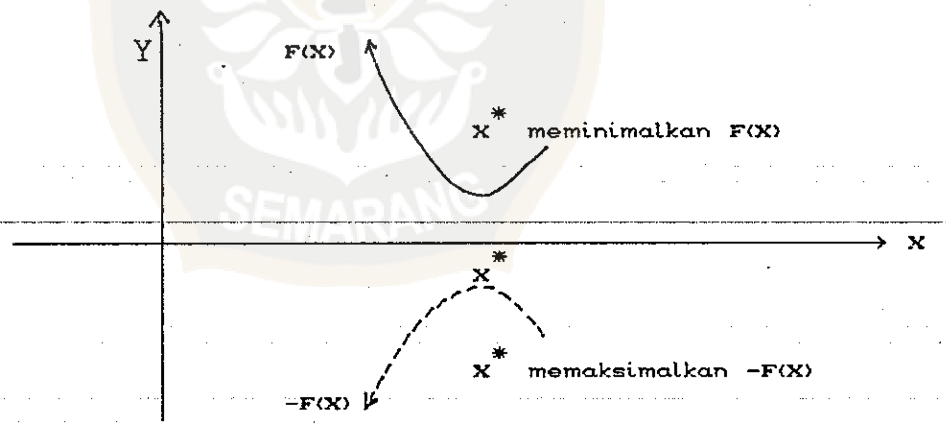
BAB I

PENDAHULUAN

1.1. PENGERTIAN

Optimasi merupakan suatu proses efisiensi dalam mencari kondisi yang akan memaksimalkan atau meminimalkan nilai suatu fungsi. Secara umum optimasi dapat didefinisikan sebagai proses meminimumkan suatu fungsi, dengan dasar bahwa mencari nilai maksimum suatu fungsi berarti sama dengan mencari nilai minimum dari negatif fungsi tersebut. Proses iterasi numerik dapat dicari X sedemikian sehingga F(X) = 0.
gambar 1.



gb. 1 Min F(X) = Max {-F(X) }

Optimasi yang disebut juga pemrograman matematik merupakan bagian dari riset operasi. Teknik optimasi yang digunakan tergantung pada jenis masalah optimasi yang dihadapi, karena sebenarnya tidak ada satu metode yang cocok untuk menyelesaikan semua masalah optimasi.

1.2 RUMUSAN MASALAH

Pemrograman non linear, dalam masalah optimasi praktis yang dibahas disini adalah fungsi multivariabel tanpa kendala atau dengan kendala konstan (yaitu nilai batas bawah dan nilai batas atas dari variabel - variabelnya). Ekspresi aljabar relasi variabel dependen dengan variabel independen didefinisikan oleh :

$$F(X) = F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_N) \qquad 1$$

Hal ini penting, dikarenakan bahwa banyak masalah yang berkendala diubah kedalam masalah tak berkendala melalui pengali lagrange atau melalui fungsi finalty dan barier. Lagi pula, sebagian metode diproses dengan mencari arah dan meminimalkan sepanjang arahnya.

Banyak masalah praktis dalam aplikasi sains memberikan harapan suatu yang memenuhi masalah dimensi hingga :

A. diberikan $F : D \subset R^N \longrightarrow R^1$, mencari $X^* \in R^N$ dimana F mencapai minimum.

B. diberikan $F : D \subset R^N \longrightarrow R^N$, mencari $X^* \in R^N$ dimana $F(X^*) = 0$

C. diberikan $F : D \subset R^N \longrightarrow R^M$, $M \geq N$, mencari $X^* \in R^N$ dimana $\| F(X) \|_2^2$ mencapai minimum.

Kita berikan bahan untuk persamaan differensial :

$$X' = - G(X), \quad X(0) = X_0 \qquad 2$$

Biasanya, dapat diterima aproksimasi untuk X^* yang dibentuk oleh proses iterasi :

$$X_{k+1} = X_k - t_k\, G(X_k)\ ,\ k = 0,1,2,3,\ldots \qquad 3$$

dimana X_o sebagai aproksimasi awal. **G** adalah harga vektor fungsi sedemikian sehingga $G(X_k)$ berindikasi arah untuk diambil oleh iterasi dari X_k, dan t_k adalah sebuah skalar yang mana dihitung sebagai besarnya langkah.

Sebagai contoh, dalam masalah A, kita boleh mengambil

$$G(X_k) = \nabla F(X_k) \quad \text{dan} \quad t_k > 0, \qquad 4$$

yang dipilih untuk meminimalkan $F(X_k - t_k G(X_k))$ dengan parameter t dalam interval $(0,\bar{t}\,]$. Perjalanan ini adalah metode Steepest Descent.

Metode Newton untuk masalah B dengan mengambil

$$G(X_k) = F'(X_k)^{-1} F(X_k). \qquad 5$$

Dalam bagian ini kebawah, t_k dipilih awal untuk mencegah divergensi dan boleh jadi diambil bertingkat untuk memberikan kecepatan maksimum konvergensi. Dalam masalah C boleh menggunakan metode Marquardt yang mana dengan mengambil :

$$G(X_k) = \{\lambda_k I + F'(X_k)^T F(X_k)]^{-1}\ F'(X_k)^T F(X_k) \qquad 6$$

dimana $\lambda_k \geq 0$.

Dalam tugas akhir ini, dibahas penyelesaian masalah optimasi yakni meminimalkan suatu fungsi nonlinear tanpa kendala, yang diimplementasikan dalam metode Marquardt Khususnya yang bertujuan melihat bagaimana kekonvergenan atau pencapaian kecocokan antara data awal dengan data yang akan diuji. Permasalahan diberikan $F : D \subseteq R^N \longrightarrow R^M$, $M \geq N$, mencari $X^* \in R^N$ dimana $\| F(X) \|_2^2$ mencapai minimum.

1.3 DISKRIPSI MASALAH

Teknik optimasi suatu fungsi nonlinear tak berkendala salah satunya adalah kuadrat terkecil. Optimasi dengan kuadrat terkecil dari fungsi nonlinear adalah langkah penting dalam aplikasi optimasi untuk kebanyakan masalah praktis. Banyak model matematik telah dibangun oleh para ahli, baik berbentuk linear maupun nonlinear.

Pandang model matematik dibawah ini :

$F(X;P) = x_1f_1(P) + x_2f_2(P) + x_3f_3(P) + \ldots + x_Nf_N(P)$

adalah linear dalam X.

contoh : $F(X;p) = x_1\text{Cos}(2p) + x_2\text{Exp}(-2p) + x_3(p^2 - 1)^{1/2}$

adalah linear dalam variabel X.

Juga

$F(X;P) = x_1f_1(X;P) + x_2f_2(X;P) + \ldots + x_Nf_N(X;P)$

adalah nonlinear dalam variabel X.

contoh : $F(X;p) = x_1 + x_2\text{Exp}(-x_4p) + x_3\text{Cos}(-x_5p)$

atau $F(X;P) = \text{Exp}\{-x_1p_1\text{Exp}(-p_2(1/x_2 - 1/620))\}$

Sehingga dapat dituliskan persamaan untuk tiap-tiap titik sampel jika setiap residual sama dengan nol adalah sebagai berikut :

$$\left.\begin{array}{l} x_1f_1(X;P_1) + x_2f_2(X;P_1) + \ldots + x_Nf_N(X;P_1) = y_1 \\ x_1f_1(X;P_2) + x_2f_2(X;P_2) + \ldots + x_Nf_N(X;P_2) = y_2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ x_1f_1(X;P_M) + x_2f_2(X;P_M) + \ldots + x_Nf_N(X;P_M) = y_M \end{array}\right\} \quad 7$$

dimana $P_i = (p_{1i}, p_{2i}, \ldots, p_{ki})^T$, $i = 1,2,\ldots,M$

atau dapat ditulis sebagai

$$A\,X = Y \qquad 8$$

dimana $A = [\, f_{ij}] = [\, f_j(X,P_i)\,]$, $i = 1,2,\ldots,M$

$j = 1,2,\ldots,N$

Pendekatan optimasi untuk fitting fungsi nonlinear $f(X,P)$ yang diberikan vektor data $Y = (\,y_1, y_2, y_3, \ldots, y_M)^T$ untuk M pasangan data (p_{ui}, y_i) yang memenuhi residual :

$$F(X) = F(X;P) - Y(P) \qquad 9$$

dimana $F(X;P) = F(x_1, x_2, \ldots, x_N\, ;\, p_1, p_2, \ldots p_k)^T$

Jadi fungsi yang diminimalkan adalah

$$\phi(X) = \frac{1}{2}\| F(X)\|_2^2 \quad , X \in D \qquad 10$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{M} (f_i(X;P_i) - y_i)^2$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{M} f_i^2(X),$$

dimana $P_i = (p_{1i}, p_{2i}, \ldots p_{ki})^T$,

$i=1,2,3,\ldots,M$

Dengan mengambil $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_M$ fungsi berharga real dari N variabel real tak diketahui, maka minimal terjadi ketika gradiennya, yaitu

$$\nabla\,\phi(X) = F'(X)F(X) = 0 \qquad 11$$

dan diambil $G(X) = J(X)^T F(X)$, dimana $J(X)$ sebagai matriks Jakobian dari $F(X)$. Kita mencari titik X^* yang meminimalkan $\phi(X)$. Minimal terjadi pada suatu titik terkecil dalam D yang memenuhi persamaan (11). Dengan asumsi ini, suatu prosedur minimasi dapat diaplikasikan dalam usaha untuk menyelesaikan masalah.

1.4 METODE PEMBAHASAN

Optimasi dari fungsi nonlinear dengan jumlahan kuadrat terkecil adalah kegiatan cukup luas untuk membangun metode spesial untuk penyelesaiannya. Metode yang digunakan untuk mencari solusi masalah optimasi yakni meminimalkan suatu fungsi nonlinear dengan kuadrat terkecil, berdasarkan metode Marquardt (yang disebut juga metode Levenberg-Marquardt).

Metode Marquardt merupakan suatu metode yang berakar pada dua metode dalam optimasi nonlinear yakni metode Gradien (metode Steepest Descent / Cauchy) dan metode Newton (disebut juga metode Gauss Newton).

Dalam mengaproksimasi variabel - variabel dalam fungsi nonlinear dengan kuadrat terkecil , marquardt mengembangkan algoritma yang menggabungkan kelebihan - kelebihan dari metode Steepest Descent dan metode Newton. Metode Gradien mempunyai kemampuan untuk mendapatkan daerah konvergensi walaupun nilai awalnya terletak jauh diluar daerah tersebut. Namun setelah daerah konvergensi tercapai, penentuan nilai akhir yang optimum memakan waktu yang sangat lama. Sedangkan metode Gauss Newton mempunyai kemampuan dalam kecepatan pencapaian nilai akhir yang optimum setelah konvergensinya tercapai, tetapi kekurangannya yakni dalam tahap awal penentuan daerah konvergensi, metode ini sering menemui daerah divergensi. Pada saat yang sama kekurangan pada metode Gradien yakni laju kekonvergenan yang sangat lambat dan divergensi pada iterasi -iterasi awal metode Newton dapat dieliminasi.

Untuk implementasi metode Marquardt dalam penyelesaian masalah optimasi pemrograman nonlinear kuadrat, disajikan pada masalah fungsi nonlinear multivariabel tanpa kendala , dengan bahasa pemrograman BASICA.

1.5 SISTEMATIKA PEMBAHASAN

Bab pertama Tugas Akhir ini tentang Pengertian, Rumusan Masalah, Diskripsi masalah dan Metode Pembahasan. Serta berisi Sistematika Pembahasan secara umum.

Dalam Bab kedua diberikan beberapa definisi, teorema penunjang serta penjelasan seperlunya dari teorema-teorema sebelumnya yang dapat membantu memudahkan penurunan rumus-rumus optimasi fungsi banyak variabel. Khususnya untuk fungsi obyektif tak berkendala yang differensiabel dua kali secara kontinu dan beberapa teknik optimasinya.

Bab ketiga kita bahas implementasi metode Marquardt dalam penyelesaian masalah optimasi pemrograman nonlinear, dengan diberikan program dalam bahasa Basica.

Bab keempat akan disajikan komputasi dalam implementasi kesuatu contoh permasalahan dan penyelesaiannya.

Bab kelima merupakan penutup dari tugas akhir yang penulis bahas, yang berisi kesimpulan dan saran - saran.