BAB II

MODEL AUTOREGRESI ORDER SATU SISTEM DISKRIT, AR(1)

Dalam runtun waktu, bentuk model regresi linier sederhana order satu adalah :

$$y_t = \beta_1 x_t + \varepsilon_t$$

$$t = 1, 2, 3, \ldots, N$$

$$\varepsilon_t \sim NID\left(0, \sigma_\varepsilon^2\right) \qquad (2.1.a)$$

Model tersebut menyatakan tingkat ketergantungan antara y_t dan x_t, atau y_{t-1} dan x_{t-1} dan seterusnya.

Dengan model yang sama dapat juga untuk menyatakan ketergantungan antara X_t dan X_{t-1}, X_{t-1} dan X_{t-2} dan seterusnya sebagai berikut :

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + a_t \qquad (2.1.b)$$

Model ini juga merupakan model regresi linier order satu. Persamaan (2.1.a) menyatakan ketergantungan dari satu variabel pada variabel yang lain pada saat yang sama. Sedang persamaan (2.1.b) menyatakan ketergantungan dari suatu variabel dengan dirinya sendiri pada saat yang berbeda. Model ini disebut model Autoregresi order satu dan ditandai dengan AR(1). Model ini mewakili observasi saat ini sebagai jumlah dua bagian yang independen atau tidak berhubungan, yang satu bergantung pada yang terdahulu dan yang lainnya suatu barisan yang independen.

Karena a_t independen pada saat t yang berbeda, a_t dianggap berdistribusi normal dengan mean nol dan varian σ_a^2.

$$a_t \sim NID(0, \sigma_a^2) \qquad (2.2)$$

Model seperti pada persamaan (2.1.b) disebut model Autoregresi order satu atau AR (1).

Bila pada saat t-1, X_{t-1} diketahui, maka model AR(1) sama seperti model regresi. Pada saat t-1, karena X_t adalah variabel random yang tidak diketahui, maka a_t dengan sifat distribusinya yang diberikan pada persamaan (2.2). Bila X_t diketahui pada saat t, a_t menjadi bilangan yang diketahui, yang dapat dihitung dengan

$$a_t = X_t - \phi_1 X_{t-1} \qquad (2.3)$$

Karena X_t barisan yang dependen dan a_t independen, maka model AR(1) bertujuan untuk mengubah atau mengembalikan data yang dependen ke data yang independen, seperti pada persamaan (2.3).

Karena model AR(1) diatas adalah model regresi bersyarat, kita dapat memperoleh taksiran kuadrat terkecil bersyarat dengan meminimalkan jumlah kuadrat a_t.

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + a_t$$

$$\sum_{t=2}^{N} a_t^2 = \sum_{t=2}^{N} \left(X_t - \phi_1 X_{t-1}\right)^2$$

$$\frac{\partial \sum a_t^2}{\partial \phi_1} = -2 \sum_{t=2}^{N} X_{t-1}\left(X_t - \phi_1 X_{t-1}\right) = 0$$

$$\sum_{t=2}^{N} X_{t-1}(X_t - \phi_1 X_{t-1}) = 0$$

$$\sum_{t=2}^{\infty} \left[X_{t-1}X_t - \phi_1 X_{t-1}X_{t-1}\right] = 0$$

$$\sum_{t=2}^{\infty} X_{t-1}X_t - \sum_{t=2}^{\infty} \phi_1 X_{t-1}X_{t-1} = 0$$

$$\sum_{t=2}^{\infty} X_{t-1}X_t - \phi_1 X_{t-1}^2 = 0$$

$$\phi_1 = \frac{\sum_{t=2}^{N} X_{t-1}X_t}{\sum_{t=2}^{N} X_{t-1}^2} \qquad (2.4)$$

$$\sigma_a^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{t=2}^{N} (X_t - \phi_1 X_{t-1})^2 \qquad (2.5)$$

$$= \frac{1}{N-1} \sum_{t=2}^{N} a_t^2$$

Parameter ϕ_1 pada persamaan (2.4) pada model AR(1), mengukur tingkat ketergantungan X_t pada X_{t-1}. Ketergantungan atau hubungan antara X_t dan X_{t-1} kuat, maka ϕ_1 besar; bila lemah, ϕ_1 akan kecil. Bila ϕ_1 nol, model AR(1) menjadi :

$$X_t = a_t$$

Sehingga X_t benar-benar suatu barisan yang independen.

Jika $\phi_1 > 1$ atau $\phi_1 < -1$, X_t dapat bertambah atau berkurang tanpa batas, karena a_t mempunyai suatu varians terbatas yang diketahui dan tidak dapat bertambah secara kontinu pada besarnya untuk memenuhi X_t dalam batas.

Sehingga X_t adalah runtun waktu yang tidak stabil atau tidak tetap. Untuk suatu runtun yang stabil atau tetap, X_t terbatas dan

$$|\phi_1| < 1$$

Karena pernyataan (2.4) memberikan suatu taksiran dari ketergantungan atau hubungan antara harga X_t satu lag tersendiri, disebut autokorelasi yang ditaksir pada lag satu dan ditandai dengan ρ_1. Autokorelasi yang ditaksir pada k lag, ρ_k, dinyatakan dengan

$$\rho_k = \frac{\sum_{t=k+1}^{N} X_t X_{t-k}}{\sum_{t=k+1}^{N} X_{t-k}^2}$$

2.1. FUNGSI GREEN MODEL AUTOREGRESI ORDER SATU

Model AR(1) dinyatakan dengan

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + a_t$$

atau

$$a_t = X_t - \phi_1 X_{t-1} \tag{2.6}$$

Dari persamaan (2.6) selanjutnya akan didapat

$$X_t = \phi_1 (\phi_1 X_{t-2} + a_{t-1}) + a_t$$

$$= a_t + \phi_1 a_{t-1} + \phi_1^2 X_{t-2}$$

$$= a_t + \phi_1 a_{t-1} + \phi_1^2 (\phi_1 X_{t-3} + a_{t-2})$$

$$= a_t^2 + \phi_1 a_{t-1} + \phi_1^2 a_{t-2} + \phi_1^3 X_{t-3}$$

$$= a_t + \phi_1 a_{t-1} + \phi_1^2 X_{t-2} + \phi_1^2 a_{t-3} + \ldots$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j a_{t-j} \qquad (2.7)$$

Penyelesaian persamaan differens order satu (2.6) dinyatakan pada persamaan (2.7), yang menyatakan penyelesaian sebagai suatu kombinasi linier dari harga-harga fungsi forcing a_t. Fungsi koefisien ϕ_1^j yang mewakili suatu bagian penting dari penyelesaian tersebut, disebut Fungsi Green.

Fungsi Green menerangkan bagaimana a_t mempengaruhi jawaban X_t dengan menyatakan respon X_t sebagai suatu kombinasi linier dari a_t.

Jika Fungsi Green ditandai dengan G_j, maka model AR(1) menjadi :

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} G_j a_{t-j} = \sum_{j=-\infty}^{t} G_{t-j} a_j \qquad (2.8)$$

dengan $G_o = 1$

Persamaan (2.8) menyatakan susunan struktur dinamis dari model AR(1) yang memperlihatkan bagaimana a_{t-j} mempengaruhi pengamatan saat ini, X_t, atau bagaimana a_{t-j} teringat. Dengan kata lain fungsi Green menyatakan kedinamikaan atau memori a_t lampau.

Karena adanya a_t sistem tidak dapat secara tepat diramalkan, dan kekuatan memori atau kedinamikaan dinyatakan oleh harga-harga fungsi Green yang besar.

Fungsi Green dapat diperoleh dengan menggunakan operator backshift B yang didefinisikan dengan

$$B\,X_t = X_{t-1}$$

dan secara umum dinyatakan dengan

$$B^j X_t = X_{t-j}$$

Model AR(1) dengan persamaan (2.6) akan dapat

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} = a_t$$

$$X_t - \phi_1 (BX_t) = a_t$$

$$(1 - \phi_1 B) X_t = a_t$$

$$X_t = \frac{a_t}{(1 - \phi_1 B)}$$

$$= (1 + \phi_1 B + \phi_1^2 B^2 + \phi_1^3 B^3 + \ldots) a_t$$

$$= a_t + \phi_1 a_{t-1} + \phi_1^2 a_{t-2} + \ldots$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j a_{t-j} \qquad (2.9)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} G_j a_{t-j} \qquad (2.10)$$

Besarnya G_j menunjukkan bagaimana baiknya sistem mengingat a_{t-j}. Bila harga ϕ_1 besar pada sistem AR(1), semakin jelas a_{t-j} diingat untuk suatu harga j yang diketahui.

Fungsi Green G_j adalah yang mengkarakteristik bagaimana cepat atau lambatnya sistem akan kembali ke posisi equilibriumnya bila single a_t dimasukkan ke sistem. Jika harga ϕ_1 kecil, respon turun sangat cepat.

Sejauh ini didefinisikan harga ϕ_1 dengan $|\phi_1| < 1$. Untuk harga-harga ini, G_j secara asimpotik menuju ke nol pada suatu nilai ketergantungan diatas harga ϕ_1. Untuk $|\phi_1| < 1$ sistem secara asimpotik kembali ke posisi equilibriumnya jika hanya satu a_t yang dimasukkan. Dalam kondisi $|\phi_1| < 1$ sistem AR(1) dikatakan stabil asimpotik. Untuk kondisi stabil AR(1) adalah $|\phi_1| \le 1$. Bila $|\phi_1| > 1$.

$$G_j \longrightarrow \infty \text{ karena } j \longrightarrow \infty$$

sistem AR(1) tidak stabil.

2.2. FUNGSI AUTOKOVARIAN MODEL AUTOREGRESI ORDER SATU, AR(1)

a_t adalah suatu variabel Random untuk suatu t yang diketahui, atau untuk harga-harga t yang berbeda, sehingga a_t berdistribusi normal.

$$a_t \sim \text{NID}\left(0, \sigma_a^2\right)$$

Suatu kovarian yang merupakan proses dengan dirinya sendiri pada harga-harga t yang berbeda disebut Autokovarian.

Autokovarian pada lag k dapat diberikan dengan

$$\text{Cov}\left(a_t, a_{t-k}\right) = E\left(a_t - \mu\right)\left(a_{t-k} - \mu\right) \qquad (2.11)$$

dengan E menandai harga harapan dan μ adalah mean dari a_t. Autokovarian pada lag nol adalah varian. Pada kasus berikut, bila $\mu = 0$, autokovarian a_t dapat ditulis.

$$E\left(a_t a_{t-k}\right) = \sigma_a^2 \qquad k = 0$$

$$= 0 \qquad k \neq 0 \tag{2.12}$$

atau dengan bentuk lain

$$E\left(a_t\right) = 0$$

$$E\left(a_t a_{t-k}\right) = \delta_k \sigma_a^2 \tag{2.13}$$

dengan δ_k adalah fungsi delta Kronecker, yaitu nol untuk semua k, kecuali pada k = 0, berharga satu.

Karena X_t adalah kombinasi linier dari a_t dengan Fungsi Green sebagai koefisien, X_t juga akan berdistribusi normal dengan mean 0. Distribusi ini juga mengkarakteristik fungsi autokovarian X_t yang didefinisikan dengan.

$$\gamma_k = E\left(X_t X_{t-k}\right) \tag{2.14}$$

yang menandai autokovarian pada lag k, dan untuk k = 0 memberikan varian dari X_t.

Jika autokovarian γ_k dibagi varian, kita memperoleh fungsi Autokorelasi γ_k pada lag k.

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_o} \tag{2.15}$$

dengan $\rho_o = 1$

Fungsi autokovarian γ_k atau fungsi autokorelasi ρ_k menyatakan ketergantungan X_t pada X_{t-k}. Estimasi tersebut dapat diperoleh langsung dari data,

$$\gamma_k = \frac{1}{N} \sum_{t=k+1}^{N} X_t X_{t-k}$$

Akan dibutuhkan kovarian antara a_{t-k} dan X_{t-k} yang dapat diperoleh dari persamaan (2.13) dan fungsi Green. Karena $G_o = 1$ maka

$$E\left(a_t X_t\right) = \sigma_a^2$$

dan

$$E\left(a_t X_{t-k}\right) = 0 \quad k > 0$$

dari persamaan (2.13). Hubungan ini bisa juga ditulis sebagai :

$$E\left(a_t X_{t-k}\right) = \delta_k \sigma_a^2 \tag{2.16}$$

pada umumnya

$$E\left(a_{t-l} X_{t-k}\right) = E\left[a_{t-l}\left(\sum_{j=o}^{\infty} G_j a_{t-k-l}\right)\right]$$

$$= \sum_{j=o}^{\infty} G_j \; E\left(a_{t-l} a_{t-k-l}\right)$$

$$= 0 \qquad \text{jika } k > l$$

$$= G_{l-k} \sigma_a^2 \qquad \text{jika } k \leq l \tag{2.17}$$

Perlu dicatat

$$\gamma_k = E\left(X_t X_{t-k}\right) = E\left(X_{t-k} X_t\right) = E\left(X_t X_{t+k}\right) = \gamma_{-k} \tag{2.18}$$

Fungsi autokovarian atau fungsi autokorelasi dapat ditentukan dengan dua bentuk, menggunakan bentuk rekursif (implisit) atau pernyataan eksplisit dengan menggunakan ekspansi fungsi Green. Diketahui model AR(1) adalah

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + a_t$$

Pernyataan Implisit

Kedua sisi persamaan diatas dikalikan dengan X_{t-k} dan menggunakan ekspektasi akan didapat

$$E(X_t X_{t-k}) = \phi_1 E(X_{t-1} X_{t-k}) + E(a_t X_{t-k})$$

untuk k > 0 persamaan jadi

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1}$$

untuk k = 0

$$E\ (X_t X_t) = \phi_1 E\ (X_{t-1} X_t) + E\ (a_t X_t)$$

$$\gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \sigma_a^2$$

bila k = 1 $\longrightarrow \gamma_1 = \phi_1 \gamma_0$

sehingga didapatkan

$$\gamma_0 = \phi_1 (\phi_1 \gamma_0) + \sigma_a^2$$

$$\gamma_0 = \phi_1^2 \gamma_0 + \sigma_a^2$$

$$(1 - \phi_1^2)\gamma_0 = \sigma_a^2$$

$$\gamma_0 = \frac{\sigma_a^2}{1 - \phi_1^2}$$

dan

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} \qquad k \geq 1 \qquad (2.19)$$

Bila membagi dengan γ_0 akan didapat hubungan untuk fungsi autokorelasi ρ_k sebagai berikut

$$\rho_0 = \frac{\gamma_0}{\gamma_0} = 1$$

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

$$= \frac{\phi_1 \gamma_{k-1}}{\gamma_o}$$

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} \qquad (2.20)$$

Fungsi autokorelasi selalu memiliki bentuk yang sama dengan fungsi autokovarian karena fungsi autokorelasi hanyalah cara yang lain dengan skalanya adalah γ_o.

Pernyataan Eksplisit

Pernyataan eksplisit untuk fungsi autokovarian pada lag k atau γ_k dapat diperoleh dengan fungsi Green, untuk model AR(1) :

$$G_j = \phi_1^j$$

Sehingga fungsi autokovariannya adalah :

$$\gamma_k = E\left(X_t X_{t-k}\right)$$

$$= E\left[\left(\sum_{i=o}^{\infty} G_i a_{t-i}\right)\left(\sum_{j=o}^{\infty} G_j a_{t-(j+k)}\right)\right]$$

$$= \left(\sum_{j=o}^{\infty} G_{j+k} G_j \sigma_a^2\right)\sigma_a^2$$

$$= \left(\phi_1^k \sum_{j=o}^{\infty} \phi_1^{2j}\right)\sigma_a^2$$

$$= \frac{\sigma_a^2}{\left(1 - \phi_1^2\right)} \phi_1^k \qquad (2.21)$$

Ekspektasi pada langkah kedua akan tidak sama dengan nol dan menghasilkan $G_{j+k} G_j \sigma_a^2$ hanya jika i = j + k. Pada kenyataannya fungsi autokorelasi berhubungan dengan fungsi Green.

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} \qquad \rho_0 = 1$$

$$k = 1 \longrightarrow \rho_1 = \phi_1 \rho_0 = \phi_1 = G_1$$

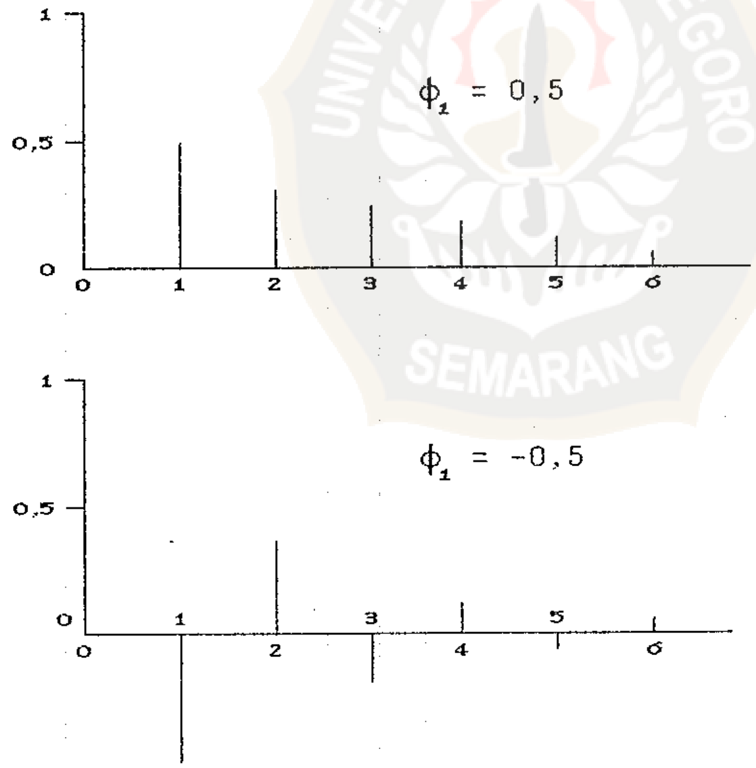
$$k = 2 \longrightarrow \rho_2 = \phi_1 \rho_1 = \phi_1^2 = G_2$$

$$k = 3 \longrightarrow \rho_3 = \phi_1 \rho_2 = \phi_1^3 = G_3$$

$$\vdots$$

$$k = j \longrightarrow \rho_j = \phi_1 \rho_{j-1} = \phi_1^j = G_j$$

Untuk nilai-nilai $\phi_1 = 0,5$ dan $\phi_1 = -0,5$ digambarkan pada gambar dibawah ini.



Gambar 2.1 Fungsi autokorelasi untuk model AR(1)

Dapat dilihat bahwa bila ϕ_1 positif, fungsi γ_k atau ρ_k untuk model AR(1) secara eksponensial menurun menuju nol.