\, dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, \sqrt{2\pi}\, F^{*}\{g(x-y)\}\, dy$$

menurut theorema pergeseran :

$$F^{*}\{f(x-a)\} = e^{-isa}\, F^{*}(s)$$

$$= e^{isx}\, F(f)$$

Maka $F^{*}\{g(x-y)\} = e^{-isy}\, F^{*}(g)$

$$F^{*}\{f*g)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, e^{-isy}\, F^{*}(g)\, dy$$

$$= F^{*}(g) \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, e^{-isy}\, dy$$

$$= \sqrt{2\pi}\, F^{*}(g)\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, e^{-isx}\, dx$$

$$= \sqrt{2\pi}\, F^{*}[g]\, F^{*}[f] \qquad \text{Terbukti.}$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

2.6 Persamaan Bessel

Persamaan diferensial :

$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$ atau

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (\lambda^2x^2 - v^2)\, y = 0 \qquad (2.53)$$

adalah persamaan Bessel dengan derajad v dan parameter λ. Untuk menyelesaikan persamaan (2.53), variabel bebas x diganti t, dengan substitusi $t = \lambda x$, sehingga diperoleh :

$$\frac{dy}{dx} = \lambda \frac{dy}{dt} \quad \text{dan} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \lambda^2 \frac{d^2y}{dt^2}$$

sehingga persamaan (2.53) menjadi :

$$t^2 \frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} + (t^2 - v^2)y = 0 \qquad (2.54)$$

persamaan (2.54) diubah ke bentuk :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + P(t)\frac{dy}{dt} + Q(t)y = 0$$

sehingga diperoleh $P(t) = \dfrac{1}{t}$ dan $Q(t) = \dfrac{t^2 - v^2}{t^2}$

Diasumsikan deret yang berbentuk :

$$y = t^v(\, a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + \ldots\,) \qquad (2.55)$$

$$= a_0t^v + a_1t^{v+1} + a_2t^{v+2} + a_3t^{v+3} + \ldots$$

$$y' = va_0t^{v-1} + (v+1)a_1t^v + (v+2)a_2t^{v+1} + \ldots$$

$$y'' = v(v-1)a_0t^{v-2} + v(v+1)a_1t^{v-1} + (v+1)(v+2)a_2t^v + \ldots$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Substitusi ke persamaan (2.54) diperoleh :

$$\left[v(v-1)a_o t^v + v(v+1)a_1 t^{v+1} + (v+1)(v+2)a_2 t^{v+2} + \ldots + (v+k)(v+k-1)a_k t^{v+k} + \ldots\right] + \left[va_o t^v + (v+1)a_1 t^{v+1} + (v+2)a_2 t^{v+2} + \ldots + (v+k)a_k t^{v+k} + \ldots\right] + \left[a_o t^{v+2} + \ldots + a_{k-2} t^{v+k} + \ldots\right] + \left[-v^2 a_o t^v - v^2 a_1 t^{v+1} - v^2 a_2 t^{v+2} - \ldots - v^2 a_k t^{v+k} + \ldots\right] = 0$$

Hal ini harus diidentikkan bila dan hanya bila setiap koefisien dari t yang berpangkat adalah sama dengan nol. Otomatis koefisien dari t^v adalah nol juga, sehingga v adalah akar dari persamaan indisial. Koefisien dari t^{v+1} adalah :

$$v(v+1)a_1 + (v+1)a_1 - v^2 a_1 = a_1 v^2 + 2a_1 v + a_1 - a_1 v^2$$

$$= 2a_1 v + a_1 = a_1(2v + 1) = 0$$

untuk $k \geq 2$, koefisien dari t^{v+k} adalah :

$$(v+k)(v+k-1)a_k + (v+k)a_k - a_{k-2} - v^2 a_k = 0$$

$$a_k\left[(v+k)(v+k-1) + (v+k) - v^2\right] + a_{k-2} = 0$$

$$a_k\left[v^2 + 2vk - v + k^2 - k + v + k - v^2\right] + a_{k-2} = 0$$

$a_k(2vk + k^2) + a_{k-2} = 0$, $a_k k(2v + k) + a_{k-2} = 0$ atau

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{k(2v + k)} \qquad (2.56)$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Jelas bahwa a_1 harus nol untuk setiap harga dari v, kecuali $v = \frac{1}{2}$ dan genap. Diasumsikan $a_1 = 0$, maka penyelesaiannya adalah dalam bentuk :

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{v+k}$$

Dari persamaan (2.56) terlihat bahwa beberapa koefisien a_k adalah kelipatan dari koefisien kedua dari a_{k-2}. Sehingga mulai dari a_1, dan setiap koefisien dengan indeks ganjil adalah sama dengan nol.

Dan yang lainnya, mulai dari a_0 dan diambil k=2,4,6, ... dari persamaan (2.56) diperoleh : $a_0 = a_0$

$$a_2 = -\frac{a_0}{2(2v+2)} = -\frac{a_0}{2^2\ 1!(v+1)}$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{4(2v+4)} = -\frac{a_2}{2^2\ 2(v+2)} = \frac{a_0}{2^4\ 2!\ (v+2)(v+1)}$$

$$a_6 = -\frac{a_4}{6(2v+6)} = -\frac{a_4}{2^2\ 3(v+3)} = -\frac{a_0}{2^6\ 3!(v+3)(v+2)(v+1)}$$

secara umum dapat diperoleh :

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m\ a_0}{2^{2m}\ m!\ (v+m)\ldots(v+2)(v+1)}$$

dan a_{2m} adalah koefisien dari $t^v t^{2m} = t^{v+2m}$ pada deret (2.55) dari y, oleh karena itu jika a_{2m} memuat faktor 2^{v+2m} maka penyebutnya adalah 2^{2m}, sehingga dapat ditulis :

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{v+2m}\ m!\ (v+m)\ldots(v+2)(v+1)}\ (2^v a_0)$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Dimana faktor $(v+m) \ldots (v+2)(v+1)$ merupakan bentuk faktorial. Sehingga dapat ditulis :

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{v+2m}\ m!(v+m)\ldots(v+2)(v+1)\Gamma(v+1)}\ [2^v\Gamma(v+1)a_o]$$

Diketahui fungsi gamma : $v\Gamma(v) = \Gamma(v+1)$, maka pernyataan untuk a_{2m} akhirnya menjadi :

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{v+2m}\ m!\ \Gamma(v+m+1)}\ [2^v\Gamma(v+1)a_o]$$

ambil $a_o = \dfrac{1}{2^v\Gamma(v+1)}$ sehingga $a_{2m} = \dfrac{(-1)^m}{2^{v+2m}\ m!\ \Gamma(v+m+1)}$

Akhirnya deret untuk y dari persamaan (2.55) jika :

$$a_o = \frac{1}{2^v\Gamma(v+1)}\ , \quad a_2 = -\frac{1}{2^{v+2}\Gamma(v+z)}\ ,$$

$$a_4 = \frac{1}{2^{v+4}\ 2!\ \Gamma(v+3)}\ , \ \ldots$$

adalah :

$$y(t) = t^v(a_o + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + \ldots)$$

$$= t^v\left[\frac{1}{2^v\Gamma(v+1)} + 0 - \frac{t^2}{2^{v+2}\Gamma(v+2)} + 0 + \frac{t^4}{2^{v+4}2!\Gamma(v+3)} - \ldots\right]$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\ t^{v+2m}}{2^{v+2m}\ m!\ \Gamma(v+m+1)}$$

$$\text{Jadi}\quad y(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\ t^{v+2m}}{2^{v+2m}\ m!\ \Gamma(v+m+1)} \qquad (2.57a)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\ t^v\ t^{2m}}{2^v\ 2^{2m}\ m!\ \Gamma(v+m+1)},\ \text{diketahui } i^2 = -1$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$= \frac{t^{v}}{2^{v}} \sum_{m=o}^{\infty} \frac{(i)^{2m}\ t^{2m}}{2^{2m}\ m!\ \Gamma(v+m+1)}$$

$$= \left(\frac{t}{2}\right)^{v} \sum_{m=o}^{\infty} \left(\frac{it}{2}\right)^{2m} \frac{1}{m!\ \Gamma(v+m+1)}$$

persamaan diatas merupakan penyelesaian dari persamaan Bessel dan dinotasikan dengan simbol : $J_v(t)$.

Jadi untuk $t = x$:

$$J_v(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{v} \sum_{n=o}^{\infty} \left(\frac{ix}{2}\right)^{2n} \frac{1}{n!\ \Gamma(v+n+1)} \qquad (2.57b)$$

Ambil $v = -v$

$$\text{sehingga : } J_{-v}(t) = \sum_{m=o}^{\infty} \frac{(-1)^{m}\ t^{-v+2m}}{2^{-v+2m}\ m!\ \Gamma(-v+m+1)} \qquad (2.58)$$

Theorema 9

$$e^{\frac{1}{2}\alpha(z-\frac{1}{z})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\alpha)\ z^{n} \qquad (2.59)$$

Bukti :

$$e^{\frac{1}{2}\alpha(z-\frac{1}{z})} = e^{\frac{\alpha z}{2}} .\ e^{-\frac{\alpha}{2z}}$$

diketahui $e^{x} = \sum_{i=o}^{\infty} \frac{x^{i}}{i!}$ sehingga :

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$e^{\frac{\alpha z}{2}} \cdot e^{-\frac{\alpha}{2z}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\frac{\alpha z}{2})^j}{j!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\frac{\alpha}{2z})^k}{k!}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\frac{\alpha}{2})^j \; z^j}{j!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \; (\frac{\alpha}{2})^k \; z^{-k}}{k!}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \; (\frac{\alpha}{2})^{j+k} \; z^{j-k}}{k!\,j!} \qquad (2.60)$$

ambil $n = j - k$, dimana $-\infty < n < \infty$, sehingga persamaan (2.60) diatas menjadi :

$$e^{\frac{1}{2}\alpha(z-\frac{1}{z})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \; (\frac{\alpha}{2})^{2k+n} \; z^n}{k!(n+k)!} \qquad (2.61)$$

berdasarkan persamaan (2.57), maka persamaan (2.61) dapat ditulis :

$$e^{\frac{1}{2}\alpha(z-\frac{1}{z})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\alpha)\; z^n$$ maka terbukti.

Berdasarkan Theorema Laurent, diketahui :

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz, \; n = 0,1,2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} (z-a)^{n-1} f(z)\, dz, \; n = 1,2, \ldots$$

C_1 dan C_2 dijalani dalam arah positif terhadap titik-titik dalamnya. Bila C_1 dan C_2 diganti dengan suatu lingkaran sepusat C antara C_1 dan C_2, maka a_n

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

dapat diperoleh :

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz,\ n = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (2.62)$$

Jika $z \neq 0$, dan diketahui :

$$e^{\frac{1}{2}\alpha(z-\frac{1}{z})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\alpha)\ z^n$$

Untuk $z = 0$ merupakan kesingularan berhingga dari fungsi $e^{\frac{1}{2}\alpha(z-\frac{1}{z})}$, sehingga fungsi tersebut mempunyai suatu uraian Laurent yang berbentuk :

$$e^{\frac{1}{2}\alpha(z-\frac{1}{z})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\alpha)\ z^n$$

dan berlaku untuk $|z| > 0$. Berdasarkan persamaan (2.62), koefisien dari $J_n(\alpha)$ diberikan oleh :

$$J_n(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{\frac{1}{2}\alpha(z-\frac{1}{z})}}{z^{n+1}}\, dz$$

dimana C merupakan kurva tertutup sederhana yang memuat $z = 0$ di dalamnya.

Diambil C suatu lingkaran yang berjari-jari 1 dan berpusat di titik asal, yaitu C adalah $|\ z\ | = 1$ atau $z = e^{i\theta}$, maka :

$$J_n(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{e^{\frac{1}{2}\alpha(e^{i\theta} - e^{-i\theta})}}{e^{i(n+1)\theta}}\ i\ e^{i\theta}\ d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\alpha \sin\theta - in\theta}\ d\theta$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(\alpha \sin\theta - n\theta)\, d\theta + \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(\alpha\sin\theta - n\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(\alpha\sin\theta - n\theta)\, d\theta$$

dengan menggunakan kenyataan bahwa :

$$I = \int_0^{2\pi}\sin(\alpha\sin\theta - n\theta)\, d\theta = 0$$

dengan memisalkan $\theta = 2\pi - \phi$

$$I = \int_0^{2\pi}\sin(-\alpha\sin\phi - 2\pi n + n\phi)\, d\phi$$

$$= -\int_0^{2\pi}\sin(\alpha\sin\phi - n\phi)\, d\phi$$

$$= -I$$

Sehingga $I = -I$ dan $I = 0$

Jadi $J_n(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\,(n\theta - \alpha\sin\theta)\, d\theta$

dimana $n = 0,1,2, \ldots$

untuk $z = \alpha$ dan $t = \theta$ maka :

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(nt - z\sin t)\, dt$$

$$= \text{Re}\left\{ \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{i(nt - z\sin t)}\, dt\right\}$$

$$= \text{Re}\left\{ \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-int}\, e^{iz\sin t}\, dt\right\}$$

misalkan $F(t) = i\sin t \longrightarrow F'(t) = i\cos t = 0$

dimana $t = \frac{\pi}{2}$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

Diambil $t = \frac{\pi}{2} + v$ maka :

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-in(\pi/2+v)}\, e^{iz\sin(\pi/2+v)}\, dv$$

$$= \frac{e^{-in\pi/2}}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-inv}\, e^{iz\cos v}\, dv$$

$$= \frac{e^{-in\pi/2}}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-inv}\, e^{iz(1-v^2/2+v^4/24-\ldots)}\, dv$$

$$= \frac{e^{i(z-n\pi/2)}}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-inv}\, e^{-izv^2/2+izv^4/24-\ldots)}\, dv$$

Misalkan $v^2 = \frac{-2iu^2}{z}$ atau $v = \frac{(1-i)u}{\sqrt{z}}$,

yaitu $u = \frac{1}{2}(1+i)v\sqrt{z}$

Maka integral diatas menjadi :

$$\frac{(1-i)e^{i(z-n\pi/2)}}{\pi\sqrt{z}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(1+i)nu/\sqrt{z}}\, e^{-u^2-iu^4/6z-\ldots}\, du$$

atau untuk nilai z yang besar dan positip adalah :

$$\frac{(1-i)e^{i(z-n\pi/2)}}{\pi\sqrt{z}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\, du$$

dimana $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\, du = \sqrt{\pi}$, sehingga :

$$\frac{(1-i)e^{i(z-n\pi/2)}}{\pi\sqrt{z}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\, du = \frac{(1-i)e^{i(z-n\pi/2)}}{\sqrt{\pi z}}$$

dan bagian riilnya diperoleh :

$$\frac{1}{\sqrt{\pi z}}\left\{\cos\left(z-\frac{n\pi}{2}\right)+\sin\left(z-\frac{n\pi}{2}\right)\right\}$$

Diketahui bahwa $\cos(a-\frac{\pi}{4}) = \cos a\cos\frac{\pi}{4} + \sin a\sin\frac{\pi}{4}$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos a + \sin a)$$

sehingga :

$$\frac{1}{\sqrt{\pi z}} \left\{ \cos (z - \tfrac{n\pi}{2}) + \sin (z - \tfrac{n\pi}{2}) \right\} =$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ \cos (z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) \right\}$$

Jadi :

$$J_v(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \cos (x - \frac{v\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) \right\} \qquad (2.62)$$

Dari persamaan (2.57) dapat diubah bentuknya menjadi :

$$J_v(z) = z^v \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \, (\frac{1}{2} z)^{2m}}{2^v m! \, \Gamma(v+m+1)} \qquad (2.62b)$$

Jika U_n merupakan suku ke-n, maka :

$$\left| \frac{U_n}{U_{n+1}} \right| = \left| \frac{(\frac{1}{2} z)^{2n} / \, n!\Gamma(v+n+1)}{(\frac{1}{2} z)^{2n+2} / (n+1)!\Gamma(v+n+2)} \right|$$

Dari persamaan (2.31) dapat diperoleh :

$\Gamma(v+n+2) = (v+n+1)\Gamma(v+n+1)$

Sehingga :

$$\left| \frac{U_n}{U_{n+1}} \right| = 4 \left| \frac{(n+1)(v+n+1)}{z^2} \right|$$

Dengan v non-integral dan z bilangan kompleks, maka $J_v(z)$ mempunyai titik cabang pada $z = 0$, dan menghasilkan faktor z^v.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

2.7 Metode Proyeksi

2.7.1 Ruang Hilbert

Definisi 9

Sebuah ruang linear X disebut inner product, jika pada ruang linear X didefinisikan operasi inner product. Apabila $f, g \in X$ (ruang linear riil atau kompleks) maka inner product dinotasikan dengan (f,g) adalah suatu bilangan nyata, sedemikian sehingga dipenuhi sifat-sifat sebagai berikut :

1. Untuk setiap skalar $\alpha, \beta \in F$ dan untuk semua $f, g, h \in X$ maka berlaku :
   - $(\alpha f+\beta g, h) = \alpha(f,g) + \beta(g,h)$
   - $(h,\alpha f+\beta g) = \bar{\alpha}(h,f) + \bar{\beta}(h,g)$
2. Untuk semua $f, g \in X$ (kompleks), berlaku $(f,g) = \overline{(g,f)}$ dan jika $f, g \in X$ (riil), berlaku $(f,g) = (g,f)$.
3. Bersifat definit positif yaitu :
   $(f,f) \geq 0$ dan $(f,f) = 0$ bila dan hanya bila $f = 0$

Catatan : (f,f) adalah riil karena $(f,f) = \overline{(f,f)}$.

Definisi 10

1. Norm dinotasikan $\| \quad \|$ pada ruang inner product didefinisikan dengan :
   $\|f\| = (f,f)^{1/2}$ untuk setiap f dalam ruang inner product.

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

2. Metrik ruang inner product dinyatakan dengan :

   $d(f,g) = \|f - g\|$, dimana : $\|f - g\| = (f-g\ ,\ \ f-g)^{1/2}$,

   untuk semua f,g dalam ruang inner product.

Definisi 11

Misalnya H suatu ruang inner product dan $\{f_n\}$ suatu barisan Cauchy dalam H sedemikian sehingga bahwa barisannya mempunyai sifat untuk setiap $\varepsilon > 0$, yang diberikan dapat ditemukan $N(\varepsilon)$ sedemikian sehingga : $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$ untuk $n,m \in N(\varepsilon)$ atau dengan kata lain :

$$\lim_{n,m \to \infty} \|f_n - f_m\| = 0$$

H disebut ruang Hilbert jika setiap barisan Cauchy konvergen ke suatu elemen dalam H.

Contoh :

$L_2[-\infty\ ,\ \infty]$ kumpulan semua fungsi-fungsi riil yang kontinu dan didefinisikan pada $(-\infty\ ,\ \infty)$ adalah ruang Hilbert. Karena untuk setiap fungsi yang berada dalam $L_2[-\infty\ ,\ \infty]$, berlaku inner product yang dinyatakan dengan :

$$(f,g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ g(x)\ dx, \text{ untuk semua } f(x),\ g(x) \in L_2[-\infty,\infty]$$

Apabila $\lim\limits_{A \to \infty} \int_{-A}^{A} f(x)\ g(x)\ dx$ ada.

Metrik d untuk $L\ [-\infty,\infty]$ dinyatakan dengan :

$$d(f,g) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \{ f(x) - g(x) \}^2\ dx \right]^{1/2} \qquad (2.63)$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

dan norm untuk $f(x) \in L_2[-\infty, \infty]$, jika :

$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx < \infty$, adalah :

$$\|f\| = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dx \right\}^{1/2} \quad (2.64)$$

2.7.2 Transformasi Hilbert

Pengertian Transformasi Hilbert dari fungsi $\phi(x)$ yang berada dalam $L_2(-\infty, \infty)$ dinyatakan sebagai :

$$H[\phi] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(u)}{x - u} \, du \quad (2.65)$$

Sedangkan invers dari transformasi Hilbert adalah sebagai berikut :

$$\phi(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H[\phi(u)]}{x - u} \, du \quad (2.66)$$

2.7.3 Rumus ekivalen Transformai Hilbert

Rumus ekvivalen transformasi Hilbert dapat diperoleh dengan mensubstitusikan $u = x + y$ ke persamaan (2.63) sehingga :

$u = x + y$ maka $y = u - x$; $du = dy$

untuk $u = -\infty \longrightarrow y = -\infty$

$u = \infty \longrightarrow y = \infty$

maka :

$$H[\phi] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(x+y)}{x - (x+y)} \, dy$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation: (http://eprints.undip.ac.id)

$$H[\phi] = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(x+y)}{y}\, dy \qquad (2.67)$$

Sehingga persamaan (2.67) merupakan rumus yang ekvivalen dengan persamaan (2.65). Selanjutnya untuk memudahkan dalam menentukan transformasi Hilbert dari suatu fungsi digunakan persamaan (2.67).

2.7.4 Konvolusi Tranformasi Hilbert

Dari persamaan (2.65) yaitu :

$$\begin{aligned} H[\phi] &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(u)}{x-u}\, du \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\,\frac{1}{x-u}\, du \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\phi(x) * \frac{1}{x}\right] \\ &= \phi(x) * \frac{1}{\pi x} \end{aligned}$$

Jadi transformasi Hilbert untuk $\phi(x) \in L_2(-\infty\ ,\ \infty)$ dapat diperoleh dari konvolusi $\phi(x)$ dengan $\frac{1}{\pi x}$, yaitu :

$$H[\phi] = \phi(x) * \frac{1}{\pi x} \qquad (2.68)$$

Transformasi Fourier dari $H[\phi]$ adalah sebagai berikut :

$$F\{H[\phi]\} = F\left\{\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(u)}{x-u}\, du\right\}$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$= F\left\{ \phi(x) * \frac{1}{\pi x} \right\}$$

$$= \sqrt{2\pi} \quad F[\phi] \; F\left\{ \frac{1}{\pi x} \right\}$$

$$= \sqrt{2\pi} \quad F[\phi] \; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{isx}}{\pi x} \, dx$$

$$= F[\phi] \; \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos sx + \sin sx}{x} \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \; F[\phi] \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos sx}{x} \, dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin sx}{x} \, dx \right\}$$

Karena $\frac{\cos sx}{x}$ merupakan fungsi ganjil, maka :

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos sx}{x} \, dx = 0$, sehingga :

$$F\{H[\phi]\} = \frac{1}{\pi} \quad F[\phi] \; i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin sx}{x} \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \quad F[\phi] \; i \quad \pi \quad \text{untuk } s > 0$$

$$= \; i \; F[\phi]$$

$$= \frac{1}{\pi} \quad F[\phi] \; (-i \; \pi) \quad \text{untuk } s < 0$$

$$= - \; i \; F[\phi]$$

Maka $F\{H[\phi]\} = i \text{ sgn } s \; F[\phi]$ (2.69)

$$\text{dimana sgn } s = \begin{cases} 1 \; , & \text{untuk } s > 0 \\ -1 \; , & \text{untuk } s < 0 \end{cases}$$

Sehingga $F[\phi] = \dfrac{F\{H[\phi]\}}{i \text{ sgn } s} = - \; i \text{ sgn } s \; F\{H[\phi]\}$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$F[\phi] = -\sqrt{2\pi}\ F\left\{ \frac{1}{\pi x} \right\} F\{H[\phi]\}$$

$$= -\ F\left\{ \frac{1}{\pi x} H[\phi] \right\}$$

$$F^{*}\{F[\phi]\} = -\ F^{*}\left[F\left\{ \frac{1}{\pi x} H[\phi] \right\}\right]$$

$$\phi(x) = -\left\{\frac{1}{\pi x} H[\phi] \right\} \qquad (2.70)$$

$$\text{Jadi} \quad \phi(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H[\phi(u)]}{x - u}\, du \qquad (2.71)$$

$\phi(x)$ menunjukkan invers dari Transformasi Hilbert.

Contoh Soal :

Tentukan transformasi Hilbert dari $\phi(x) = \cos x$

Jawab :

$$H[\phi] = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(x+y)}{y}\, dy$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x + y)}{y}\, dy$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\cos x \cos y - \sin x \sin y)}{y}\, dy$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x \cos y}{y}\, dy + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x \sin y}{y}\, dy$$

$$= \frac{1}{\pi} \sin x \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin y}{y}\, dy$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$= \frac{1}{\pi} \sin x \cdot \pi$$

$$= \sin x$$

Jadi transformasi Hilbert dari $\phi(x) = \cos x$ adalah : $H[\phi] = \sin x$.

2.7.5 Metode Proyeksi

Diberikan sebarang $\phi \in L_2(-\infty, \infty)$, maka dapat didefinisikan dua fungsi baru yaitu $\phi_+(x)$ dan $\phi_-(x)$ sebagai berikut :

$$\phi_+(x) = \frac{1}{2} \{ \phi + i\, H[\phi] \} \qquad (2.72)$$

$$\phi_-(x) = \frac{1}{2} \{ \phi - i\, H[\phi] \} \qquad (2.73)$$

Transformasi Fourier dari persamaan (2.72) dan persamaan (2.73) adalah sebagai berikut :

$$F[\phi_+] = \frac{1}{2} F\{ \phi + i\, H[\phi] \}$$

$$= \frac{1}{2} \{ F[\phi] + i\, F[H[\phi]] \}$$

$$= \frac{1}{2} \{ F[\phi] + i\, i \operatorname{sgn} s\, F[\phi] \}$$

$$= \frac{1}{2} \{ F[\phi] - \operatorname{sgn} s\, F[\phi] \}$$

$$F[\phi_+] = 0 \quad , \text{ untuk } s > 0$$

$$= F[\phi], \text{ untuk } s < 0 \qquad (2.74)$$

$$F[\phi_-] = \frac{1}{2} F\{ \phi - i\, H[\phi] \}$$

$$= \frac{1}{2} \{ F[\phi] - i\, F[H[\phi]] \}$$

$$= \frac{1}{2} \{ F[\phi] - i\, i \operatorname{sgn} s\, F[\phi] \}$$

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

$$= \frac{1}{2} \{ F[\phi] + \text{sgn } s \; F[\phi] \}$$

$$F[\phi_-] = 0 \quad , \text{ untuk } s < 0$$

$$= F[\phi], \text{ untuk } s > 0 \qquad (2.75)$$

Dari persamaan (2.72) dan persamaan (2.73)

$$\phi_+(x) = \frac{1}{2} \{ \phi + i \, H[\phi] \}$$

$$\phi_-(x) = \frac{1}{2} \{ \phi - i \, H[\phi] \} \quad +$$

$$\phi_+(x) + \phi_-(x) = \phi(x) \qquad (2.76)$$

dan

$$\phi_+(x) = \frac{1}{2} \{ \phi + i \, H[\phi] \}$$

$$\phi_-(x) = \frac{1}{2} \{ \phi - i \, H[\phi] \} \quad -$$

$$\phi_+(x) - \phi_-(x) = i \, H[\phi]$$

maka : $H[\phi] = - i \{ \phi_+(x) - \phi_-(x) \}$ (2.77)

dari persamaan (2.74) dan persamaan (2.75) diperoleh :

$F[\phi] = F[\phi_+] + F[\phi_-]$,

sehingga diperoleh persamaan :

$$\phi = \phi_+ + \phi_- \qquad (2.78)$$

$$F[\phi] = F[\phi_+] + F[\phi_-] \qquad (2.79)$$

yang merupakan efek dekomposisi ϕ dalam ϕ_+ dan ϕ_- dan transformasi Fourier daerah asal $F[\phi]$ dibagi ke dalam dua fungsi yaitu $F[\phi_+]$ yang kosong untuk semua $s > 0$ dan $F[\phi_-]$ yang kosong untuk semua $s < 0$.

Sekarang akan didekomposisikan $L_2(-\infty , \infty)$ ke dalam dua sub ruang yaitu L_2^+ dan L_2^-, yang

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)

didefinisikan dengan :

$$L_2^+ = \{ \phi(x) \in L_2(-\infty , \infty) \mid F[\phi] = 0 , s > 0 \} \quad (2.80)$$

$$L_2^- = \{ \phi(x) \in L_2(-\infty , \infty) \mid F[\phi] = 0 , s < 0 \} \quad (2.81)$$

Sehingga untuk $\phi \in L_2^+$

$$F[\phi] = 0 , s > 0$$

$$F\{H[\phi]\} = i \text{ sgn } s\, F[\phi]$$

$$F\{H[\phi]\} = 0 , s > 0$$

$$F\{H[\phi]\} = - i F[\phi] , s < 0$$

maka $H[\phi] = - i \phi$ (2.82)

dan untuk $\phi \in L_2^-$

$$F[\phi] = 0 , s < 0$$

$$F\{H[\phi]\} = i \text{ sgn } s\, F[\phi]$$

$$F\{H[\phi]\} = 0 , s < 0$$

$$F\{H[\phi]\} = i F[\phi] , s > 0$$

maka $H[\phi] = i \phi$ (2.83)

sehingga dapat disimpulkan bahwa untuk $\phi \in L_2^{\pm}$

maka $H[\phi] = \mp i \phi$ (2.84)

Telah diperoleh gambaran bahwa ϕ_+ merupakan proyeksi dari ϕ pada L_2^+ dan ϕ_- merupakan proyeksi ϕ pada L_2^-. $L_2(-\infty , \infty)$ (ruang Hilbert) merupakan jumlahan langsung dari L_2^+ dan L_2^- atau dapat ditulis $L_2(-\infty , \infty) = L_2^+ + L_2^-$, maka pada $L_2(-\infty , \infty)$ berlaku relasi sebagai berikut :

1. $L_2(-\infty , \infty) = L_2^+ \cup L_2^-$ (2.85)
2. $\{ 0 \} = L_2^+ \cap L_2^-$ (2.86)

This document is Undip Institutional Repository Collection. The author(s) or copyright owner(s) agree that UNDIP-IR may, without changing the content, translate the submission to any medium or format for the purpose of preservation. The author(s) or copyright owner(s) also agree that UNDIP-IR may keep more than one copy of this submission for purpose of security, back-up and preservation:
(http://eprints.undip.ac.id)