BAB II

MATERI PENUNJANG

Sebelum membicarakan Metode Scheffe, perlu dibahas lebih dahulu pengertian dasar yang akan digunakan untuk menyusun konstruksi Metode Scheffe.

2.1 PENDUGA KUADRAT TERKECIL UNTUK β.

Sebagai asumsi dasar digunakan simbol Ω pada keseluruhan skripsi ini, yaitu :

$$\Omega : Y_{n \times 1} = X^T \beta_{p \times 1} + e_{n \times 1} \qquad (2.1.1)$$

dimana :

Y = Vektor peubah acak

X = Matrik konstan dengan tipe $p \times n$

X^T = Matrik transpose dari matrik X

β = Vektor parameter

e = Vektor galat

$E(e_i) = 0$; $Var(e_i) = \sigma^2$

Misalkan $b_1, \ldots, b_p$ penduga-penduga untuk $\beta_1, \ldots, \beta_p$ dari $b = (b_1, b_2, \ldots, b_p)^T$, maka dibentuk :

$$J(Y,b) = \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \sum_{i=1}^{n} X_{ji} b_j\right)^2 \qquad (2.1.2)$$

Sebuah interpretasi dari $\sum_{i=1}^{n} \hat{e}_i^2$, dimana $\hat{e}_i^2$ penduga dari e_i pada pengamatan Y_i

Pada notasi matriks :

$$J(Y,b) = \hat{e}^T\hat{e}$$
$$= (Y - X^Tb)^T(Y - X^Tb)$$
$$= |Y - X^Tb|^2 \qquad (2.1.3)$$

Definisi 2.1.1

Penduga kuadrat terkecil (PKT) dari $\{\beta_j\}$ adalah statistik-statistik $b_j = \hat{\beta}_j(Y)$, $j = 1,\ldots,p$ yang meminimumkan $J(Y,b)$.

Dari kalkulus dapat diturunkan bahwa syarat perlu bagi suatu PKT adalah : $\partial J(Y,b)/\partial b^T = 0$

$$J(Y,b) = (Y - X^Tb)^T(Y - X^Tb)$$
$$= (Y^T - Xb^T)(Y - X^Tb)$$
$$= Y^TY - Y^TX^Tb - Xb^TY + Xb^TX^Tb$$

$$\frac{\partial J(Y,b)}{\partial b^T} = -XY + XX^Tb$$

$$XY = XX^Tb$$

atau $\quad Sb = XY$

dengan $\quad S = XX^T \qquad (2.1.4)$

Ini disebut *Persamaan Normal*.

Sekarang ditunjukkan bahwa jika β terdapat dalam suatu PKT maka himpunan PKT selalu memenuhi persamaan normal dan solusi persamaan normal ialah suatu PKT.

Misalkan V_n suatu ruang vektor dimensi n

Misalkan $\eta = E(Y) = X^T\beta = \beta_1\xi_1 + \ldots + \beta_p\xi_p \in V_n$, dengan ξ_{ij} kolom ke j dari X^T.

Rank X = r, V_r ruang yang dibangun oleh $\{\xi_1,\ldots,\xi_p\}$

Misalkan $Z = X^T\beta \in V_r$

Karena $V_r \leq V_n$, $y \in V_n$, $z \in V_r$ maka $\|y-z\|$ mempunyai nilai minimum, yang dicapai jika $z = \hat{\eta}$, proyeksi Y pada V_r(unik).

Maka $\exists\{b_j\}$ sehingga $\hat{\eta} = b_1\xi_1 + \ldots + b_p\xi_p$ (tak unik). Jadi $\{b_j\}$ suatu PKT. Maka rangkaian ekuivalensi ini berlaku :

$$\{b_j\} \text{ suatu PKT} \Leftrightarrow X^Tb = \eta$$
$$\Leftrightarrow (Y-X^Tb) \perp V_r \Leftrightarrow (Y-X^Tb) \perp \xi_j, \forall j$$
$$\Leftrightarrow \xi_j^T(Y-X^Tb) = 0 \Leftrightarrow X(Y-X^Tb) = 0$$
$$\Leftrightarrow XX^Tb = XY \tag{2.1.5}$$

Jadi PKT dari β selalu ada dan b suatu PKT jika dan hanya jika b memenuhi persamaan normal.

Perlu dicatat bahwa jika rank X < p, $\hat{\beta}$ tak unik. Untuk selanjutnya akan digunakan lambang J_{min} untuk nilai minimum dari J(Y,b).

2.2. PENDUGA KUADRAT TERKECIL FUNGSI-FUNGSI TERDUGA

Metode Scheffe dalam multiple estimasi melibatkan semua anggota ψ dari ruang vektor L berdimensi q dan fungsi-fungsi terduga yang didefinisikan sebagai berikut :

Definisi 2.2.1

Fungsi ψ *terduga* adalah fungsi linier dari $\{\beta_j\}$, $\psi = \sum_{j=1}^{p} C_j\beta_j$, yang mempunyai penduga linier tak bias dalam $\{Y_i\}$.

Theorema 2.2.1

Fungsi parameter $\psi = C^T\beta$ terduga $\Leftrightarrow$ C^T kombinasi linier dari baris-baris X^T, yaitu ada vektor a_{nx1} sehingga $C^T = a^T X^T$

Bukti :

Dari (2.1) $Y = X^T\beta + e$

$$e = Y - X^T\beta$$

dengan $E(e) = 0$ dan $\text{Var}\ (e) = \sigma^2$

$$E(Y) = E\big((X^T\beta) + e\big)$$
$$= E(X^T\beta) + E(e)$$
$$= X^T\beta$$

ψ terduga $\Leftrightarrow \exists a_{nx1}$ sehingga

$$E(a^T Y) = a^T E(Y)$$
$$= a^T X^T \beta$$
$$= \psi$$
$$= C^T\beta \Leftrightarrow \exists a_{nx1}$$

Sehingga $a^T X^T = C^T$

Lemma : 2.2.1

Misalkan V_r ruang yang dibangun oleh kolom-kolom X^T , $\psi = C^T\beta$ terduga, maka ada penduga linier tak bias dari ψ. Misalkan $a^{*T}Y$ dengan $a^* \in V_r$, jika a^TY adalah penduga linier tak bias sebarang dari ψ, maka a^* adalah proyeksi a pada V_r.

Bukti :

Karena $\psi = C^T$ terduga maka $\exists a_{nx1}$, sehingga $E(a^TY)=\psi$. Misalkan $a = a^* + b$ dengan $a^* \in V_r$, $b \perp V_r$. Maka

$\psi = E(a^TY)$

$= E(a^{*T}Y + b^TY)$

$= E(a^{*T}Y) + E(b^TY)$

$= E(a^{*T}Y)$

Karena $E(b^TY) = b^TX^T\beta$ dan $b^TX^T = 0$, karena b orthogonal dengan kolom X^T. Jadi $a^{*T}Y$ penduga linier tak bias dari ψ, dengan $a^* \in V_r$. Jadi eksistensi penduga tak bias linier $a^{*T}Y$ dengan $a^* \in V_r$ telah terbukti. Sekarang dibuktikan a^* proyeksi a pada V_r. Andaikan α^TY penduga linier tak bias ψ yang lain dengan $\alpha^T \in V_r$, maka untuk hal yang sama pada β, jika $E(\alpha^TY) = \psi$, maka :

$$E(a^{*T}Y) - E(\alpha^TY) = \psi - \psi = 0$$

$$E\ [(a^{*T} - \alpha^T)Y] = 0$$

$$(a^{*T} - \alpha^T)\ E(Y) = 0$$

$$(a^{*T} - \alpha^T)\ X^T = 0$$

$$(a^{*}-\alpha)^{T}X^{T} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l}(a^{*}-\alpha) \perp V_r \text{ padahal } a^{*}\in V_r \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \alpha^{*}\in V_r\end{array}\right\} (a^{*}-\alpha) \in V_r$$

Jadi $(a^{*}-\alpha)\in V_r$ sekaligus $\perp$ V_r. Hal ini mungkin terjadi jika $(a^{*}-\alpha) = 0$ atau $\alpha = a^{*}$ berarti bahwa a^{*} unik. Untuk penduga tak bias linier a^{*T} unik. Pada awal pembuktian ini telah dijelaskan bahwa untuk setiap penduga tak bias $a^{*}Y$, dengan a^{*} adalah proyeksi orthogonal a pada V_r.

Theorema 2.2.2 (Theorema Gauss-Markoff)

Dibawah asumsi $\Omega : E(Y) = X^{T}\beta$, $Var(Y) = \sigma^{2}I$

Untuk setiap terduga $\psi = C^{T}\beta$ maka :

a. Ada penduga linier tak bias $\hat{\psi}$ yang tunggal dengan variansi minimum dalam kelas semua penduga linier tak bias.

b. $\hat{\psi}$ didapat dengan mengganti $\{\beta_j\}$ pada $\psi = \sum_{j=1}^{p} C_j\beta_j$ dengan suatu himpunan penduga kuadrat terkecil $\{\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \ldots, \hat{\beta}_j\}$.

Bukti :

a. Diketahui $\psi = C^{T}\beta$

Dibuktikan bahwa ada penduga linier tak bias $\hat{\psi}$ yang tunggal dengan variansi minimum.

Dibuktikan berdasarkan lemma 2.2.1.

Ambil $a^{*}Y$ sebagai penduga linier tak bias untuk ψ dengan $a^{*}\in V_r$.

Misalkan $a^T Y$ sembarang penduga linier tak bias untuk ψ, maka a^* proyeksi a pada V_r dari lemma 2.2.1 dan

$$\|a\|^2 = \|a^*\|^2 + \|a - a^*\|^2$$

$$\sigma\|a\|^2 = \sigma\|a^*\|^2 + \sigma\|a - a^*\|^2 \qquad ....(2.2.1)$$

$$\begin{aligned} Var\,(a^T Y) &= a^T\,Var\,(Y)a \\ &= a^T\,(\sigma^2 I)\,a \\ &= \sigma^2\,(a^T a)\,I \\ &= \sigma^2\|a\|^2 \qquad ....(2.2.2) \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama :

$$Var\,(a^{*T} Y) = \sigma^2\|a^*\|^2 \qquad ....(2.2.3)$$

Dari (2.2.1) (2.2.2) (2.2.3)

$$Var\,(a^T Y) = Var\,(a^{*T} Y) + \sigma^2\|a-a^*\|^2 \qquad ....(2.2.4)$$

Karena $\sigma^2\|a-a^*\|^2 \geq 0$ maka $Var\,(a^T Y) \geq Var\,(a^{*T} Y)$

Untuk sembarang penduga linier tak bias $a^T Y$.

$Var\,(a^T Y) = Var\,(a^{*T} Y)$ jika hanya jika $a = a^*$.

Jadi penduga linier tak bias yang tunggal dengan variansi minimum untuk ψ ialah $\hat{\psi} = a^{*T} Y$.

b. Diketahui $\psi = \sum_{j=1}^{p} C_j \beta_j$

Dibuktikan bahwa $\hat{\psi} = a^{*T} Y = C^T \hat{\beta}$

Misalkan $\hat{\eta} = X^T \hat{\beta}$ merupakan proyeksi pada V_r, dengan $(Y-\hat{\eta}) \perp V_r$

$$a^* \in V_r \text{ maka } a^{*T}.(Y-\hat{\eta}) = 0$$

atau

$$a^{*T} Y = a^{*T} \hat{\eta} \qquad ....(2.2.5)$$

Karena ψ fungsi parametris yang dapat diduga, maka berdasarkan theorema 2.2.2

$$\psi = 4C^T\beta = E(a^{*T}Y) = a^{*T}E(Y)$$

dengan menggunakan theorema 2.2.1 maka ;

$$E(Y) = X^T\beta \text{ maka } \psi = C^T\beta = a^{*T}X^T\beta$$

$$C^T = a^{*T}X^T \qquad (2.2.6)$$

Dari (2.2.5) $\hat{\eta} = X^T\hat{\beta}$

$$a^{*T}Y = a^{*T}X^T\hat{\beta} \qquad (2.2.7)$$

Substitusi (2.2.6) ke (2.2.7) diperoleh

$$a^{*T}Y = C^T\hat{\beta}$$

Jadi terbukti $\hat{\psi} = a^{*T}Y = C^T\hat{\beta}$

Akibat : 2.2.1

Jika $\{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_q\}$ himpunan fungsi terduga dari setiap kombinasi linier $\hat{\psi} = \sum_1^q h_i\hat{\psi}_i$, adalah terduga dan penduga kuadrat terkecilnya $\hat{\psi} = \sum_1^q h_i\hat{\psi}_i$, maka $\hat{\psi}_i$ penduga kuadrat terkecil dari $\hat{\psi}_i$.

Bukti :

$\psi_1, \ldots, \psi_q$ fungsi estimable (terduga)

$\hat{\psi}_i$ merupakan estimasi tak bias dari ψ_i

$$\psi = \sum_1^q h_i\psi_i$$

$$\hat{\psi} = \sum_1^q h_i\hat{\psi}_i$$

$$E\left(\hat{\psi}\right) = E\left(\Sigma h_i\hat{\psi}_i\right)$$

$$= \Sigma h_i\, E\left(\hat{\psi}_i\right)$$

$= \Sigma h_i \psi_i$

$= \psi$

Sehingga $\hat{\psi}$ merupakan estimabel tak bias dari ψ

Misalkan $\psi_i = \sum_{1}^{q} C_{ij}\beta_j$

$$\psi = \sum_j \left(\sum_i h_i C_{ij}\beta_j \right)$$

$$\hat{\psi} = \sum_j \left(\sum_i h_i C_{ij}\hat{\beta}_j \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{q} h_i \hat{\psi}_i$$

dimana $\{\beta_j\}$ adalah himpunan kuadrat terkecil (LS) dari $\{\hat{\beta}_j\}$ berarti $\hat{\psi} = \sum_{i=1}^{q} h_i \hat{\psi}_i$

2.3. ASUMSI DAN DISTRIBUSI TITIK PENDUGA DALAM Ω

Setelah mendapatkan penduga titik dari $\{\beta_j\}$ serta penduga terkecil dari fungsi-fungsi, maka pada pembahasan selanjutnya perlu menurunkan :

(i) Selang kepercayaan dan himpunan kepercayaan untuk pendugaan serempak fungsi terduga.

(ii) Uji hipotesis tertentu dari parameter.

Untuk itu disamping asumsi dasar Ω yang telah dibuat perlu ditambahkan asumsi kenormalan pada $\{Y_i\}$

$$\Omega = Y_{nx1} = N\left(X^T\beta_{px1}, \sigma^2 I\right), \text{ rank } X^T_{nxp} = r$$

Misal $\{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_q\}$ himpunan fungsi terduga dan $\{\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2, \ldots, \hat{\psi}_q\}$ penduga kuadrat terkecilnya, maka :

$$\psi_i = \sum_{j=1}^{q} C_{ij}\beta_j \qquad (2.3.1)$$

dan menurut Theorema Gauss-Markoff

$$\hat{\psi}_i = \sum_{j=1}^{q} a_{ij}Y_j \quad (i = 1,2,\ldots,q) \qquad (2.3.2)$$

dimana

$\{C_{ij}\}$ koefisien konstanta yang diketahui

Dengan notasi matrik bisa ditulis

$$\Psi_{q\times 1} = C_{q\times p}\beta \text{ dan } \hat{\Psi}_{q\times 1} = A_{q\times p}Y$$

maka

$$E(\hat{\Psi}) = \Psi \text{ dan Var } (\hat{\Psi}) = \sigma^2 AA^T$$

Theorema 2.3.1

Dibawah Ω, jika $\hat{\Psi}$ berdistribusi $N(\Psi, \sigma^2 AA^T)$, dan J_{min}/σ^2 berdistribusi chi-kuadrat X^2_{n-r} maka keduanya saling bebas

Bukti :

$\hat{\Psi}$ adalah berdistribusi normal multivariat. Dari Theorema Gauss-Markoff : $E(\hat{\Psi}) = \Psi$.

$\{Z_1,\ldots,Z_n\}$ variabel-variabel Kanonik Z berdistribusi $N(\xi, \sigma^2 I)$ dimana $\xi_i = 0 \quad i > r$.

Karena $J_{min}/\sigma^2 = \sum_{r+1} (Z_i/\sigma)^2$ dengan (Z_i/σ) berdistribusi $N(0,1)$ untuk $i > r$ maka J_{min}/σ^2 berdistribusi X^2_{n-r}.

$\hat{\Psi}$ fungsi dari $\{Z_1,\ldots,Z_r\}$ saja, sedangkan J_{min} hanya fungsi dari $\{Z_{r+1},\ldots,Z_n\}$. Akibatnya keduanya saling bebas.

2.4. ELLIPSOIDA DAN BIDANG PENDUKUNGNYA

Definisi 2.4.1

Misalkan V ruang Euclid berdimensi-n. *Ellipsoida berpusat dititik asal* adalah kumpulan titik yang dapat dibawa oleh translasi dan transformasi orthogonal berurutan sehingga memenuhi :

$$\{X \in V \mid \sum^{n} X_i^2/C_i^2 \le 1 \ , \quad C_i \text{ konstanta} \ , \ i = 1,2,\dots,n\} \qquad \dots\dots\dots\dots\dots(2.4.1)$$

Definisi 2.4.2

Bidang pendukung ellipsoida ialah suatu bidang yang memuat paling sedikit satu titik dari ellipsoida sedemikian hingga seluruh ellipsoida terletak pada sisi yang sama dari bidang.

2.5. ELLIPSOIDA KEPERCAYAAN DAN INTERVAL KEPERCAYAAN UNTUK FUNGSI-FUNGSI TERTAKSIR

Himpunan kepercayaan adalah generalisasi dari konsep selang kepercayaan. Misalkan $\{y_1,\dots,y_n\}$ adalah observasi yang memiliki distribusi dengan penurunan dari nilai yang tak diketahui dari parameter $\{\theta_1,\dots,\theta_m\}$ dan $\{\psi_1,\dots,\psi_q\}$ adalah fungsi khusus dari parameter, maka :

$$Y = [\, y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_n \,]$$

$$\theta = [\, \theta_1 \quad \theta_2 \quad \dots \quad \theta_n \,]$$

$$\Psi = [\, \psi_1 \quad \psi_2 \quad \dots \quad \psi_n \,]$$

masing-masing menyatakan titik koordinat dari vektor

Vektor parameter dan fungsi tertentu dari parameter sehingga Ψ adalah suatu titik diruang Ψ berdimensi q.

Misalkan untuk setiap Y yang mungkin, di ruang sampel daerah R(Y) pada dimensi q ruang Ψ. Jika daerah R(Y) mempunyai sifat dan peluang nilai Ψ sesungguhnya $1-\alpha$ tak bergantung pada nilai $\underline{x}$, maka dikatakan R(Y) adalah suatu himpunan kepercayaan untuk ψ dengan koefisien kepercayaan $1-\alpha$. Selang kepercayaan adalah kasus khusus dimana q = 1 dan R(Y) adalah suatu selang diruang Ψ berdimensi 1.

Misalkan $(\psi_1,...,\psi_q)$ menyatakan q fungsi terduga yang bebas linier, yaitu jika $\psi_{qx1} = C_{qxp}\beta_{px1}$, maka rank C = q. Jika hal ini terjadi maka kita temukan m(m<q) yang bebas linier ψ_i sehingga yang lain adalah kombinasi liniernya. Misal (ψ_i) ditambah lagi sehingga $(\psi_{m+1},...,\psi_q)$ adalah kombinasi linier dari $(\psi_1,...,\psi_m)$, himpunannya bebas linier. Tiap posisi titik $(\psi_1,...,\psi_m)$ titik $(\psi_1,...,\psi_q)$ adalah penurunan tak unik. Sehingga jika himpunan kepercayaan untuk titik pembentuk, juga mempunyai titik berikutnya.

Jika rank C = q karena (ψ_i) adalah bebas linier dari theorema 2.3.1. didapat :

Ψ berdistribusi $N(\Psi,\sigma^2 B)$ dengan : $B = AA^T$ (2.5.2)

Ψ dan J_{min} saling bebas

B matriks non singular

Untuk membuktikan bahwa B non singular, dengan mengingat diatas, maka :

$$(\hat{\Psi} - \Psi)^T B^{-1}(\hat{\Psi} - \Psi) \text{ berdistribusi } \sigma^2 X^2_q \qquad (2.5.3)$$

dan independen

$$J_{min}/\sigma^2 \text{ dimana } X^2_{n-2} \qquad (2.5.3)$$

berarti

$$q^{-1}(\hat{\Psi} - \Psi)^T B^{-1}(\hat{\Psi} - \Psi)/s^2 \text{ berdistribusi } F_{q,n-r} \qquad (2.5.4)$$

dimana $s^2 = J_{min}/(n-r)$ adalah jumlah kesalahan rata-rata (mean square for error).

Untuk membuktikan B non singular cukup menunjukkan nilai pada $\hat{\Psi} = AY$ untuk menemukan $\Psi = AX^T\beta = C\beta$, identik pada β berarti $C = AX^T$, sehingga q = rank C = rank $AX^T \le$ rank $A_{qxn} \le q$ atau A = q. Jadi rank A = rank B akibatnya rank B_{qxq} = q pula maka B non singular.

Dibawah Ω probabilitas $1-\alpha$ dari variabel F pada (2.5.4) adalah $\le F_{\alpha,q,n-r}$ atau :

$$(\Psi - \hat{\Psi})^T B^{-1}(\Psi - \hat{\Psi}) \le qs^2 F_{\alpha,q,n-r} \qquad (2.5.5)$$

Pertidaksamaan di atas menurunkan suatu ellipsoida di ruang Ψ berdimensi q dengan pusat $\Psi = (\hat{\psi}_1,\dots,\hat{\psi}_q)$ dan probabilitas ellipsoida yang menutupi titik parameter $(\psi_1,\dots,\psi_q)$ adalah $1-\alpha$ yang tidak bergantung pada nilai parameter $\beta_1,\dots,\beta_p$, σ^2. Untuk q = 1 didapat suatu selang kepercayaan untuk fungsi terduga tunggal $\psi = C^T\beta$ ($C \ne 0$).

Interval ellipsoida dimensi satu adalah :

$$b^{-1}(\hat{\Psi} - \Psi)^2 \le s^2 F_{\alpha,1,n-r} \qquad (2.5.6)$$

dimana $\hat{\Psi} = a^TY$ adalah PKT dari Ψ dan $b = a^Ta$. Maka Var $(\hat{\Psi}) = a^Ta\sigma^2$ dengan

$$\hat{\sigma}^2_{\hat{\Psi}} = a^T a s^2$$

Sehingga intervalya bisa ditulis :

$$\hat{\Psi} - t_{\alpha/2;n-r}\hat{\sigma}_{\hat{\Psi}} \le \Psi \le \hat{\Psi} + t_{\alpha/2;n-r}\hat{\sigma}_{\hat{\Psi}} \qquad (2.5.7)$$

dengan peluang selang kepercayaan yang memuat nilai ψ ialah $1-\alpha$.

2.6. ELLIPSOIDA KEPERCAYAAN UNTUK UJI HIPOTESIS H

Dibawah asumsi Ω : uji hipotesis :

$$H : \psi_1 = \psi_2 = \ldots = \psi_q = 0$$

dimana $\{\psi_i\}$ fungsi-fungsi terduga saling bebas, yang dapat diselesaikan dengan menolak H jika dan hanya jika ellipsoida kepercayaan tak memuat titik

$(\psi_1,\ldots,\psi_q) = (0,0,\ldots,0)$ yaitu :

$$\text{tolak } H \Leftrightarrow \Psi^T\beta^{-1}\hat{\Psi} > qs^2F_{\alpha,q,n-r} \qquad (2.6.1)$$

Jika H benar peluang menolaknya adalah α, yang tidak tergantung nilai parameter tertentu dari suatu hipotesa dan level signifikan dari ujinya α.

Uji diperoleh dari hipotesa H yang meliputi fungsi terduga $\{\psi_1,\ldots,\psi_q\}$ yang digunakan untuk mendefinisikan H. Oleh karena itu perlu diperhatikan akibat pada uji jika himpunan yang berbeda dari fungsi estimable digunakan untuk mendefinisikan himpunan yang sama.

Misal $\{\psi_1^{''},\ldots,\psi_q^{''}\}$ himpunan $q^{''}$ fungsi terduga yang bebas linier dan dinyatakan dengan $H^{''}$

$$H'' = \psi''_1 = \ldots = \psi''_q = 0$$

Untuk hipotesa H dan H'' sama, berarti H benar jika dan hanya jika H'' benar. Bisa ditulis $\psi_{qx1} = C\beta_{px1}$, $\psi''_{q''x1} = C''\beta$. Maka H dan H'' sama jika himpunan β untuk $C\beta = 0$ adalah sama untuk $C''\beta = 0$

Sekarang ditunjukkan bahwa H dan H'' adalah sama jika dan hanya jika ada matrik non singular D_{qxq} sehingga $C'' = DC$.

Pertama, misal matriks non singular D_{qxq} ada sehingga $C''=DC$, maka tiap pernyataan berikut benar jika hanya jika salah satu penggantinya benar. Berarti H dan H'' sama : H'' benar, $\psi''=0$, $C''\beta=0$, $DC\beta=0$, $C\beta=0$, $\psi=0$, H juga benar. Selanjutnya bahwa H dan H'' sama. W menyatakan himpunan $\{\beta\}$ yang memenuhi relasi equivalen $C\beta=0$ atau $C''\beta=0$ dan dinyatakan dengan V_p. Ruang dimensi dari semua vektor β. Jika ditulis $C\beta=0$ pada rumus $\beta^T C^T = 0^T$. W adalah total vektor pada V_p yang orthogonal dengan kolom C^T. Berarti jika V ruang perluasan dari kolom C^T, maka W adalah orthokomplemen V pada V_p.

Dengan cara yang sama : jika V'' ruang perluasan dari kolom C''^T, V'' orthokomplemen W pada V_p. Sehingga V dan V'' sama. Yaitu C^T dan $C^{T''}$ perluasan ruang yang sama.

Karena q fungsi terduga $(\psi_1, \ldots, \psi_q)$ adalah bebas linier kolom q pada C^T yang bebas linier, sehingga merupakan basis V. Juga q'' kolom C''^T. $V'' = V$ berarti $q'' = q$. q kolom C''^T harus kombinasi linier dari kolom q dari C^T karena rumus berikut merupakan basis V.

Relasinya bisa ditulis dengan matriks

$$C''^T = C^T D^T,\ \text{dengan } D^T = qxq \text{ atau } C'' = DC$$

rank C'' = rank C = q dan rank D = q dan D non singular. Jika hipotesis yang sama untuk H didefinisikan dari $\psi = 0$ dan $\psi'' = 0$, dengan $\psi = C\beta$ dan $\psi'' = C''\beta$, maka $C'' = DC$ sehingga D non singular.

Jika uji H menggunakan cara (2.6.1) untuk ψ'' maka :

$$\text{tolak } h'' \Leftrightarrow \hat{\psi}''^T \beta''^{-1} \hat{\psi}'' > qs^2 F_{\alpha,qn-r} \qquad (2.6.2)$$

Sekarang ditunjukkan bahwa (2.6.1) dan (2.6.2) sama.

$$\hat{\psi}'' = C''\hat{\beta} = DC\hat{\beta} = D\hat{\psi} \text{ dengan } \hat{\beta} \text{ penduga LS}$$

$$B'' = \sigma^{-2} \operatorname{var}(\hat{\psi}) = \sigma^{-2} D \operatorname{Var}(\hat{\psi}) D^T = DBD^T$$

sehingga $\hat{\psi}''^T B''^{-1} \hat{\psi}'' = \hat{\psi}^T D^T (DBT^T)^{-1} D\hat{\psi} = \hat{\psi}^T B^{-1} \hat{\psi}$

Berarti kedua pertidaksamaan itu sama.