BAB III

MODEL AUTOREGRESI ORDER SATU SISTEM KONTINU, A(1)

3.1. PERSAMAAN DIFFERENSIAL MODEL AUTOREGRESI ORDER SATU

Suatu sistem persamaan differensial sederhana yang dibentuk dari persamaan differensial dengan koefisien konstan merupakan sistem order satu. Bila koefisien konstan dinyatakan dengan α_o maka persamaan differensial order satu dapat dinyatakan sebagai berikut,

$$\frac{d\ X(t)}{dt} = -\ \alpha_o\ X(t) \qquad (3.1)$$

Persamaan tersebut dapat diartikan sebagai pernyataan bahwa kecepatan dari $X(t)$ adalah seimbang terhadap $X(t)$ dan berlawanan pada tandanya. Bentuk $-\alpha_o X(t)$ bertindak sebagai suatu tarikan sistem kembali ke posisi keseimbangan.

Dalam runtun waktu, respon sistem $X(t)$ merupakan nilai perubahan pada saat t dan koefisien konstan α_o merupakan konstanta keseimbangan.

Persamaan (3.1) dapat dinyatakan ke dalam bentuk

$$\frac{d\ X(t)}{dt} + \alpha_o\ X(t) = 0 \qquad (3.1a)$$

yang merupakan persamaan differensial homogen order satu. Penyelesaian persamaan differensial linier order n mempunyai bentuk jumlahan n eksponensial, sehingga penyelesaian persamaan (3.1a) mempunyai bentuk :

$$Ce^{\mu t}$$

Selanjutnya untuk memperoleh harga μ kita substitusikan fungsi tersebut dalam persamaan (3.1a).

$$\frac{d\,X(t)}{dt} + \alpha_o X(t) = 0$$

$$\frac{d\,(Ce^{\mu t})}{dt} + \alpha_o\, Ce^{\mu t} = 0$$

$$\mu\, Ce^{\mu t} + \alpha_o\, Ce^{\mu t} = 0$$

$$(\mu + \alpha_o)\, Ce^{\mu t} = 0$$

Diperoleh persamaan karakteristik

$$\mu + \alpha_o = 0$$

dengan akar karakteristiknya adalah $\mu = -\alpha_o$

Selanjutnya, penyelesaian persamaan (3.1) berbentuk

$$X(t) = Ce^{-\alpha_o t} \qquad (3.2)$$

Konstanta C dapat ditentukan nilainya dari pengertian "kondisi-kondisi awal" dari sistem. Sebagai contoh, jika

$$X(0) = C_o$$

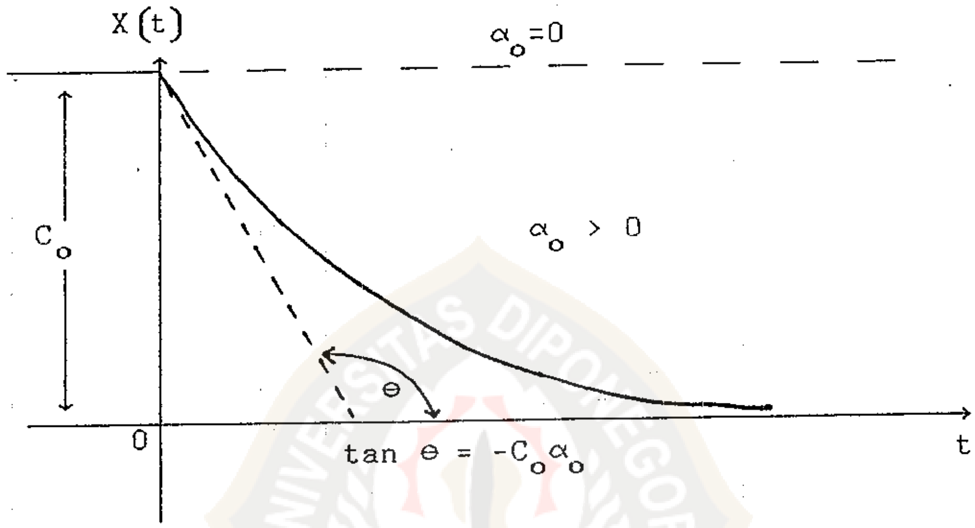
maka mengikuti persamaan (3.2) $C = C_o$

dan solusi/penyelesaian dapat ditulis

$$X(t) = C_o e^{-\alpha_o t} \qquad (3.2a)$$

Kurva jawaban persamaan (3.2a) diperlihatkan dalam gambar (3.1) untuk harga-harga α_o yang non negatif. $-C_o\alpha_o$ mewakili kemiringan kurva pada permulaan, untuk membayangkan bagaimana cepatnya jawaban turun mendekati nol dari kondisi awal C_o. Makin besar harga α_o, lebih cepat jawaban turun mendekati nol. Untuk harga α_o sangat besar, jawabannya nol dimanapun kecuali pada permulaan.

Bila harga α_o makin kecil, jawaban lebih lambat mendekati nol. Untuk harga α_o sangat kecil mendekati nol, jawaban mendekati garis lurus horisontal.



Gambar 3.1. Respons sistem order satu, $\alpha_o \geq 0$

Persamaan (3.2a) yang mewakili penyelesaian persamaan differensial order satu, dapat ditulis dalam bentuk.

$$X(t) = C_o\, e^{-t/\tau} \qquad (3.2b)$$

dengan $\tau = 1/\alpha_o$ yang disebut konstanta waktu karena mempunyai dimensi waktu, yang dapat dilihat sebagai berikut = $\frac{dX}{dt}$ dan $\alpha_o X$

dalam persamaan (3.1) mempunyai dimensi sama, selanjutnya α_o mempunyai dimensi yang sama seperti

$$\frac{1}{X(t)} \cdot \frac{dX(t)}{dt}, \text{ yaitu } \frac{1}{\text{waktu}}$$

Dari sini $\tau = 1/\alpha_o$ mempunyai dimensi waktu.

Persamaan (3.2b) dapat juga dinyatakan sebagai

$$\frac{X(t)}{C_o} = e^{-t/\tau} \qquad (3.2c)$$

Grafik antara t/τ dan $X(t)/C_o$ diperlihatkan dalam gambar 3.1.

Kita dapat melihat dari persamaan (3.2b) dan (3.2c) atau gambar 3.1 bahwa bila $t = \tau$, jawaban mencapai

$$X(\tau) = C_o e^{-1} = 0{,}368\ C_o$$

atau

$$\frac{X(\tau)}{C_o} = 0{,}368$$

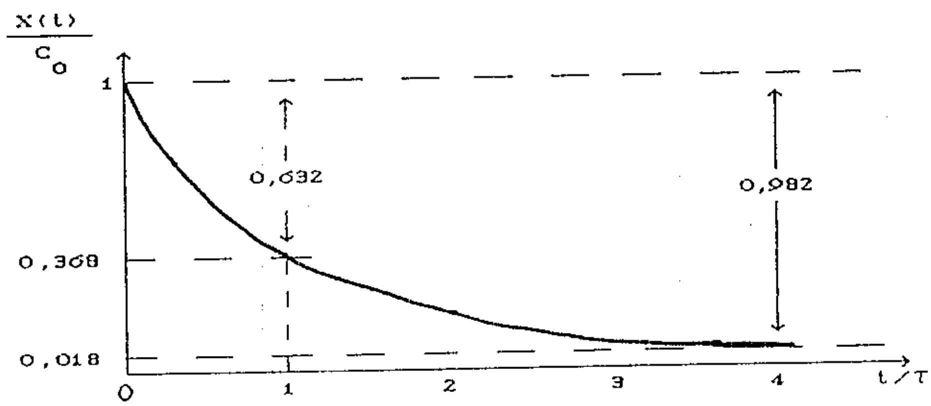
dari harga awalnya ; bila $t = 4\tau$ jawaban mencapai

$$X(4\tau) = C_o e^{-4} = 0{,}018\ C_o$$

atau

$$\frac{X(4\tau)}{C_o} = 0{,}018$$

dari harga awalnya.



Gambar 3.2. Karakteristik respons sistem order satu dengan konstanta waktu $\tau = 1/\alpha_o$

Bila harga waktu mencapai satu satuan konstanta waktu, jawaban turun 63,2% (100 - 6,8), saat harga waktu mengambil empat satuan konstanta waktu jawaban turun 98,2% dari harga awalnya dan hampir sampai ke posisi equilibriumnya. Untuk itu, suatu perkiraan waktu yang layak yang dibutuhkan sistem untuk menjawab adalah empat satuan konstanta waktu. Sifat-sifat konstanta waktu ini, sangat berguna dalam memperkirakan waktu jawaban dari sistem order satu.

Kestabilan dapat dilihat dari harga α_o. Untuk α_o positif, sistem secara asimptotik kembali ke posisi equilibriumnya, seberapa cepat atau lambatnya tergantung harga α_o.

Bila $\alpha_o > 0$, sistem dikatakan stabil asimptotik. Bila $\alpha_o = 0$ sistem tidak kembali ke posisi equilibrum pada semua t dan sistem tidak stabil asimptotik. Sistem berada pada jarak terbatas dari posisi equilibrium. Bila $\alpha_o \geq 0$, sistem dikatakan stabil, suatu sistem yang stabil asipmtotik selalu stabil tapi tidak sebaliknya.

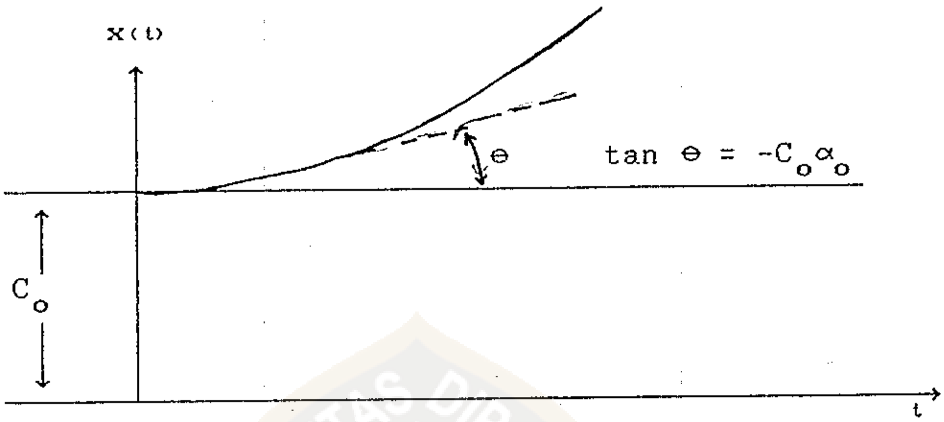
Bila $\alpha_o < 0$, jawaban cenderung ke infinit dengan waktu yang bertambah, seperti terlihat pada gambar 3 untuk harga t agak besar, jawaban sistem mengalami lompatan sangat besar. Dalam kondisi $\alpha_o < 0$, sistem dikatakan tidak stabil.

Jadi, kondisi kestabilan sistem order satu dapat diringkas sebagai berikut

$$\alpha_o > 0 \quad \text{stabil asimptotik} \tag{3.3a}$$

$\alpha_o \geq 0$ stabil (3.3b)

$\alpha_o < 0$ tidak stabil (3.3c)



Gambar 3.3. Respons sistem order satu, $\alpha_o < 0$

Analisa kestabilan yang diberikan diatas, untuk sistem order satu. Untuk sistem order satu akar karakteristiknya yang terjadi sebagai koefisien pada persamaan differensial selalu riil.

3.2. FUNGSI DELTA DIRAC

Sifat a_t untuk fungsi yang kontinu didasarkan pada model diskrit

$$E(a_t a_{t-1}) = \sigma_a^2 \delta_k$$

Untuk model yang kontinu, maka analog dengan a_t yang diskrit, diberi notasi dengan $Z(t)$, didefinisikan dengan sifat-sifat

$$E\left[Z(t)Z(t-u)\right] = \sigma_Z^2 \delta(u)$$

$\delta(u)$ disebut fungsi Delta Dirac dan didefinisikan oleh :

$$\delta(u) = \infty \quad , u = 0$$

$$= 0 \quad , u \neq 0$$

$$\int_{-\tau}^{\tau} \delta(u)\, du = 1 \qquad , \text{ untuk sembarang } \tau$$

Sifat dari fungsi delta Dirac yang digunakan dalam bab ini adalah : untuk setiap fungsi kontinu $f(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)\delta(u)du = f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\delta(t-u)du$$

Bukti :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)\delta(u)du = \int_{-\infty}^{0} f(t-u)\delta(u)du + \int_{0^-}^{0^+} f(t-u)\delta(u)du +$$

$$\int_{0^-}^{\infty} f(t-u)\delta(u)du$$

Karena fungsi delta adalah nol di setiap tempat kecuali pada u = 0, hasil setiap fungsi $f(t-u)$ juga nol kecuali u = 0 yaitu

$$\int_{\infty}^{\infty} f(t-u)\delta(u)du = 0 + \int_{0^-}^{0^+} f(t-0)\delta(u)du + 0$$

$$= f(t) \int_{0^-}^{0^+} \delta(u)du$$

$$= f(t)$$

Dengan mengganti $t-u = v$ diperoleh

$$\int_{\infty}^{\infty} f(t-u)\delta(u)du = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-v)du$$

$$= f(t)$$

Untuk merumuskan sistem autoregresi order satu sistem kontinu, kita mulai dengan suatu persamaan differensial homogen.

$$\frac{dX(t)}{dt} + \alpha_o X(t) = 0$$

yaitu

$$(D + \alpha_o)X(t) = 0$$

dengan

$$D^n \equiv \frac{d^n}{dt^n}$$

dan mengubahnya ke dalam suatu persamaan diferensial non homogen dengan memasukkan suatu fungsi forcing $Z(t)$ dengan $E\,[\,Z(t)\;Z(t-u)\,] = \sigma_z^2\;\delta(u)$ menjadi

$$(D + \alpha_o)X(t) = Z(t)$$

$$E\,[Z(t)] = 0$$

$$E\,[Z(t)Z(t-u)] = \sigma_z^2\delta(u) \tag{3.4}$$

Persamaan (3.4) mewakili suatu sistem autoregresi order satu sistem kontinu, dan untuk menghindari kata kontinu setiap waktu ditandai dengan A(1) untuk sistem autoregresif order satu sistem kontinu.

Input $Z(t)$ adalah proses sistem kontinu yang mempunyai mean nol dan tidak saling berhubungan pada waktu yang berbeda. Output $X(t)$ juga suatu proses yang tetap dengan mean nol karena operatornya linear.

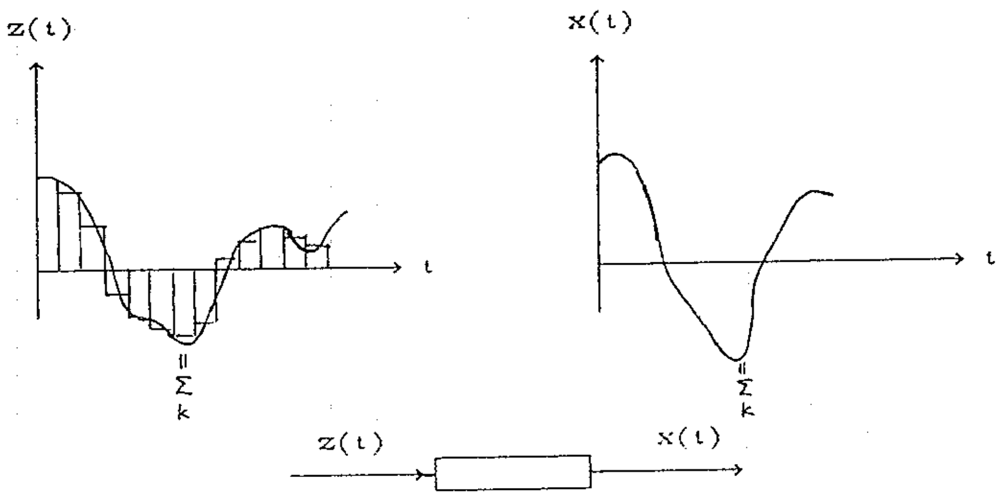
Untuk memperoleh penyelesaian dari persamaan (3.4) dan untuk menyatakan hubungan antara output $X(t)$ dan input $Z(t)$ kita akan membalikkan operator diferensial pada persamaan tersebut,

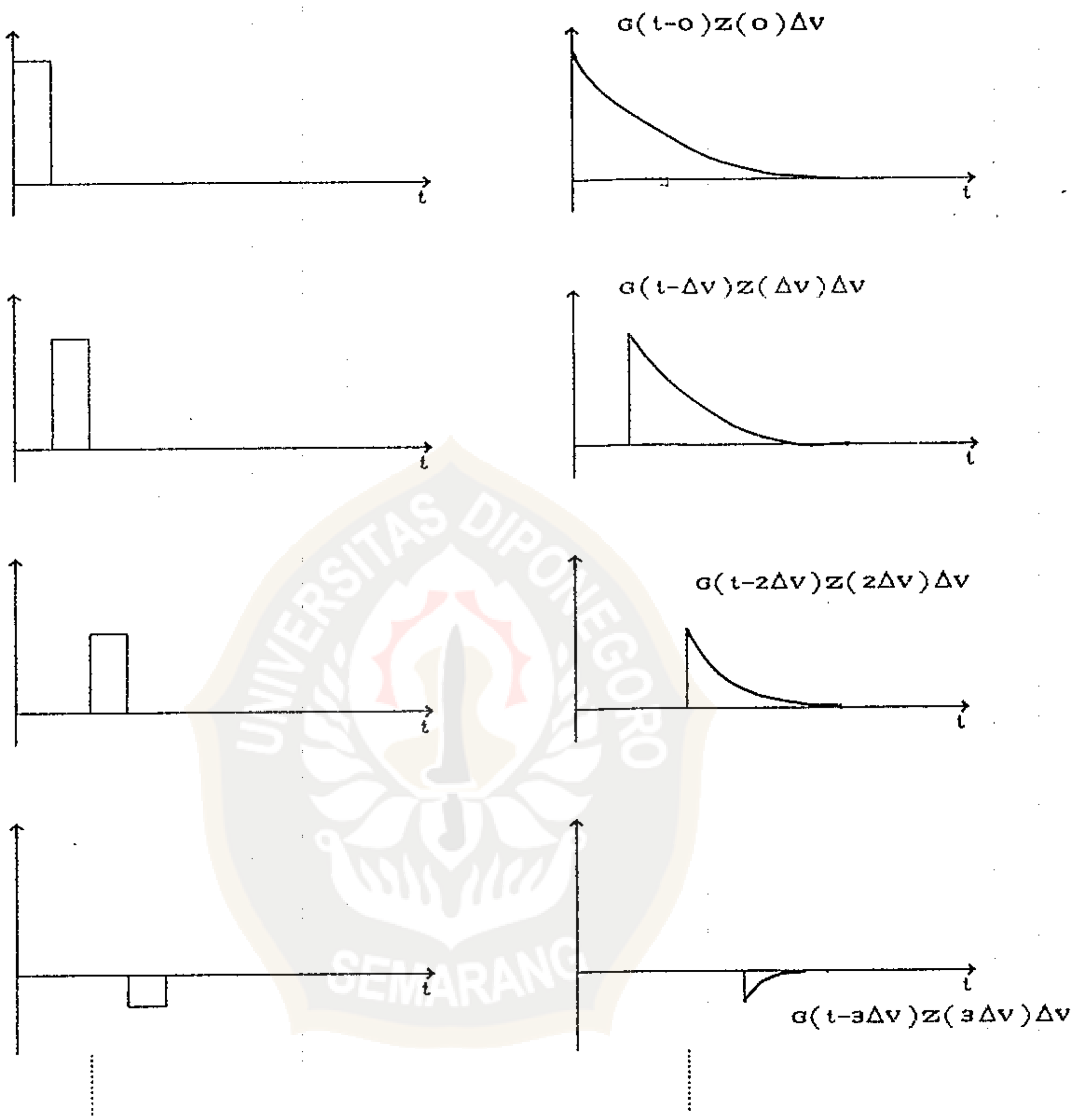
$$X(t) = (D + \alpha_o)^{-1}Z(t)$$

Karena inversi dari operator difference diberikan dengan suatu jumlahan, yang dinyatakan sebagai suatu konvolusi dari input atau fungsi forcing a_t dengan fungsi Green pada sistem diskrit, inversi dari operator differensial diberikan dengan integrasi, yang dinyatakan sebagai konvolusi dari input $Z(t)$ dengan fungsi Green pada sistem kontinu yang ditandai dengan $G(v)$. Mengacu pada persamaan $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} G_j a_{t-j}$ pada sistem diskrit kita peroleh

$$X(t) = \int_0^{\infty} G(v)Z(t-v)dv = \int_{-\infty}^{t} G(t-v)Z(v)dv \qquad (3.5)$$

pada sistem kontinu. Persamaan (3.5) adalah dekomposisi ortogonal dari runtun waktu $X(t)$ karena $Z(t)$nya tidak berhubungan atau independen pada t yang berbeda. Dekomposisi ini akan menghasilkan karakteristik dari A(1). Gambar (3.4) menggambarkan secara grafik konvolusi dari input $Z(t)$ dengan fungsi Green $G(v)$ pada sistem kontinu.





$$x(t) = \sum_{k} \sigma(t-k\Delta v)z(k\Delta v)$$

untuk $\Delta v \longrightarrow o$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t-v)z(v)dv$$

Gambar 3.4. Konvolusi input $Z(t)$ dengan Fungsi Green

3.3. DEKOMPOSISI ORTOGONAL

Sifat dasar ortogonal dalam dekomposisi fungsi dapat menggunakan delta Dirac $\delta(u)$.

Persamaan

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)\delta(u)du = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\delta(t-u)du$$

adalah dekomposisi ortogonal pada dirinya sendiri, dengan t kontinu. $\delta(u)$, $-\infty < u < \infty$ adalah ortogonal karena $\delta(u)$ independen dalam arti bahwa tidak ada $\delta(u)$ yang dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari $\delta(v)$, $v \neq u$, baik dalam bentuk jumlahan atau integral.

$\delta(u)$ atau disebut juga unit impulse dapat didekatkan dengan suatu unit pulse. Fungsi $f(t)$ dapat didekatkan dalam suatu interval terbatas $-T \leq t < T$ dengan suatu bilangan terbatas dari unit pulse lebar Δu, $P_{\Delta u}(t)$, terjadi pada $t = k\ \Delta u$ ($k = \pm$, ± 1, ± 2, ... , $\pm N = T/\Delta u$). Pendekatan ini bisa dinyatakan dengan

$$f(t) = \sum_{k=-N}^{N} f(k\ \Delta u)\ p_{\Delta u}(t-k\ \Delta u)\Delta u$$

Untuk $N \longrightarrow \infty$ dan $\Delta u \longrightarrow 0$, pulse menjadi impulse, jumlahan di atas menjadi integral, dan akhirnya dengan $T \longrightarrow \infty$ kita memperoleh persamaan.

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\ \delta(t-u)\ du$$

Karena X_t adalah jawaban/output dalam sistem diskrit, maka dapat untuk memisah-misahkannya dalam fungsi rendom dasar a_t yang mempunyai impulse diskrit δ_k dari σ_a^2 sebagai fungsi korelasinya. Karena itu, juga dapat untuk memisah-misahkan $X(t)$, jawaban dari sistem kontinu, dalam fungsi random dasar $Z(t)$, yang mempunyai impulse kontinu $\delta(u)$ dari σ_z^2 sebagai fungsi korelasinya.

Suatu perbedaan penting antara σ_a^2 dan σ_z^2 adalah σ_a^2 adalah varian dari a_t, karena

$$E(a_t a_{t-k}) = \delta_k \sigma_a^2 \Rightarrow E(a_t^2) = \sigma_a^2$$

Tetapi, σ_z^2 bukan varian dari $Z(t)$ karena

$$E\left[Z(t)Z(t-u)\right] = \delta(u)\sigma_z^2 \Longrightarrow E\left[Z(t)\right]^2 = \delta(0)\sigma_z^2 = \infty$$

Karenanya di bawah ini diberikan grafik untuk menjelaskan pendekatan fungsi $f(t)$ dalam Interval $-T \leq t < T$.

Demikianlah, varian dari $Z(t)$ adalah infinit (tak terbatas), yang merupakan terjemahan secara matematik dari kenyataan fisika, bahwa white noise tidak ada. Tetapi, integral dari white noise di atas interval terbatas, katakan Δ, ada, dan pada kenyataannya, mempunyai varian $\Delta\sigma_z^2$ karenanya dapat diperlihatkan bahwa :

$$E\left[\int_{t-\Delta}^{t} Z(t)\, dt\right]^2 = \Delta\sigma_z^2$$

Hal ini diperoleh dari, bila respon $X(t)$ mengambil $\alpha_0 \longrightarrow 0$, sehingga

$$\frac{d\,X(t)}{dt} + \alpha_0 X(t) = Z(t)$$

menjadi :

$$\frac{d\,X(t)}{dt} = Z(t)$$

$$X(t) = \int_{-\infty}^{t} Z(v)\ dv$$

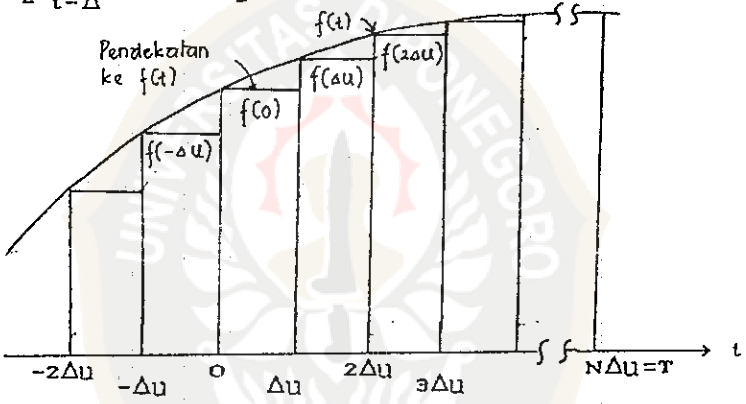
$$= \int_{t-\Delta}^{t} Z(v)\ dv + \int_{t-2\Delta}^{t-\Delta} Z(v)\ dv + \int_{t-3\Delta}^{t-2\Delta} Z(v)\ dv$$

analog dengan

$$X_t = a_t + a_{t-1} + a_{t-2} + \ldots$$

Maka varian dari $Z(t)$ menjadi

$$E\left[\int_{t-\Delta}^{t} Z(v)\ dv\right]^2 = \sigma_z^2(t-(t-\Delta)) = \Delta\sigma_z^2$$



Gambar 3.5. Pendekatan suatu fungsi dengan unit pulse

3.4. Fungsi Green Model A(1)

Pembahasan di sini adalah untuk memperoleh fungsi Green dari operator differensial dalam persamaan (3.4). Seperti pada kasus diskrit, fungsi Green $G(v)$ adalah independen dari output atau input. $G(v)$ didefinisikan untuk suatu sistem order satu dengan relasi yang equivalen.

$$(D + \alpha_0)\ X(t) = h(t) \tag{3.6a}$$

$$X(t) = (D + \alpha_0)^{-1} h(t)$$

$$= \int_{0}^{\infty} G(v)h(t-v)dv \qquad (3.6b)$$

untuk fungsi forcing sistem kontinu $h(v)$.

Untuk mengetahui apakah input atau fungsi forcing $h(t)$ dalam persamaan (3.6a) akan memberikan fungsi Green $G(t)$ sebagai output, maka dibutuhkan fungsi $h(t)$ yang memberikan :

$$G(t) = \int_{0}^{\infty} G(v)h(t-v)dv$$

Karena batas integral persamaan di atas dari nol sampai takhingga, kita dapat mengambil

$$G(v) = 0, \quad v < 0$$

dan menulis integral diatas sebagai

$$G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(v)h(t-v)\, dv$$

Membandingkan dengan sifat

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\delta(t-u)\, du$$

dilihat bahwa jawabannya adalah dengan tepat fungsi delta

$$h(t) \equiv \delta(t)$$

dan mempunyai relasi equivalen yang berhubungan ke persamaan (3.6a) dan (3.6b)

$$(D + \alpha_o)G(t) = \delta(t) \qquad (3.7a)$$

$$G(t) = \int_{0}^{\infty} G(v)\delta(t-v)\, dv \qquad (3.7b)$$

Maka $G(v)$ adalah solusi persamaan differensial non homogen (3.7a).

Persamaan (3.7a) dapat diselesaikan dengan menempatkan kembali suatu persamaan differensial homogen dengan kondisi awal, yang diperoleh dari sifat fungsi delta. Untuk menentukan kondisi-kondisi awal, akan diamati apakah persamaan (3.7a) menyatakan tentang sifat kontinuitas fungsi $G(t)$. Pertama karena input $G(t)$ adalah nol sampai $t = 0$.

$$G(t) = 0, \qquad t<0$$

Pada $t = 0$, derivatif $G(t)$ memuat diskontinu yang sama seperti fungsi delta. Fungsi $G(t)$ yang merupakan integral dari derivatifnya, memuat diskontinuitas yang sama pada $t = 0$. Tinggi lompatan diskontinuitasnya adalah satu.

$$G(0) = 1$$

Maka persamaan (3.7a) equivalen ke persamaan homogen

$$(D + \alpha_o)G(t) = 0$$

dengan kondisi awal

$$G(0) = 1$$

sehingga akan didapat solusi, dengan $C_o = 1$, sebagai berikut

$$G(t) = e^{-\alpha_o t}, \qquad t \geq 0 \qquad (3.8)$$

$$= 0 \quad , \qquad t < 0$$

Dengan menggunakan fungsi Green dari sistem A(1), dapat ditulis persamaan (3.5) sebagai berikut

$$X(t) = \int_{o}^{\infty} e^{-\alpha_o v} Z(t-v)\, dv$$

$$= \int_{-\infty}^{t} e^{-\alpha_o (t-v)} Z(v)\, dv \qquad (3.9)$$

Persamaan ini mewakili suatu solusi dari persamaan differensial non homogen (3.4). Persamaan (3.4), (3.5) dan (3.9) untuk sistem kontinu A(1), masing-masing berhubungan dengan persamaan (2.6), (2.7) dan (2.8).

3.5. FUNGSI AUTOKOVARIAN MODEL A(1)

Dengan menggunakan persamaan (3.9) kemudian dengan sifat

$$E\,[\,Z(t)Z(t-s)\,] = \delta(s)\sigma_z^2$$

untuk mendapatkan fungsi kovarian sistem A(1) adalah sama dengan cara untuk mendapatkan γ_k untuk model AR(1) yang menggunakan persamaan

$$X_t = \sum_{j=o}^{\infty} G_j a_{t-j} = \sum_{j=-\infty}^{t} G_{t-j} a_j$$

dan sifat

$$E\left[a_t a_{t-k}\right] = \delta_k \sigma_a^2$$

Bila kovarian $X(t)$ pada lag s (suatu variabel kontinu) ditandai dengan $\gamma(s)$, maka

$$\gamma(s) = E\left[X(t)X(t-s)\right]$$

$$= E\left[\int_{o}^{\infty} G(v')Z(t-v')dv' \int_{o}^{\infty} G(v)\; z(t-s-v)dv\right]$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty G(v')G(v)E\left[Z(t-v') \;\; Z(t-s-v)\right]dv\; dv' \quad \ldots(3.9a)$$

$$= \sigma_Z^2 \int_0^\infty \left[\int_0^\infty G(v')G(v) \;\; \delta(v+s-v')dv'\right] dv$$

$$= \sigma_Z^2 \int_0^\infty G(v)G(v+s)dv \qquad \ldots(3.9b)$$

Pada tahap terakhir digunakan sifat fungsi delta Dirac yaitu persamaan

$$\int_{-\infty}^\infty f(t-u)\delta(u)du = f(t) = \int_{-\infty}^\infty f(u)\delta(t-u)du$$

Akan diperhatikan yang ada di dalam kurung yaitu

$$\left[\int_0^\infty G(v')G(v)\delta(v+s-v')dv'\right]$$

atau sama dengan

$$\left[\int_0^\infty G(v')\delta(v+s-v')dv'\right]G(v)$$

karena

$$\int_0^\infty G(v')\delta(v+s-v')dv' = \int_0^\infty G(v+s-v')\delta(v')dv'$$

$$= G(v+s)$$

sehingga yang di dalam kurung menjadi

$$G(v) \;\; G(v+s)$$

Kemudian dengan menggunakan fungsi green untuk sistem A(1) yang diberikan oleh persamaan (3.8), diperoleh

$$\gamma(s) = \sigma_Z^2 \int_0^\infty G(v)G(v+s)\; dv$$

dengan $G(v) = e^{-\alpha_o v}$

$$\gamma(s) = \sigma_z^2 \int_o^\infty e^{-\alpha_o v}\, e^{-\alpha_o (v+s)}\, dv$$

$$= \sigma_z^2 \int_o^\infty e^{-\alpha_o v - \alpha_o v - \alpha_o s}\, dv$$

$$= \sigma_z^2 \int_o^\infty e^{-2\alpha_o v - \alpha_o s}\, dv$$

$$= \sigma_z^2\, e^{-\alpha_o s} \int_o^\infty e^{-2\alpha_o v}\, dv$$

$$= \sigma_z^2\, e^{-\alpha_o s} \left[\frac{-e^{-2\alpha_o v}}{2\alpha_o} \right]_o^\infty$$

$$\gamma(s) = \frac{\sigma_z^2}{2\alpha_o}\, e^{-\alpha_o s} \quad , s \geq 0 \qquad (3.10)$$

dianggap sistem adalah stabil, yaitu $\alpha_o \longrightarrow 0$.

Pada kenyataannya, varian $X(t)$ yaitu kovarian pada lag nol diberikan dengan

$$\gamma(0) = \frac{\sigma_z^2}{2\alpha_o} \qquad (3.11)$$

dan selanjutnya fungsi korelasinya adalah

$$\rho(s) = \frac{\gamma(s)}{\gamma(0)}$$

$$\rho(s) = \frac{\frac{\sigma_z^2}{2\alpha_o}\, e^{-\alpha_o s}}{\frac{\sigma_z^2}{2\alpha_o}}$$

$$\rho(s) = e^{-\alpha_o s}, \qquad s > 0 \qquad (3.12)$$

dengan $\rho(-s) = \rho(s)$

Hubungan $\rho(-s) = \rho(s)$ mengikuti dari $\gamma(-s) = \gamma(s)$ yang dapat diperoleh untuk model A(1), dimulai dengan $X(t)$ dan $X(t+s)$. Pada umumnya, hal itu benar karena $\gamma(s)$ adalah kovarian antara $X(t)$ dan $X(t-s)$, dan

$$\gamma(-s) = E\left[X(t)X(t+s)\right] = E\left[X(t+s)X(t)\right] = \gamma(s)$$

Fungsi autokovarian dan fungsi autokorelasi dapat juga dinyatakan dalam bentuk

$$\gamma(-s) = \frac{\sigma_z^2}{2\alpha_o} e^{-\alpha_o |s|} \qquad (3.10a)$$

$$\rho(s) = e^{-\alpha_o |s|} \qquad (3.12a)$$

sekarang s dapat berubah dari $-\infty$ sampai ∞.

Dari persamaan (3.10) sampai (3.12) kondisi kestabilannya $\alpha_o > 0$, hal ini dapat diartikan sebagai kondisi varian finit atau autokovarian/autokorelasi yang menurun, seperti pada kasus diskrit.