BAB II

TEORI PENUNJANG

2.1 FUNGSI PROBABILITAS

Diberikan Ω suatu ruang sampel dan $\mathscr{A}$ sebagai suatu koleksi dari setiap himpunan bagian dari Ω.

Definisi 2.1.1 :

Fungsi Probabilitas. Suatu Fungsi Probabilitas $P(.)$ merupakan suatu fungsi yang ditetapkan dengan domain (daerah asal) $\mathscr{A}$ dan co-domain (daerah hasil) $[0,1]$, dimana memenuhi aksioma-aksioma berikut

(i) $P(A) \geq 0$ untuk setiap $A \in \mathscr{A}$,

(ii) $P(\Omega) = 1$,

(iii) Jika $A_1, A_2, \ldots$ suatu barisan peristiwa saling asing di dalam $\mathscr{A}$ (yaitu $A_i \cap A_j = \emptyset$ untuk $i \neq j$; $i, j = 1, 2, \ldots$) dan jika $A_1 \cup A_2 \cup \ldots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}$, maka

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Untuk selanjutnya, koleksi dari setiap himpunan bagian dari Ω, yaitu $\mathscr{A}$ disebut sebagai Ruang Peristiwa dari Ω.

Definisi 2.1.2 :

Ruang Probabilitas. Susunan tripel $\{\Omega, \mathscr{A}, P\}$ disebut suatu Ruang Probabilitas, dimana Ω merupakan suatu ruang sampel, $\mathscr{A}$ ruang peristiwa dari Ω, dan $P(\cdot)$ adalah suatu fungsi probabilitas dengan domain $\mathscr{A}$.

Diberikan suatu ruang probabilitas $\{\Omega, \mathscr{A}, P\}$. Akan didefinisikan suatu partisi dari Ω.

Definisi 2.1.3 :

Partisi. Suatu Partisi $\mathfrak{A} = [A_1, A_2, \ldots, A_n]$ dari himpunan Ω merupakan koleksi himpunan bagian A_i dari Ω yang memenuhi :

(i) $A_i \subset \Omega$, $i = 1, 2, \ldots, n$,

(ii) $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$ dan

(iii) $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$.

Contoh 2.1.1 :

Diberikan suatu ruang sampel

$$\Omega = \{1,2,3,\ldots,30\}$$

dan diambil lima peristiwa

$A_1 = \{1,2,3,\ldots,10\}$ $\qquad$ $B_1 = \{1,3,5,\ldots,29\}$

$A_2 = \{11,12,13,\ldots,20\}$ $\qquad$ $B_2 = \{2,4,6,\ldots,30\}$

$A_3 = \{21,22,23,\ldots,30\}$.

Dari sini dapat dilihat bahwa

(i). $A_i \subset \Omega$, $i = 1,2,3$ dan $B_j \subset \Omega$, $j = 1,2$,

(ii). $A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_3 = A_2 \cap A_3 = \emptyset$ dan $B_1 \cap B_2 = \emptyset$,

(iii). $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega$ dan $B_1 \cup B_2 = \Omega$.

Dengan demikian

- A_1, A_2, A_3 merupakan koleksi himpunan bagian dari Ω yang menjadi suatu partisi dari Ω.
- B_1, B_2 merupakan koleksi himpunan bagian dari Ω yang menjadi suatu partisi dari Ω.

Karena $A_i \cap B_j \neq \emptyset$ untuk setiap i dan j, maka A_i dan B_j tidak bisa menjadi satu partisi dari Ω.

Maka untuk suatu himpunan $B \in \mathcal{A}$ diperoleh

$$B = \Omega \cap B$$
$$= (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \cap B$$
$$= (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_n)$$
$$B = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B)$$

sehingga

$$P(B) = P\left[\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B)\right]$$
$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B). \qquad \ldots\ldots \quad 2.1.1$$

Contoh 2.1.2 :

Pandang suatu eksperimen pelantunan sebuah dadu seimbang. Diambil dua partisi $\mathfrak{A}$ dan $\mathfrak{B}$ dari ruang sampel yang sama, Ω. $\mathfrak{B}$ merupakan partisi biner, dimana $\mathfrak{B}$ = [genap,ganjil], sedangkan $\mathfrak{A}$ adalah partisi elementer dari Ω. Maka

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$\mathfrak{A} = [\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\}]$$

$$\mathfrak{B} = [\{2,4,6\},\{1,3,5\}]$$

dan

$$P(A_i) = \frac{1}{6}\ , \quad i = 1,\ 2,\ \dots,\ 6$$

$$P(B_j) = \frac{1}{2}\ , \quad j = 1,\ 2.$$

Diambil C suatu peristiwa di dalam ruang probabilitas $\{\Omega,\ \mathscr{A},\ P\}$, dimana

$$C = \{1,2,5,6\}.$$

Dengan menggunakan (*2.1.1*), akan dicari probabilitas dari peristiwa C.

$$P(C) = \sum_{i=1}^{6} P(A_i \cap C)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + 0 + 0 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

$$P(C) = P(B_1 \cap C) + P(B_2 \cap C) = \frac{2}{6} + \frac{2}{6} = \frac{2}{3}.$$

2.2 PROBABILITAS BERSYARAT

Diberikan dua peristiwa A dan B, akan didefinisikan probabilitas bersyarat dari A jika diketahui B terjadi.

Definisi 2.2.1 :

Probabilitas Bersyarat. Diambil A dan B dua peristiwa dalam $\mathcal{A}$, dari ruang probabilitas yang diberikan $\{\Omega, \mathcal{A}, P\}$. Probabilitas Bersyarat dari A diberikan B dinotasikan dengan $P(A|B)$, dan didefinisikan sebagai

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

dimana $P(B) > 0$.

Contoh 2.2.1 :

Diberikan eksperimen pelantunan dua mata uang seimbang, dan diambil ruang sampel

$$\Omega = \{(G,G),(G,A),(A,G),(A,A)\}$$

Akan dicari probabilitas bahwa sisi yang tampak dari kedua mata uang tersebut adalah gambar (G), jika

(i) diberikan satu gambar muncul pada mata uang pertama,

(ii) diberikan paling sedikit satu gambar muncul.

Diambil

B_1 = {gambar muncul pada mata uang pertama}

B_2 = {gambar muncul pada mata uang kedua}

maka

$$\text{(i) } P(B_1 \cap B_2 | B_1) = \frac{P(B_1 \cap B_2 \cap B_1)}{P(B_1)}$$

$$= \frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_1)} = \frac{{}^1/_4}{{}^1/_2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{(ii) } P(B_1 \cap B_2 \mid B_1 \cup B_2) = \frac{P(B_1 \cap B_2 \cap (B_1 \cup B_2))}{P(B_1 \cup B_2)}$$

$$= \frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_1 \cup B_2)} = \frac{{}^1/_4}{{}^3/_4} = \frac{1}{3}.$$

Akibat :

Jika $P(A) > 0$ dan $P(B) > 0$, dengan menggunakan definisi probabilitas bersyarat diperoleh persamaan

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A \mid B)P(B) \\ &= P(B \mid A)P(A). \end{aligned}$$

Dari definisi probabilitas bersyarat, akan dikembangkan teorema probabilitas total.

Teorema 2.2.1 :

Probabilitas Total. Diberikan suatu ruang probabilitas $\{\Omega, \mathscr{A}, P\}$. Jika $A_1, A_2, \ldots, A_n$ merupakan suatu koleksi himpunan peristiwa saling asing di dalam $\mathscr{A}$ yang memenuhi $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ dan $P(A_i) > 0$ untuk $i = 1, 2, \ldots, n$, maka untuk setiap $B \in \mathscr{A}$ dimana $P(B) > 0$ berlaku

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i).$$

Bukti :

Sebagaimana diketahui bahwa untuk $B \in \mathcal{A}$

$$B = \Omega \cap B = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B).$$

Dan karena $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$ sehingga

$$(A_i \cap B) \cap (A_j \cap B) = (A_i \cap A_j \cap B) = \emptyset \cap B = \emptyset$$

maka masing-masing peristiwa $(A_i \cap B)$ adalah saling asing. Dari sini

$$P(B) = P\left[\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B)$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i).$$ ■

Contoh 2.2.2 :

Terdapat lima buah kotak yang diberi nomor 1, 2, 3, 4 dan 5. Tiap kotak berisi 10 buah bola. Kotak ke i memuat i buah bola rusak dan (10-i) buah bola yang tidak rusak, i = 1, ..., 5. Sebagai contoh, kotak ke 2 memuat 2 bola rusak dan 8 bola tidak rusak. Memandang eksperimen acak berikut :

Pertama sebuah kotak akan dipilih secara acak, kemudian dari kotak tersebut akan diambil sebuah bola secara acak.

Dari eksperimen di atas, akan dicari probabilitas bahwa bola rusaklah yang terambil.

Diambil

A = peristiwa sebuah bola rusak diambil, dan

B_i = peristiwa kotak ke i terpilih, i = 1, ..., 5

maka

$$P(B_i) = \frac{1}{5}, \quad i = 1, \ldots, 5$$

$$P(A|B_i) = \frac{i}{10}, \quad i = 1, \ldots, 5$$

dan

$$P(A) = \sum_{i=1}^{5} P(A|B_i)P(B_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{5} \frac{i}{10} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{50} \sum_{i=1}^{5} i = \frac{15}{50} = \frac{3}{10}.$$

Dengan menggunakan definisi probabilitas bersyarat dan teorema probabilitas total di atas, akan dibuktikan teorema Aturan Bayes.

Teorema 2.2.2 :

Aturan Bayes. Diberikan suatu ruang probabilitas $\{\Omega, \mathscr{A}, P\}$. Jika A_1, A_2, ..., A_n merupakan suatu koleksi himpunan peristiwa saling asing dalam $\mathscr{A}$ yang memenuhi $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ dan $P(A_i) > 0$ untuk i = 1, 2,

..., n , maka untuk sebarang peristiwa $B \in \mathscr{A}$ dimana $P(B) > 0$

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)}$$

Bukti :

Karena

$$P(A_k \cap B) = P(B|A_k)P(A_k)$$

dan

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)$$

maka

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_k \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)} . \qquad \blacksquare$$

Contoh 2.2.3 :

Pandang eksperimen pada contoh 2.2.2. Jika bola telah diambil, dan diketahui bahwa bola tersebut rusak, akan dicari probabilitas bahwa bola tersebut diambil dari kotak dengan nomor 5 ($P(B_5|A)$) dengan menggunakan teorema Aturan

Bayes.

$$P(B_5|A) = \frac{P(A|B_5)P(B_5)}{\sum_{i=1}^{5} P(A|B_i)P(B_i)}$$

$$= \frac{{}^5/_{10} \cdot {}^1/_5}{{}^3/_{10}} = \frac{{}^1/_{10}}{{}^3/_{10}} = \frac{1}{3}.$$

Jika $P(A|B)$ tidak bergantung pada peristiwa B, yaitu jika $P(A|B) = P(A)$, maka dapat dikatakan bahwa peristiwa A independen terhadap peristiwa B.

Definisi 2.2.2 :

Peristiwa Independensi. Diambil A dan B, dua peristiwa di dalam $\mathscr{A}$ pada suatu ruang probabilitas yang diberikan $\{\Omega, \mathscr{A}, P\}$. Peristiwa A dan B dikatakan Independen jika dan hanya jika

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Dari definisi di atas, jika A dan B dua peristiwa yang saling independen, maka probabilitas bersyarat

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$$

jika $P(B) > 0$.

Contoh 2.2.4 :

Dalam suatu permainan kartu, diambil sebuah kartu secara acak, dimana setiap kartu memiliki probabilitas yang sama untuk diambil. Probabilitas bahwa kartu yang terambil merupakan kartu King adalah

$$P(K) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

dan probabilitas bahwa kartu yang terambil merupakan kartu Heart adalah

$$P(H) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}.$$

Maka

$$\begin{aligned} P(H \cap K) &= P(H) + P(K) - P(H \cup K) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{13} - \frac{16}{52} \\ &= \frac{1}{52} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{13} = P(H)P(K). \end{aligned}$$

Jika diketahui kartu yang diambil adalah kartu King, probabilitas bahwa kartu tersebut merupakan kartu Heart :

$$P(H|K) = \frac{P(H \cap K)}{P(K)} = \frac{1/52}{1/13} = \frac{1}{4} = P(H).$$

2.3 EKSPEKTASI BERSYARAT

Diambil suatu variabel acak X di dalam ruang probabilitas yang diberikan $\{\Omega, \mathscr{A}, P\}$. Akan didefinisikan ekspektasi dari X.

Definisi 2.3.1 :

Ekspektasi. Diambil X suatu variabel acak diskrit dengan harga-harga x_1, x_2, x_3, ... Ekspektasi (atau mean) dari X didefinisikan sebagai

$$E(X) = \sum_{i=1} x_i P(X = x_i)$$

Contoh 2.3.1 :

Dalam suatu eksperimen pelantunan dua buah dadu seimbang, diambil X dan Y dua variabel acak di dalam ruang sampel yang sama, Ω. X didefinisikan sebagai jumlah total mata dadu yang tampak, dan Y adalah selisih dari keduanya. Maka harga-harga dan fungsi probabilitasnya diberikan sebagai berikut :

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P_X	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

dan

Y	0	1	2	3	4	5
P_Y	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

,

maka

$$E(X) = \sum_{i=1}^{11} x_i P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{12} iP(X = i) = \frac{252}{36} = 7$$

$$E(Y) = \sum_{j=1}^{6} y_j P(Y = y_j) = \sum_{j=0}^{5} jP(Y = j) = \frac{70}{36} = \frac{35}{18}$$

Jika diambil X dan Y, dua variabel acak pada ruang sampel yang sama ,Ω

Definisi 2.3.2 :

Ekspektasi Bersyarat. Diambil X suatu variabel acak diskrit dengan harga-harga x_1, x_2, x_3, ... , dan pada ruang sampel yang sama, Ω diambil suatu variabel acak lain Y. Jika diberikan Y = y_j maka Ekspektasi Bersyarat dari X jika diberikan Y = y_j didefinisikan sebagai

$$E(X|y_j) = \sum_{i=1} x_i P(X = x_i | Y = y_j)$$

Contoh 2.3.2 :

Sebuah kotak berisi empat buah bola dan diberi nomor 1, 2, 3 dan 4. Dua diantaranya akan diambil. Dengan demikian di dalam ruang sampel Ω, terdapat $\binom{4}{2} = 6$ kombinasi pasangan angka, dan jika peristiwa $A \in \mathscr{A}$, maka $P(A) = \dfrac{n(A)}{6}$.

Diambil X dan Y dua variabel acak di dalam Ω, dimana X merupakan jumlah total dari nomor yang terambil, dan Y adalah nomor terbesar dari pasangan angka tersebut.

Diperoleh harga-harga dari masing-masing variabel acak dan probabilitas gabungannya sebagai berikut :

Y \ X	3	4	5	6	7	P_Y
2	$\frac{1}{6}$	0	0	0	0	$\frac{1}{6}$
3	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	0	$\frac{1}{3}$
4	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
P_X	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1 .

Akan dicari $P(X|Y=4)$ dan $E(X|Y=4)$.

$$P(x_i|y_j) = \frac{P(x_i, y_j)}{P(y_j)}$$

$$P(x_i|Y=4) = \frac{P(x_i, Y=4)}{P(Y=4)} = \frac{P(x_i, 4)}{1/2}$$

diperoleh

$$P(X|Y=4) = \left\{(3,0),(4,0),(5,\tfrac{1}{3}),(6,\tfrac{1}{3}),(7,\tfrac{1}{3})\right\}$$

dan

$$E(X|Y=4) = \sum_{i=1}^{5} x_i P(x_i|Y=4)$$

$$= 3.0 + 4.0 + 5.\tfrac{1}{3} + 6.\tfrac{1}{3} + 7.\tfrac{1}{3}$$

$$= \frac{18}{3} = 6.$$

2.4 LOGARITMA DAN PROBABILITAS

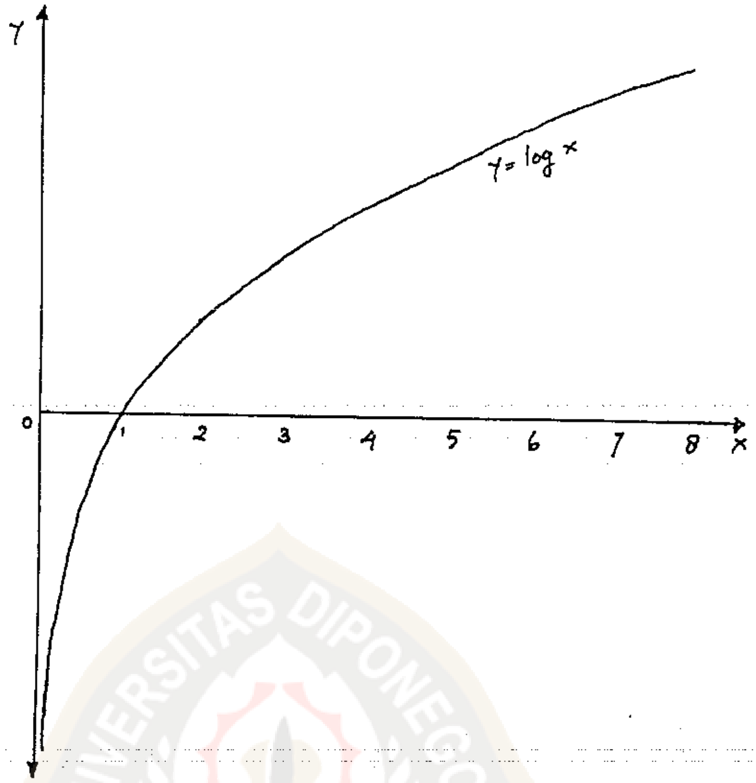
Logaritma merupakan invers dari perpangkatan, yaitu mencari pangkat dari suatu bilangan pokok sehingga hasilnya sesuai dengan yang telah diketahui.

Definisi 2.4.1 :

$$\log_a x = y \iff x = a^y$$

a disebut bilangan pokok atau basis logaritma, dengan ketentuan $a > 0$ dan $a \neq 1$. x disebut numerus, atau bilangan yang dicari logaritmanya dengan ketentuan $x > 0$. y merupakan hasil dari logaritma, dimana nilainya bisa positif, nol atau negatif.

Jika diambil $x \geq 1$ berapapun bilangan pokoknya, maka hasil dari logaritma $y \geq 0$ dan fungsi yang diperoleh merupakan fungsi naik.



Gbr. 2.4.1 Contoh grafik hasil logaritma $y = \log_2 x$

Sebagaimana telah diketahui bahwa probabilitas dari suatu peristiwa p berada pada interval $0 \leq p \leq 1$, hasil logaritma dari suatu probabilitas mempunyai nilai negatif. Jadi untuk $0 \leq x \leq 1$ maka $y \leq 0$ (gbr. 2.4.1).

Contoh 2.4.1 :

Hasil logaritma dengan bilangan pokok 2 dari $p = \frac{1}{4}$

$$y = \log_2 \frac{1}{4} = -\log_2 4 = -\log_2 2^2 = -2$$

Dari gambar 2.4.1 terlihat bahwa untuk $0 \leq p < q \leq 1$ diperoleh

$$\log p < \log q.$$

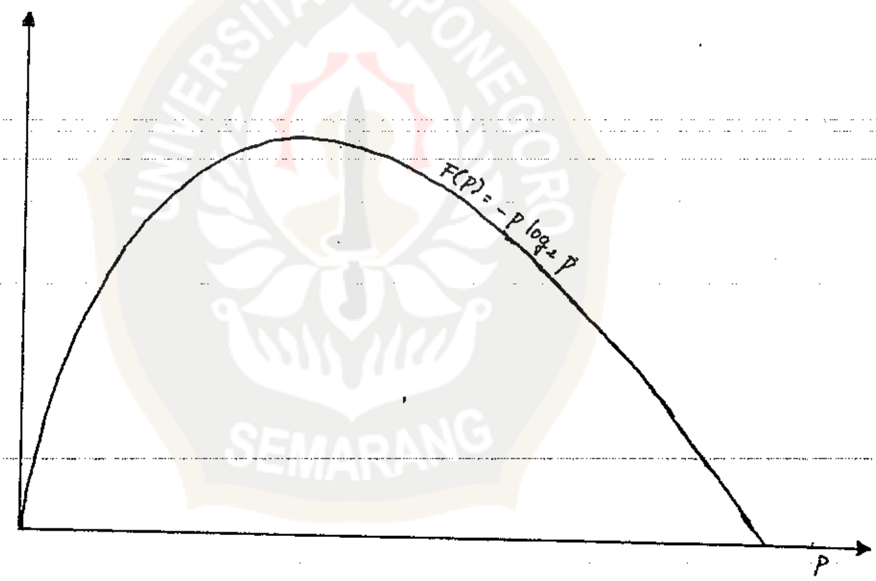
Sehingga jika diberikan fungsi $f(p) = -\log p$ dan $0 \le p < q \le 1$ maka

$$f(p) > f(q) \qquad \ldots\ldots\ 2.4.1$$

Diberikan suatu fungsi

$$F(p) = pf(p) = -p \log_2 p \qquad \ldots\ldots\ 2.4.2$$

dengan $0 \le p \le 1$. Dari tabel $-p \log_2 p$ yang akan diberikan pada akhir penulisan buku ini, diperoleh grafik sebagai berikut



Gbr. 2.4.2 Grafik dari fungsi $F(p) = -p \log_2 p$

Teorema 2.4.1 :

Diberikan suatu fungsi $F(p) = -p \log p$, $0 \le p \le 1$. Maka untuk sebarang p_1, p_2 dengan $p_1+p_2 \le 1$ berlaku

$$F(p_1+p_2) < F(p_1) + F(p_2)$$

Bukti :

Menggunakan persamaan *(2.4.2)*

$$F(p_1+p_2) = (p_1+p_2)f(p_1+p_2)$$

$$= p_1f(p_1+p_2) + p_2f(p_1+p_2).$$

Karena $p_1 < p_1+p_2$ dan $p_2 < p_1+p_2$ maka dengan menggunakan pertidaksamaan *(2.4.1)* diperoleh

$$f(p_1) > f(p_1+p_2) \qquad f(p_2) > f(p_1+p_2)$$

sehingga

$$F(p_1+p_2) = p_1f(p_1+p_2) + p_2f(p_1+p_2)$$

$$< p_1f(p_1) + p_2f(p_2) = F(p_1) + F(p_2). \blacksquare$$

Diambil suatu fungsi H(p,1-p) yang merupakan gabungan dua fungsi F(p) dan F(1-p), yaitu

$$H(p,1-p) = F(p) + F(1-p)$$

$$= -p \log p - (1-p)\log(1-p)$$

dimana $0 \le p \le 1$. Pada p = 0, fungsi H(0,1) diperoleh dengan cara

$$H(0,1) = -0 \log 0 -1 \log 1$$

Berapapun bilangan pokoknya, log 1 = 0, sehingga

$$H(0,1) = -0 \log 0 + 0 = -0 \log 0$$

Karena log 0 tak terdefinisikan, akan dicari nilai dari -0 log 0 dengan menggunakan limit.

$$\lim_{x \to 0} -x \log x = \lim_{x \to 0} \frac{\log x}{-1/x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{{}^1/_x}{{}^1/_{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \cdot x^2$$

$$= \lim_{x \to 0} x = 0$$

Jadi $H(0,1) = 0$. Dengan cara yang sama dapat diperoleh $H(1,0) = 0$. Titik stasionernya didapat dengan memisalkan suatu fungsi

$$H(x,1-x) = -x \log x -(1-x) \log (1-x) = \varphi(x)$$

dengan $0 \le x \le 1$. Untuk memperoleh nilai stasioner dari $\varphi(x)$, akan dicari $\varphi'(x) = 0$

$$\varphi'(x) = -x \cdot \frac{1}{x} - \log x -(1-x) \cdot \frac{-1}{(1-x)} -(-1)\log (1-x)$$

$$= -1 - \log x + 1 + \log (1-x)$$

$$= \log \frac{(1-x)}{x} .$$

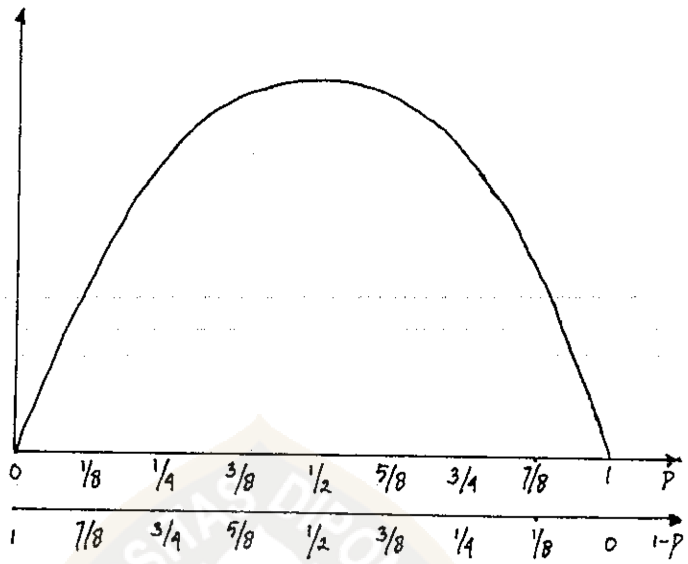
$$\varphi'(x) = \log \frac{(1-x)}{x} = 0$$

$$\frac{(1-x)}{x} = 1$$

$$1 - x = x$$

$$x = \frac{1}{2} .$$

Dari sini akan diperoleh grafik simetris yang menyerupai parabola dengan interval [0,1] dan maksimumnya pada $p = 1 - p = \frac{1}{2}$.



Gbr. 2.4.3 Grafik dari $H(p,1-p)$ sebagai fungsi dari p

Simetrisnya kira-kira terletak pada titik $p = \frac{1}{2}$, dan grafik ini naik dari $p = 0$ hingga $p = \frac{1}{2}$.

Jika terdapat suatu fungsi yang merupakan gabungan dari beberapa fungsi F, akan diberikan teorema mengenai fungsi tersebut, yang nantinya akan sangat berguna bagi pembuktian teorema lain dalam bab berikutnya.

Teorema 2.4.2 :

Pertidaksamaan Berguna. Bila a_i dan b_i merupakan n bilangan positif sedemikian hingga

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1 \qquad b_1 + b_2 + \ldots + b_n \leq 1$$

maka

$$-\sum_{i=1}^{n} a_i \log a_i \leq -\sum_{i=1}^{n} a_i \log b_i \qquad \ldots\ldots 2.4.3$$

dengan persamaannya jika $a_i = b_i$.

Bukti :

Diambil suatu fungsi $f(x) = e^x$ dan dideretkan dengan menggunakan deret Maclaurin. Diperoleh

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

$$e^x \geq 1 + x.$$

Dari pertidaksamaan $e^x \geq 1 + x$, dan mengambil $y = e^x$

$$y \geq 1 + \ln y$$

$$\ln y \leq y - 1.$$

Mensubstitusikan $y = \frac{b_i}{a_i}$ pada pertidaksamaan terakhir, menghasilkan

$$\ln \frac{b_i}{a_i} \leq \frac{b_i}{a_i} - 1$$

$$\ln b_i - \ln a_i \leq \frac{b_i}{a_i} - 1. \qquad \ldots\ldots 2.4.4$$

Bila pertidaksamaan *(2.4.4)* dikalikan dengan a_i, dan menjumlahkannya untuk seluruh i

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\ln b_i - \ln a_i) \leq \sum_{i=1}^{n} a_i\left(\frac{b_i}{a_i} - 1\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \ln b_i - \sum_{i=1}^{n} a_i \ln a_i \leq \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \leq 0$$

$$-\sum_{i=1}^{n} a_i \ln a_i \leq -\sum_{i=1}^{n} a_i \ln b_i.$$

Dengan demikian berlaku

$$-\sum_{i=1}^{n} a_i \log a_i \leq -\sum_{i=1}^{n} a_i \log b_i. \qquad \blacksquare$$