BAB II

MATERI PENUNJANG

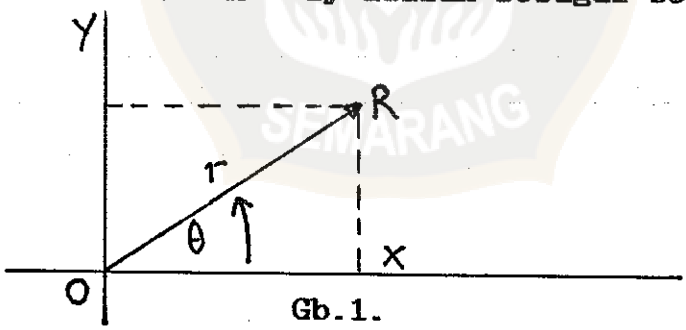
2.1. Sistem Bilangan Kompleks

Definisi 1

Bilangan komplek didefinisikan sebagai pasangan bilangan $z(x,y)$, dengan x dan y bilangan riil. Bilangan komplek juga sebagai bilangan dengan bentuk $a + bi$, dengan a dan b riil sedang i satuan khayal bersifat $i^2 = -1$.

Operasi aljabar pada bilangan riil juga berlaku pada operasi aljabar bilangan komplek. Bentuk lain bilangan komplek $z = x + iy$ adalah $z = r\ (\cos\theta + i\sin\theta)$, dengan $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

Gambaran geometri $z = x + iy$ adalah sebagai berikut:



Gb.1.

Sudut θ yaitu sudut XOR diukur dari sumbu $x \geq 0$ berlawanan arah dengan jarum jam. θ disebut argumen z, dinotasikan dengan $\theta = \arg z$. Argumen perkalian bilangan komplek adalah jumlah masing-masing argumennya, dan argumen pembagian bilangan komplek adalah argumen pembilang dikurangi argumen penyebut. Yaitu $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$,

, $\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$. Bialangan komplek $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ juga sering dinyatakan dalam bentuk eksponensial yaitu ;

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Jadi $z = r\,e^{i\theta} = r \exp i\theta$.

Operasi pemangkatan bilangan komplek mengikuti rumus De'Moivre, yaitu $z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$.

Definisi 2

Sekawan dari $z=x+iy$ didefinisikan sebagai : $\bar{z}=x-iy$.

Definisi 3

Modulus dari $z=x+iy$ didefinisikan sebagai $|z|=\left|\sqrt{x^2+y^2}\right|$.

2.2. Fungsi Analitik dan Fungsi Eksponensial.

Suatu fungsi yang didefinisikan pada daerah $G \subset C$, C himpunan bilangan komplek, adalah aturan yang mengkawankan setiap $z \in G$ dengan suatu bilangan komplek w. G dinamakan domain definisi f, sedangkan $f(G)=\{f(z)|\ z \in G\}$ dinamakan daerah hasil dari f. Apabiala $w=u+iv$ adalah harga dari f di $z=x+iy$ $u+iv=f(x+iy)$, $u,v,x,y \in R$ maka u dan v bergantung pada peubah riil x dan y. Dengan demikian setiap fungsi peubah komplek dapat dituliskan dalam bentuk dua fungsi riil dari peubah riil, yaitu :

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y).$$

Definisi 4

$\lim_{z \to z_o} f(z)=L$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap z dengan $0 < |z - z_o| < \delta$ berlaku $|f(z)-L| < \varepsilon$

Contoh 1

Diberikan fungsi $f(z)=iz/2$, akan dicari δ untuk $\varepsilon>0$ sembarang. Menurut definisi 4) :

Apabila $\lim_{z \to 1} iz/2 = i/2$ maka harus berlaku untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk setiap z dengan $0<|z - 1| < \delta$ berlaku $| iz/2 - i/2 | < \varepsilon$.

$$|f(z) - i/2| = |iz/2 - i/2| = \frac{|z - 1|}{2}$$

untuk setiap $\varepsilon > 0$ sehingga $\frac{|z - 1|}{2} < \varepsilon$, maka ada $\delta > 0$ sehingga untuk setiap z, $0 < |z - 1| < \delta$, dengan $\delta \leq 2\varepsilon$.

Suatu fungsi f dikatakan kontinu pada titik $z_o \in C$ jika terpenuhi syarat berikut ini ;

1. $\lim_{z \to z_o} f(z)$ ada
2. $f(z_o)$ ada
3. $\lim_{z \to z_o} f(z) = f(z_o)$

Derivatif dari f di $z_o \in C$ diberikan dengan persamaan

$$f'(z_o) = \lim_{z \to z_o} \frac{f(z) - f(z_o)}{z - z_o}$$

atau untuk $h = z - z_o$

$$f'(z_o) = \lim_{h \to o} \frac{f(z_o + h) - f(z_o)}{h}$$

Jika $f'(z_o)$ ada maka $f(z)$ dikatakan diferensiabel di $z_o \in C$.

Theorema 1.

Jika $f : G \to C$ diferensibel di $z_o \in G$ maka f kontinu di z_o.

Bukti:

$$\lim_{z \to z_o} f(z) - f(z_o) = \lim_{z \to z_o} \frac{f(z) - f(z_o)}{z - z_o} \cdot \lim_{z \to z_o} (z - z_o)$$

$$= f'(z_o) \cdot 0$$

$$= 0$$

Berarti $\lim_{z \to z_o} f(z) = f(z_o)$ yaitu $f(z)$ kontinu di z_o.

Syarat perlu agar $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ yang terdifinisi pada persekitaran z_o mempunyai derivatif pada z_o adalah $f(z)$ memenuhi persamaan Cauchy - Riemann .

Diasumsikan bahwa

$$f'(z_o) = \lim_{\Delta z \to o} \frac{f(z_o + \Delta z) - f(z_o)}{\Delta z} \quad \text{ada} \quad \ldots .1)$$

dengan $z_o = x_o + iy_o$ dan $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$. Maka

$$f'(z_o) = \lim_{\substack{\Delta x \to o \\ \Delta y \to o}} \frac{u(x_o+\Delta x \,,\, y_o + \Delta y) - u(x_o \,,\, y_o)}{\Delta x + \Delta i y}$$

$$+ \lim_{\substack{\Delta x \to o \\ \Delta y \to o}} \frac{i\left[v(x_o+\Delta y_o, y_o+\Delta y) - v(x_o, y_o)\right]}{\Delta x + i\Delta y}$$

Kasus 1 untuk $\Delta y=0$, $\Delta x \to 0$

$$f'(z_o) = \lim_{\Delta x \to o} \frac{u(x_o+\Delta x, y_o) - u(x_o, y_o)}{\Delta x}$$

$$+ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{i\left[v(x_o+\Delta x, y_o) - v(x_o, y_o)\right]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to o} \frac{u(x_o+\Delta x, y_o) - u(x_o , y_o)}{\Delta x}$$

$$+ \lim_{\Delta x \to o} \frac{i[v(x_o+\Delta x, y_o) - v(x_o , y_o)]}{\Delta x}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

Kasus 2, untuk $\Delta x = 0$, $\Delta y \to 0$

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \to o} \frac{u(x_o , y_o + \Delta y) - u(x_o , y_o)}{i\Delta y}$$

$$+\lim_{\Delta y \to 0} \frac{i[v(x_0, y_0+\Delta y) - v(x_0, y_0)]}{i\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x_0, y_0+\Delta y) - u(x_0, y_0)}{i\Delta y}$$

$$+ \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x_0, y_0+\Delta y) - v(x_0, y_0)}{i\Delta y}$$

$$= \frac{\partial u}{i\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{i\partial u}{\partial y} \quad \ldots\ldots\ldots 2)$$

Dari 2) diperoleh $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$

Persamaan terakhir disebut persamaan Cauchy-Riemann.

Definisi 5

Fungsi kopmlek f analitik pada z_0 jika derifativnya ada bukan hanya pada z_0 tetapi pada setiap z dalam persekitaran z_0 .

Jumlahan, perkalian, pembagian dan komposisi dari fungsi-fugsi yang analitik adalah analitik juga.

Definisi 6

Fungsi h dikatakan harmonik pada daerah yang diberikan jika pada seluruh domain derivatif pertama dan kedua kontinu dan memenuhi persamaan diferensial parsial

$$h_{xx}\ (x,y) + h_{yy}\ (x,y) = 0$$

Jika dua fungsi u dan v harmonik dalam D dan derivatif pertamanya memenuhi persamaan Cauchy-Riemann pada seluruh D maka v dinamakan harmonik sekawan dari u.

Contoh 2

Apabila $u(x,y) = y^3 - 3x^2y$ harmonik maka dapat ditentukan $v(x,y)$ sehingga $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$ analitik.

$$u_x = -6xy$$

$$u_x = v_y \quad \text{sehingga} \quad v_y = -6xy$$

Integral dari v_y menghasilkan

$$v(x,y) = -3xy^2 + \phi(x) \ , \ \phi : \text{fungsi dari variabel x}$$

$$u_y = -v_x$$

$$3y^2 - 3x^2 = 3y^2 + \phi\ '(x)$$

$$\phi\ '(x) = 3x^2 \quad \text{atau} \quad \phi(x) = x^3 + C,\ C : \text{konstanta riil.}$$

Sehingga $v(x,y) = x^3-3xy^2+ C$ harmonik sekawan dari $u(x,y)$. Fungsi analitiknya adalah :

$$f(x,y) = y^3 - 3x^2y + i(x^3 - 3xy^2 + C).$$

Definisi 7

Fungsi pangkat atau fungsi eksponensial didefinisikan sebagai $w = e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y + i \sin y)$, dengan e= 2,71828...adalah bilangan dasar logaritma natural (asli).

Bentuk e^z sering ditulis dengan notasi exp z. Untuk $z = i\theta$ maka $e^z = \cos\theta + i\sin\theta$.

Sifat-sifat fungsi eksponensial antara lain:

1. $|e^z| = e^x$ dan $\arg e^z = y$
2. $e^{z+2\pi i} = e^z$ untuk setiap z
3. $(\exp z_1)(\exp z_2) = \exp(z_1 + z_2)$
4. $\dfrac{\exp z_1}{\exp z_2} = \exp(z_1 - z_2)$
5. $(e^z)^n = e^{nz}$ $(n = 1,2,3,\ldots)$.

Contoh 3

Menurut definisi $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$, $z=x+iy$.

Jika $z_1 = x_1 + iy_1$ dan $z_2 = x_2 + iy_2$ maka :

$$\begin{aligned} e^{z_1}e^{z_2} &= e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1).e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2) \\ &= e^{x_1}e^{x_2}(\cos y_1 + i\sin y_1)(\cos y_2 + i\sin y_2) \\ &= e^{x_1+x_2}\{\cos(y_1 + y_2) i\sin(y_1 + y_2) \\ &= e^{z_1 + z_2} \end{aligned}$$

Definisi 8

Fungsi logaritma natural didefinisikan sebagai

$$w = \ln z = \ln r + i(\theta + 2k\pi)\ ,\ k = 0,\pm1,\pm2,\ldots$$

dengan $z = re^{i\theta} = re^{i(\theta + 2k\pi)}$.

ln z adalah fungsi bernilai banyak, nilai utama atau cabang utama dari ln z seringkali didefinisikan sebagai $\ln r + i\theta$, dengan $0 \le \theta \le 2\pi$.

Contoh 4

Jika $z = e^w$, $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ dan $w = u + iv$ maka $(1 + i)$ adalah cabang utamanya dan mempunyai nilai

$\ln(1+i)=\ln\sqrt{2}+(7\pi i/4+2k\pi i)=1/2\ \ln 2+7\pi i/4+2k\pi i$

Jadi nilai utamanya adalah $1/2 \ln 2 + 7\pi i/4$.

2.3. Integral, Deret Taylor

Definisi 9

Suatu kurva di bidang komplek didefinisikan sebagai himpunan titik-titik $z=(x,y)$ sehingga $x=x(t)$, $y=y(t)$, dengan $x(t)$ dan $y(t)$ fungsi kontinu dari parameter riil t.

Notasi kurva C sering ditulis dengan $z = z(t)$, $(a\leq t\leq b)$.

Definisi 10

Kurva sederhana C didefinisikan sebagai suatu kurva yang tidak ada titik potongnya, atau jika $z(t_1) \neq z(t_2)$ untuk $t_1 \neq t_2$.. Jika untuk $a\leq t\leq b$ $z(a)= z(b)$ dan C kurva sederhana maka C disebut kurva tertutup sederhana.

Contoh 5

$z=t+it$, untuk $0\leq t\leq 1$, $z=t+i$, untuk $1\leq t\leq 2$

adalah kurva sederhana yaitu dari 0 ke (1 + i) diteruskan dari (1+i) ke (2+i).

Definisi 11

Integral garis komplek didefinisikan sebagai berikut. Jika f(z) kontinu di semua titik dari kurva C yang memiliki panjang berhingga (dari a-b) maka integral dai f(z) adalah :

$$\int_a^b f(z)dz \quad \text{atau} \quad \int_C f(z)dz \quad \text{...............1)}$$

Notasi tersebut dapat juga dibaca sebagai integral tertentu dari f(z) dari a ke b sepanjang C . Jika f(z) analitik di semua titik pada R, dan C kurva yang terletak dalam R maka f(z) dapat diintegralkan sepanjang kurva C.

Jika $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = u + iv$ maka integral garis komplek dar 1) dinyatakan dalam suku-suku integral

$$\int_C f(z)dz = \int_C (u + iv)(dx + idy)$$

$$= \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy \quad \text{..........2)}$$

Contoh 6

$\int_C zdz$ dari $z = 0$ ke $z = 4 + 2i$ sepanjang kurva C yang diberikan oleh $z = t^2 + it$ adalah sebagai berikut:

Titik z=0 dan z=4+2i pada C berkaitan dengan t=0 dan t=2. Maka integral garisnya menjadi:

$$\int_{t=0}^{2} (t^2 + it)d(t^2 + it) = \int_0^2 (t^2 + it)(2t+i)dt$$

$$= \int_0^2 (2t^3 - t + 3it^2)dt$$

$= 10 - 8i/3$

Metode lain, integral yang diberikan sama dengan

$$\int_C (x-iy)(dx+idy) = \int_C xdx+ydy + i\int_C xdy - ydx$$

Persamaan parameter C adalah $x = t^2$, $y = t$ dari $t = 0$ sampai $t = 2$, integral garisnya:

$$\int_{t=0}^{2} (t^2)(2tdt) + tdt + i\int_{0}^{2} t^2dt - (t)(2tdt)$$

$$= \int (2t^3 + t)dt + i\int (-t^2)dt$$

$$= 10 - 8i/3$$

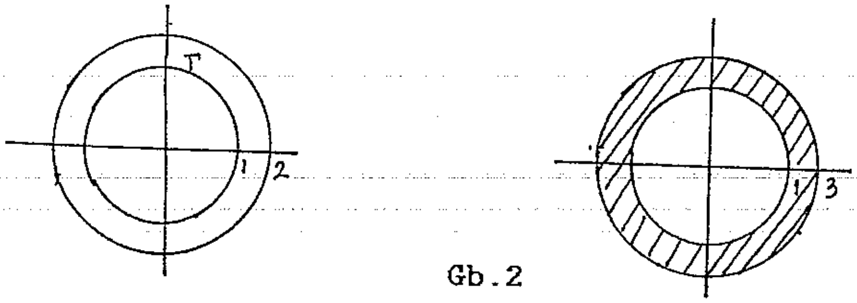
Definisi 12

$\mathbb{R}$ sebagai daerah terhubung sederhana jika untuk sebarang kurva tertutup τ di dalam $\mathbb{R}$ maka τ dapat menyusut ke suatu titik tanpa meninggalkan $\mathbb{R}$.

Daerah yang tidak terhubung sederhana disebut daerah ter hubung berganda.

Contoh 7

Misalkan r adalah daerah yang dibatasi $|z|<2$. Jika Γ suatu kurva $|z|=1$, maka Γ adalah dapat menyusut ke suatu titik tanpa meniggalkan $\mathbb{R}$, jadi $\mathbb{R}$ daerah terhubung sederhana. Sedangkan $\mathbb{R}'$ suatu daerah yang dibatasi oleh $0 \leqslant |z| \leq 3$, maka jika Γ' suatu kurva $|z|=2$, Γ' dapat menyusut ke suatu titik tetapi dengan meninggalkan $\mathbb{R}'$. Jadi $\mathbb{R}'$ daerah terhubung berganda. Seperti pada Gb. 2.



Gb.2

Theorema 2 (Theorema Green)

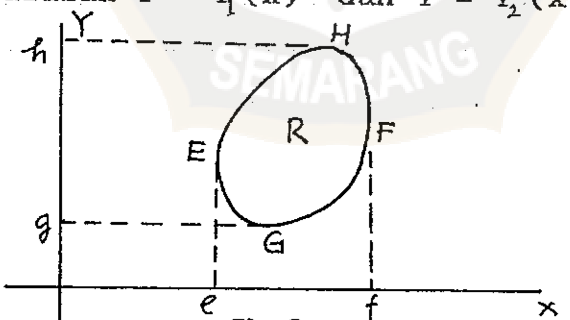
Misalkan P(x,y) dan Q(x,y) kontinu dan memiliki turunan parsiil kontinu dalam R dan batas C maka berlaku:

$$\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\ dxdy$$

dengan $\oint_C$: integral sepanjangn C berlawanan jarum jam.

Bukti:

C kurva tertutup sederhana resifat bahwa setiap garis sejajar sumbu koordinat memotong c paling banyak dua kali. Misalkan persamaan kurva EGF dan EHF pada Gb.3. berturut-turut adalah $Y = Y_1(x)$ dan $Y = Y_2(x)$.



Gb.3.

Jika R daerah yang dibatasi C maka :

$$\iint_R \frac{\partial P}{\partial y}\ dxdy = \int_e^f \left[\int \frac{\partial P}{\partial y}\ dy \right] dx$$

$$= \int_e^f P(x,y)|\ dx = \int_e^f [P(x,y_2) - P(x,y_1)]dx$$

$$= -\int_e^f P(x,y_1)dx - \int_f^e P(x,y_2)dx = -\oint_C Pdx.$$

Jadi $\oint_C Pdx = -\iint_R \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$

Jika persamaan GEH dan GF masing-masing $x=X_1(y)$ dan $x=X_2(y)$ maka:

$$\iint_R \partial Q/\partial x \; dxdy = \int_g^h \left[\int_{x_1(y)}^{x_2(x)} \partial Q/\partial x \; dx\right] dy = \int_g^h \Big[Q(x_2,y) - Q(x_1,y)\Big] dy$$

$$= \int_g^h Q(x_1,y)dy + \int_g^h Q(x_2,y)dy$$

$$= \oint_C Q \; dy$$

Jadi $\oint_C Qdy = \iint \partial Q/\partial x \; dxdy$

Sehingga berlaku :

$$\oint_C P\;dx + \oint_C Qdy = \iint_R [\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y] \; dxdy.$$

Contoh 8

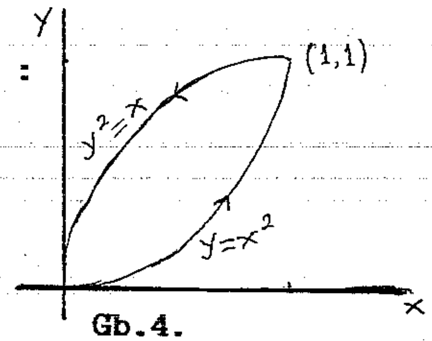
C suatu kurva tertutup yang dibatasi oleh $y = x^2$ dan $y^2 = x$, yang berpotongan di (0,0) dan (1,1)

$$\oint_C (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy$$

sepanjang $y^2 = x$ integral garisnya adalah :

$$\int_{y=1}^{0} \{2y^2y - (y^2)\}dy^2 + \{y^2+y^2\}dy = \int_0^1 (4y^4-2y^3+2y^2)dy = -17/15$$

Sepanjang $y=x^2$ integral garisnya adalah :



Gb.4.

$$\int_{x=0}^{1} \{2xx^2 - x^2\}dx + (x + (x^2)^2\}dx^2$$

$$= \int_{0}^{1} (2x^3 + x^2 + x^5)dx = 7/6$$

Integral yang diinginkan adalah 7/6 + 17/15 = 1/30

Jika dengan theorema Green maka berlaku :

$$\iint_R [\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y]dxdy = \iint_R [\partial(x+y^2)/\partial x - \partial(2xy-x^2)]dxdy$$

$$= \iint_R (1 - 2x)dxdy = \int_{x=0}^{1}\int_{y=x^2}^{\sqrt{x}} (1 - 2x)dydx$$

$$= \int_{x=0}^{1} (y - 2xy)\Big|_{y=x^2}^{\sqrt{x}} dx$$

$$= \int_{0}^{1} (x^{1/2} - 2x^{3/2} - x^2 + 2x^3)dx = 1/30$$

Theorema 3 (Theorema Cauchy)

misalkan f(z) analitik dalam daerah Rdan pada batas kurva tertutup C, maka : $\oint_C f(z)dz = 0$

Bukti:

f(z) = u + iv analitik dan memiliki turunan yang kontinu, maka $f'(z)=\partial u/\partial x + i\partial v/\partial y = \partial v/\partial y - i\partial u/\partial y$ (sesuai atauran C-R). Sehingga $\partial u/\partial x = \partial v/\partial y$, $\partial v/\partial x = -\partial u/\partial y$.

Menurut Theorema Green

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C (u+iv)(dx+idy) = \oint_C udx-vdy + i\oint_C vdx+udy$$

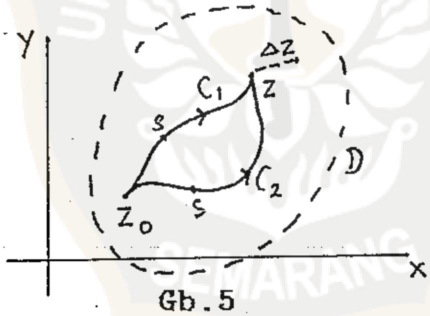
$$= \iint_R (-\partial v/\partial x - \partial u/\partial y)dxdy + i\iint_R (\partial u/\partial x - \partial v/\partial y)dxdy$$

$$= \iint_R (\partial u/\partial y - \partial u/\partial y)dxdy + i\iint_R (\partial v/\partial y - \partial v/\partial y)dxdy$$

$$= 0$$

Akibat dari theorema Cauchy adalah jika f(z) analitik dalam suatu daerah terhubung sederhana R maka $\int_a^b f(z)dz$ tidak bergantung pada lintasan dalam R yang menghubungkan titik a dan b dalam R . Sesuai dengan hal ini maka jika C_1 dan C_2 adalah dua kurva yang menghubungkan dua titik Z_0 dan Z dalam daerah analitik fungsi F pada daerah terhubung sederhana D, maka : $\oint_{C_1} f(s)ds - \oint_{C_2} f(s)ds = 0$

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(s)ds$$



Gb.5

Derdasarkan hal ini akan dianalisa bahwa F'(z) = f(s)ds

Dipilih titik $z + \Delta z$ dalam D

$$F(z+\Delta z)-F(z) = \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(s)ds - \int_{z_0}^{z} f(s)ds = \int_{z}^{z+\Delta z} f(s)ds$$

Karena $f(z) = \frac{f(z)}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z} ds = \frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z} f(z)ds$

maka $\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z}(f(s)-f(z))ds$

Tetapi f kontinu di z, sehingga untuk setiap bilangan positif ε, ada bilangan positif δ sehingga :

$$|f(s)-f(z)|<\varepsilon \text{ untuk } |s-z|<\partial$$

Dan $z+\Delta z$ ke z adalah garis lurus sehingga $|\Delta z|<\partial$

Sehingga $\dfrac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} - f(z)| < \dfrac{1}{z}\,\varepsilon\,|\Delta z| = \varepsilon$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} = f(z) \text{ atau } F'(z) = f(z)$$

Theorema 4

Jika $f(z)$ analitik dalam suatu daerah yang dibatasi dua kurva C_1 dan C_2 (C_2 didalam C_1) maka :

$$\oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_2} f(z)dz=0$$

Bukti :

$f(z)$ analitik dalam R menurut theorema Cauichy diperoleh :

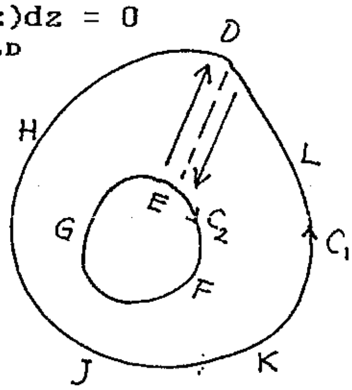
$$\int_{DEFGDHJKLD} f(z)dz=0$$

atau $\displaystyle\int_{DE} f(z)dz + \int_{EFGE} f(z)dz + \int_{ED} f(z)dz + \int_{DHJKLD} F(z)dz = 0$

karena $\displaystyle\int_{DE} f(z)dz = -\int_{ED} f(z)dz$, maka:

$$\int_{EFGE} F(z)dz = -\int_{DHJKLD} f(z)dz = \int_{EGFE} f(z)dz$$

atau $\displaystyle\oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_2} f(z)dz$



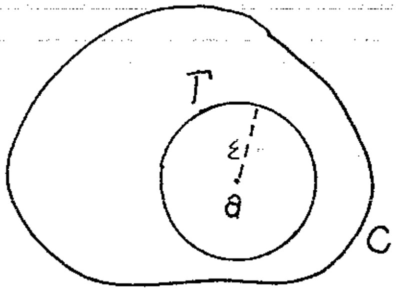
Gb.6.

Contoh 9

$\oint_C \frac{dz}{z-a}$, C : kurva tertutup sederhana

a) Jika z=a di luar C maka menurut Theorema Cauchy

$$\oint_C \frac{dz}{z} = 0$$



Gb.7.

b) Jika $z = a$ di dalam C maka dapat dibuat lingkaran τ pusat a jari-jari ε, τ di dalam C, sehingga

$$\oint_C \frac{dz}{z-a} = \oint_\tau \frac{dz}{z-a}$$

Pada τ berlaku $(z-a) = \varepsilon$ atau $z-a = \varepsilon e^{i\theta}$ yaitu

$z = \varepsilon e^{i\theta} + a$, $dz = i\varepsilon\, e^{i\theta} d\theta$, $0 \leq \theta \geq 2\Pi$

$$\int_{\theta=0}^{2\Pi} \frac{i\varepsilon e^{i\theta} d\theta}{\varepsilon e^{i\theta}} = \int_{\theta=0}^{2\Pi} i d\theta = 2\Pi i, \text{(jadi tidak sama dengan nol)}$$

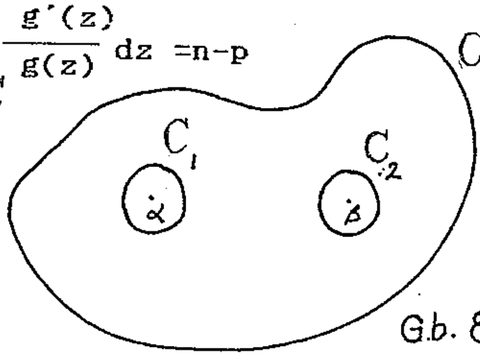
Theorema 5

Jika g(z) analitik dalam dan pada kurva tertutup sederhana C kecuali di z=a berpangkat p di dalam C, dan di dalam C f(z) hanya mempunyai satu herga nol di z=b berpangkat n dan f (z)≠0 di C maka:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{g'(z)}{g(z)} dz = n-p$$

Bukti:

Seperti pada Gb.8.



Gb. 8.

berlaku:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{g'(z)}{g(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{g'(z)}{g(z)}dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{g'(z)}{g(z)}dz$$

Untuk $g(z)=\frac{G(z)}{(z-a)^p}$ maka $\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{G'(z)}{G(z)} - \frac{p}{z-a}$

Sehingga :

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{g'(z)}{g(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\left[\oint_{C_1}\frac{G'(z)}{G(z)}dz - \oint_{C_1}\frac{p\ dz}{z-a}\right]$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}p\oint_{C_1}\frac{dz}{z-a} = -p$$

Untuk $g(z)=(z-b)^n H(z)$ maka $\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{n}{z-b} + \frac{H'(z)}{H(z)}$

Sehingga:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{g'(z)}{g(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\left[\oint_{C_2}\frac{n\ dz}{z-b} + \oint_{C_2}\frac{H'(z)}{H(z)}dz\right]$$

$$= n$$

Sehingga $\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{g'(z)}{g(z)}dz = n-p$.

Berdasarkan theorema ini maka jika N dan P masing-masing menyatakan jumlah nilai nol dan pole dari f(z) di dalam C maka :

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{g'(z)}{g(z)}dz = N-P$$

Theorema 6 [Integral Chauchy]

Jika f(z) analitik dan pada batas C dari suatu daerah terhubung sederhana R, dan a suatu titik di dalam C maka;

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz$$

Bukti :

$f(z)/(z-a)$ analitik didalam dan pada C kecuali di $z=a$, menurut theorema 4 : $\oint_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \oint_\tau \frac{f(z)}{z-a}\,dz$

τ : lingkaran berjari-jari ε, pusat a, seperti pada Gb.7.

Persamaan τ adalah $|z-a| = \varepsilon$ atau $z-a=\varepsilon e^{i\theta} d\theta$, $0 \leq \varepsilon \geq 2\Pi$

Dengan mengganti $z=a+\varepsilon e^{i\theta}$ dan $dz=i\varepsilon e^{i\theta}d\theta$ maka ;

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(a+\varepsilon e^{i\theta})}{\varepsilon e^{i\theta}} \cdot i\varepsilon e^{i\theta} d\theta = i\int_0^{2\pi} f(a+\varepsilon e^{i\theta})d\theta$$

Diambil harga limit ε mendekati nol

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz = i \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{2\pi} f(a + \varepsilon e^{i\theta})d\theta = i\int_0^{2\pi} f(a)d\theta = 2\pi i f(a)$$

Sehingga $f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz$

Derifatif ke-n dari integral Cauchy adalah sebagai berikut

$$\frac{f(a+\Delta a)-f(a)}{\Delta a} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \left[\frac{1}{z-a-\Delta a} - \frac{1}{z-a}\right]\frac{f(z)}{\Delta a}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_C \left[\frac{\Delta a}{(z-a-\Delta a)(z-a)}\right]\frac{f(z)dz}{\Delta a}$$

$$\lim_{\Delta a \to 0} \frac{f(a+\Delta a)-f(a)}{\Delta a} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{(z-a)(z-a)} f(z)dz$$

$$= f'(a)$$

$$\frac{f'(a+\Delta a)-f'(a)}{\Delta a} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \left[\frac{1}{(z-a-\Delta a)^2} - \frac{1}{(z-a)^2}\right]\frac{f(z)}{\Delta a}\,dz$$

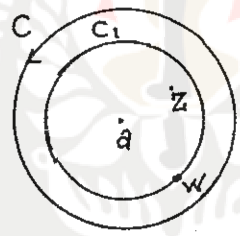
$$\lim_{\Delta a \to 0} \frac{f'(a+\Delta a)-f'(a)}{\Delta a} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \left[\frac{1}{(z-a-\Delta a)^2} - \frac{1}{(z-a)^2}\right]\frac{f(z)}{\Delta a}\,dz$$

$$f''(a) = \frac{1.2}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^3}\,dz$$

$$f^{n}(a)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$$

Misalkan z titik didalam C dibangun lingkaran C_1 pusat a dan mengelilingi z. C_1 ada di dalam C yang pusatnya a.

Menurut integral Cauchy : $f(z)= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C} \frac{f(z)}{w-z}dw$



Gb.9.

w : terletak pada C_1

$$\frac{1}{w-z}=\frac{1}{(w-a)-(z-a)}=\frac{1}{(w-a)}\left(\frac{1}{1-(z-a)/(w-a)}\right)$$

$$= \frac{1}{w-a}\left[1+\left(\frac{z-a}{w-a}\right)+\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^2+\ldots\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^{n-1}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^{n}\frac{1}{1-(z-a)/(w-a)}\right] \quad \text{atau:}$$

$$\frac{1}{w-z}=\frac{1}{w-a}+\frac{z-a}{(w-a)^2}+\frac{(z-a)^2}{(w-a)^3}+\dots+\frac{(z-a)^{n-1}}{(w-a)^n}+\frac{(z-a)^n}{(w-a)^n}\cdot\frac{1}{w-z}$$

dikalikan kedua ruas dengan $f(w)$

$$\frac{f(w)}{w-z}=\frac{f(w)}{w-a}+\frac{f(w)(z-a)}{(w-a)^2}+\dots+\frac{f(w)(z-a)^n}{(w-a)^n}\cdot\frac{1}{w-z}$$

Digunakan integral Cauchy :

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{w-a}w+(z-a)\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{(w-a)^2}dw+\frac{1}{2\pi i}(z-a)^2$$

$$\oint_{C_1}\frac{f(w)}{(z-a)^3}+\dots+\frac{(z-a)}{(w-a)}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{(w-a)^n}dw+U_n$$

Dengan $U_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{(z-a)^n}{(w-a)^n}\cdot\frac{f(w)}{(w-a)}.dw$

Sehingga :

$$f(z)=f(a)+(z-a)f'(a)+\frac{(z-a)^2}{2!}f''(a)+\dots+\frac{(z-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a)+U_n$$

Akan ditunjukkan bahwa $U_n=0$ untuk n mendekati takhingga.

w terletak pada C_1, $|z|=r$ dan $|w|=R_1$ dengan $r<R_1$ sehingga berlaku :

$$|w-z|>|\,|w|-|z|\,|=R_1-r$$

Jika M harga maksimum dari $|f(w)|$ pada C_1 maka :

$$|U_n|=\left|\oint_{C_1}\left[\frac{z-a}{w-a}\right]^n\cdot\frac{f(w)}{(w-a)}dw\right|\frac{1}{2\pi i}$$

$$<\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{r}{R_1}\right)^n\frac{M_1}{(R_1-r)}2R_1\pi=\frac{R_1M_1}{(R_1-r)}\left(\frac{r}{R_1}\right)^n$$

Tetapi $r/R_1<1$ sehingga :

$$\lim_{n\to\infty}U_n=\lim_{n\to\infty}\frac{R_1M_1}{(R_1-r)}\left(\frac{r}{R_1}\right)^n=0$$

Sehingga untuk f(z) analitik dalam dan pada suatu kurva tertutup sederhana C, jika a dan z=a+h dua titik di dalam C maka :

$$f(z)=f(a)+(z-a)f'(a)+\frac{(z-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(z-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a)$$

Persamaan ini dinamakan deret Taylor di sekitar a.

Contoh 10.

f(z)=sin z dideretkan Taylor disekitar $z=\pi/2$ menjadi :

f´(z)=cos z, f´´(z)=-sin z, f´´´(z)=-cos z, ...

untuk $z=\pi/2$ maka f´´(z)=0, f´´(z)=-1, f´´´(z)=0, ...

$$f(z)=1+(z-\pi/2)0+\frac{(z-\pi/2)^2}{2!}(-1)+\ldots\ldots$$

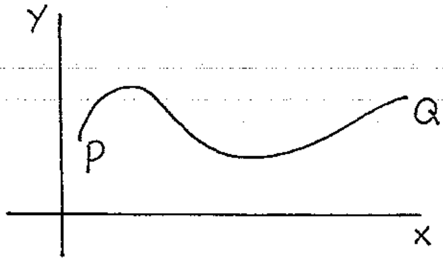
$$f(z)=1+\frac{(z-a)^2}{2!}$$

2.5. Pemetaan

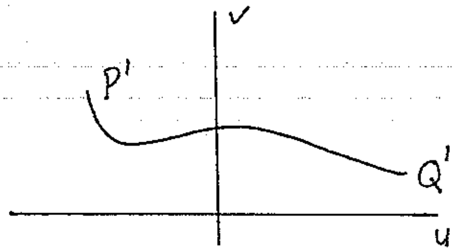
Jika w=u+iv (u dan v riil) adalah suatu fungsi bernilai tunggal dari z=x+iy (x dan y riil), maka dapat dituliskan sebagai u+iv=f(x+iy), dengan menyamakan bagian riil dan khayal mak dapat dilihat setara dengan :

$$u=u(x,y),\ v=v(x,y) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots 1)$$

Jadi untuk suatu titik (x,y) yang diberikan pada bidang z seperti titik P pada Gb.10. terdapat kaitan dengan suatu titik (u,v) pada bidang w misalnya P´. Himpunan persamaan 1) dinamakan suatu transformasi atau pemetaan. Dikatakan bahwa titik P dipetakan ke titik P′ oleh transformasi tersebut dan P′ dikatakan sebagai bayangan (image) dari P.



Gb.10.



Secara umum dengan transformasi himpunan titik seperti kurva PQ pada gambar diatas dipetakan ke himpunan titik yang berkaitan pada kurva P′Q′. Ciri khusus dari bayangan ini bergantung pada jenis fungsi f(z) yang dinamakan fungsi pemetaan.

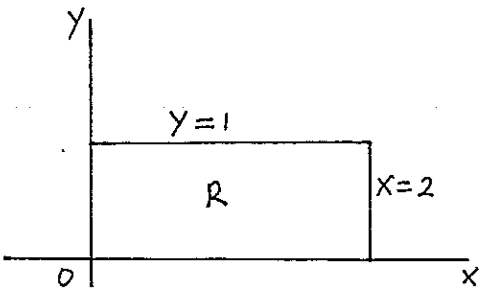
Contoh 11

R daerah persegi panjang pada bidang z dibatasi oleh $x=0$, $y=0$, $x=2$, $y=1$. Maka daerah R′ di bidang w peta dari R ditentukan menurut fungsi pemetaannya.

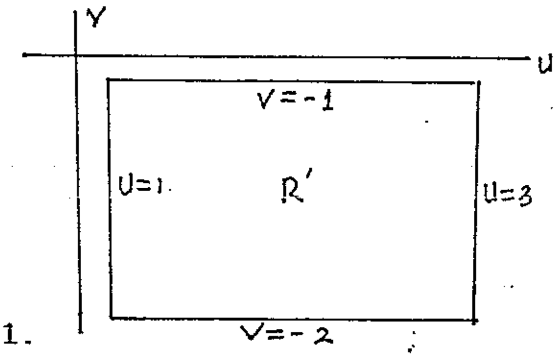
a). Untuk fungsi pemetaan $w=z+(1-2i)$ maka :

$u+iv=x+iy+1-2i=(x+1)+i(y-2)$ dan $u=x+1$, $v=y-2$

Garis $x = 0$ dipetakan ke $u = 1$; $y = 0$ ke $v = -2$; $x = 2$; ke $u = 3$; $y = 1$ ke $v = -1$



Gb.11.



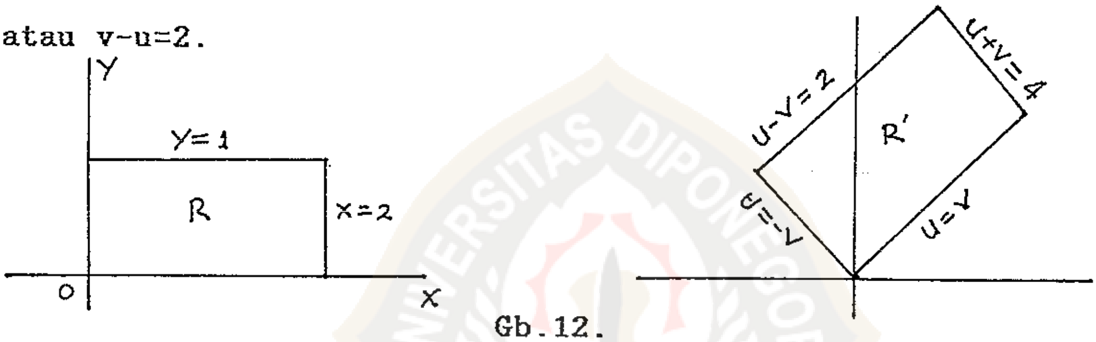
Transformasinya menggambarkan suatu pergeseran (translasi). Secara umum $w = z + \beta$ menggambarkan suatu translasi daerah.

b). Untuk fungsi pemetaan $w = \sqrt{2}\, e^{\pi i/4} z$ maka :

$u+iv=(1+i)(x+iy)=x-y+i(x+y)$ dan $u=x-y$, $v=x+y$

Garis $x=0$ dipetakan ke $u = -y$, $v = y$ atau $u = -v$

garis $y = 0$ dipetakan ke $u = x$, $v=x$ atau $u=v$; $x=2$ ke $u=2-y$, $v=2+y$ atau $u+v=4$; $y=1$ ke $u=x-1$, $v=x+1$ atau $u-v=-2$ atau $v-u=2$.



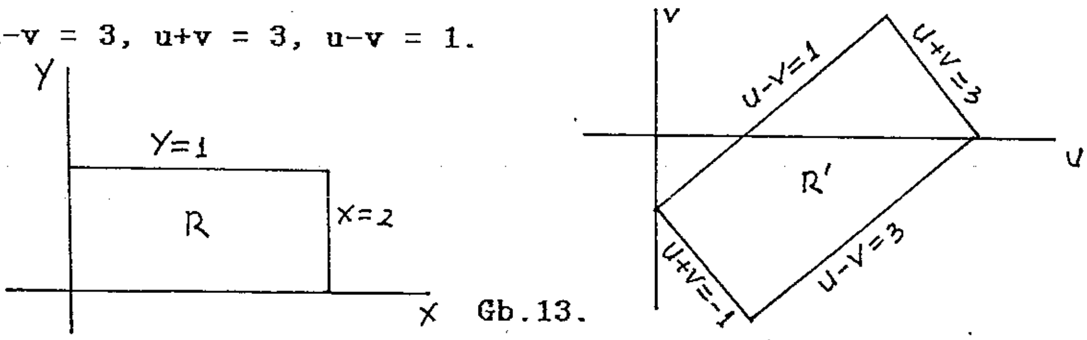
Gb.12.

Pemetaannya menggambarkan suatu rotasi daei r sejauh sudut 45° dan suatu peregangan denggan panjang $\sqrt{2}$. Secara umum transformasi $w=az$ menggambarkan suatu rotasi dan peregangan.

c). untuk fungsi pemetaan $w=\sqrt{2}e^{\pi i/4}z + (1-2i)$ maka :

$u+iv=(1+i)(x+iy)+1-2i$ dan $u=x-y+1$, $v=x=y-2$.

Garis $x=0, y=0, x=2, y=1$ berturut-turut dipetakan ke $u+v=-1$, $u-v = 3$, $u+v = 3$, $u-v = 1$.

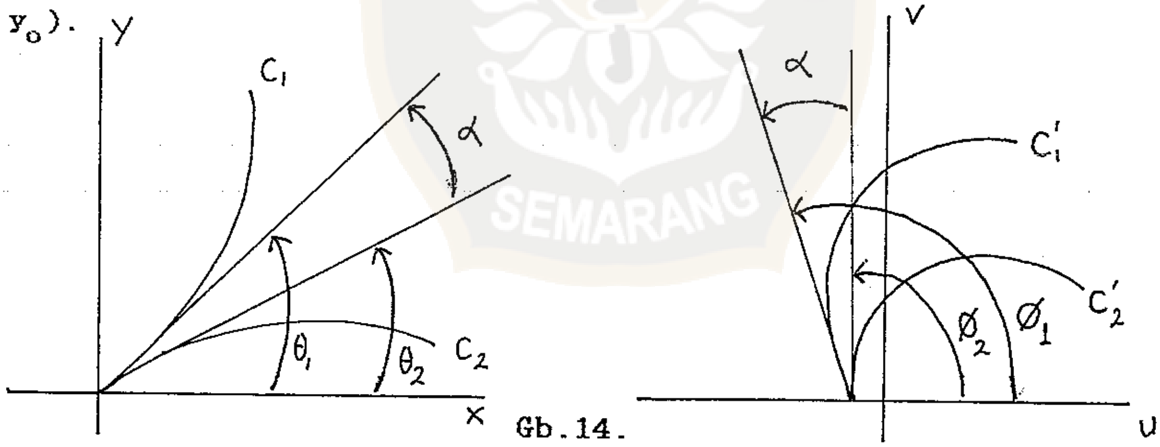


Gb.13.

Pemetaannya menggambarkan rotasi dan peregangan dilanjutkan dengan suatu pergeseran. Secara umum transformasi $w = az+\beta$ menyatakan suatu rotasi, peregangan dan pergeseran.

2.6. Pemetaan Konformal

Jika dengan transformasi $w=f(z)$ titik (x_o,y_o) di bidang xy dipetkan ke titik (u_o,v_o) di bidang uv, sedangkan kurva C_1dan C_2 dipetakan berturut-turut ke kurva C_1' dan C_2'. Kemudian jika transformasi tersebut bersifat bahwa sudut di(x_o,y_o) antara C_1 dan C_2 sama dengan sudut di (u_o,v_o) antar C_1' dan C_2'dalam besar dan arahnya, maka transformasinya dinamakan konformal di (x_o, y_o).



Gb.14.

Theorema 7.

Jika $w=f(z)$ aanalitik di z_o dan $f(z_o) = 0$ maka pemetaannya mengawetkan sudut pada z_o baik besar dan arahnya.

Bukti:

Akan dibuktikan bahwa sudut antara C_1' dan C_2' juga α jika sudut antara C_1 dan C_2 juga α. Misalkan C_1 dan C_2 dua busur yang melalui z_o dengan sudut antaranya α. Berlaku:

$$f'(z_o) = \lim_{z \to z_o} \frac{f(z) - f(z_o)}{z - z}$$

atau untuk $f(z)=w$ dan $f(z_o)=w_o$

$$f'(z_o) = \lim_{z \to z_0} \frac{w - w_o}{z - z_o}$$

Untuk $z \to z_o$ pada C_1 maka w mendekati w_o pada C_1'. Maka :

$$\theta_1 = \lim_{z \to z_o} \arg (z - z_o)$$

$$\varnothing_1 = \lim_{w \to w_o} \arg (w - w_o)$$

$$\arg f'(z_o) = - \lim_{z \to z_o} \arg(z - z_o) + \lim_{z \to z_o} \arg(w - w_o)$$

$$= -\theta_1 + \varnothing_1$$

Untuk $z \to z_o$ pada C_2 maka $w \to w_o$ pada C_2' , sehingga :

$$\theta_2 = \lim_{z \to z_o} \arg(z - z_o)$$

$$\varnothing_2 = \lim_{z \to z_o} \arg(z - z_o) \quad , \quad \varnothing_2 = \lim_{w \to w_o} \arg(w - w_o)$$

$$\arg f'(z_o) = -\lim_{z \to z_o} \arg(z - z_o) + \lim_{w \to w_o} (w - w_o) = -\theta_2 + \varnothing_2$$

Sehingga $-\theta_2 + \varnothing_2 = -\theta_1 + \varnothing_1$, $\varnothing_2 - \varnothing_1 = \theta_2 - \theta_1 = \alpha$

Jadi sudut C_1 dan C_2 diawetkan oleh transformasi $f(z)$ yaitu pemetaannya konformal.

Menurut definisi derivativ f(z) di $z=z_o$ maka :

$$f'(z_o)=\lim_{z\to z_o}\frac{f(z)-f(z_o)}{z-z_o}$$

$$\left|f'(z_o)\right| = \left|\lim_{z\to z_o}\frac{f(z)-f(z_o)}{z-z_o}\right| = \lim_{z\to z_o}\left|\frac{f(z)-f(z_o)}{|z-z_o|}\right|$$

$\dfrac{|f(z)-f(z_o)|}{|z-z_o|}$ menyatakan faktor perbesaran atau perkecilan. Jika harganya lebih kecil satu akan menggambarkan kontraksi dan jika lebih besar satu menggambarkan ekspansi.

Berdasrkan uraian di atas maka dapat diberikan definisi pemetaan konformal sebagai berikut:

Definisi 13.

Fungsi $f:G \longrightarrow C$ yang bersifat

1. Mengawetkan sudut

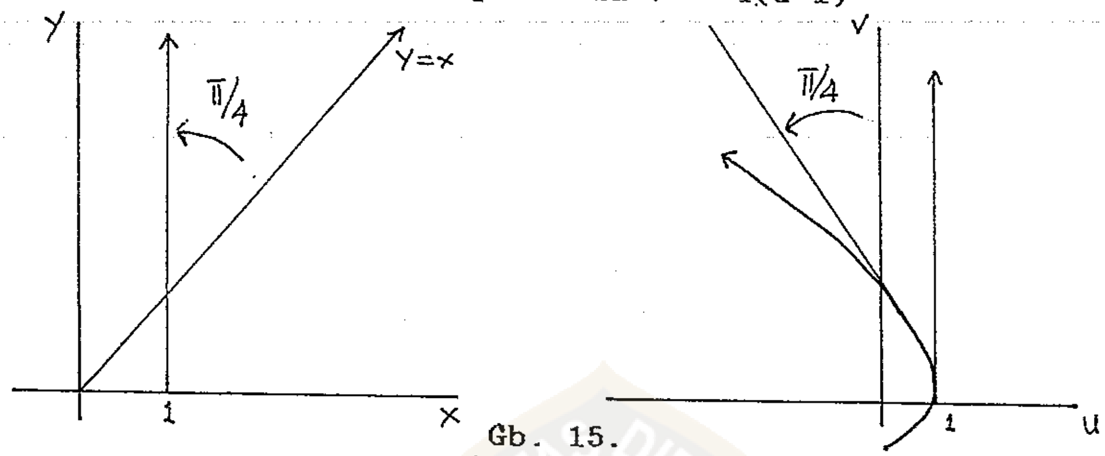
2. $\left|f'(z_o)\right| = \lim_{z\to z_o}\dfrac{|f(z)-f(z_o)|}{|z-z_o|}$ ada

di suatu titik $z_o \in G$, maka f konformal di z_o.

Contoh 11.

$f(z)=z^2$, transformasi $w=f(z)=x^2-y^2+i2xy$ adalah konformal pada titik z=1+i, garis y=x dan x=1 berpotongan. Karena bayangan titik (x,y) pada luasan z adalah titik w yang mempunyai koordinat kartesius $u=x^2-y^2$, $v=2xy$, garis y=x dipetakan ke kurva yang persamaannya u=0, $v=2y^2$

$(-\infty \leq y \leq \infty)$.Bayangan garis $y=x$ adalah separuh atas $v>0$ dari sumbu v. Garis $x=1$ dipetakan ke kurva $u=1-y^2$, $v=2y$, $(-\infty \leq y \leq \infty)$ *) yang membentuk parabola $v^2= -4(u-1)$



Gb. 15.

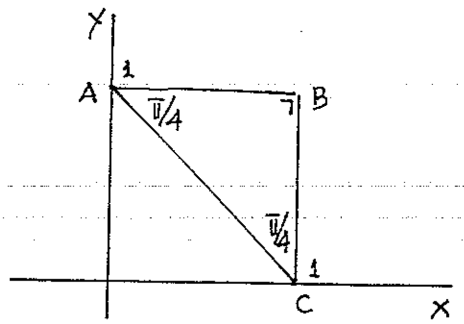
Sudut anatara dua kurva pada bidang $z=\arg(1+i)=\pi/4$. Sudut ini diawetkan oleh transformasi$w=z^2$ pada bidang w.

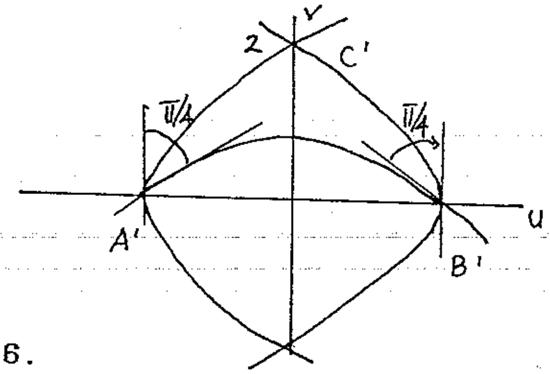
Dari *) maka $dv/du=\dfrac{dv/dy}{du/dy} = \dfrac{2}{-2y} = \dfrac{2}{-v}$

Nilai $dv/du = -1$ untuk $v=2$. Sehingga sudut bayangan dari kurva di bidang z pada bidang w pada titik $w= f(1+i)=2i$ adalah juga $\pi/4$. Yaitu pemetaannya konformal.

Contoh 12.

Daerah yang dibatasi oleh $x=1$, $y=1$, $x+y=1$ ditransformasikan oleh $w=z^2$ secara konformal. Karena $w=z^2$ setara dengan $u+iv=x^2-y^2+2ixy$, maka $u=x^2-y^2, v=2xy$. Sehingga garis $x=1$ dipetakan ke $u=1-y^2$, $v=2y$ atau $u=(1-v^2)/4-1$;garis $x+y=1$ atau $y=1-x$ dipetakan ke $u=x^2-(1-x)^2=2x-1$, $v=2x(1-x)=2x-2x^2$ atau $v=1/2(1-u^2)$;





Gb.16.

Sudut antara garis singgung kurva $u=v^2/4-1$ di $u=-1$ dengan sumbu u adalah $\pi/2$, sedangkan sudut antara garis singgung kurva $v=1/2(1-u^2)$ di $u=-1$ dengan sumbu u adalah: $dv/du=-u$ untuk $u=-1$ maka $dv/du=1$, sehingga sudutnya adalah $\pi/4$. Jadi $A' = \pi/2 - \pi/4 = \pi/4$.

Di titik sudut B′ berlaku, untuk kurva $v=1/2(1-u^2)$;$dv/du=-u$, untuk $u=1$ maka $dv/du = -1$. Jadi sudut antara garis singgungnya di $u=1$ dengan sumbu u adalah $-\pi/4$. Sehingga sudut $B'=\pi/4$. pada titik C′ berlaku $du/dv=\frac{1}{2}v$ untuk $v=2$ maka $du/dv =1$, sehingga sudut garis singgung $u=v^2/4 - 1$ di $v=2$ dengan sumbu v adalah $\pi/4$. $du/dv= -1/2v$ untuk $v=2$ berlaku $du/dv= -1$, sehingga sudut antara garis singgung $u=1-v^2/4$ di $v=2$ dengan sumbu v adalah $-\pi/4$. Sehingga sudut C′ adalah $\pi/2$.

Definisi 14.

Transformasi bilinier atau transformasi pecah didefinisikan sebagai suatu fungsi :

$$w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad , \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

α,β,γ : konstanta komplek.

Transformasi ini memetakan tiga titik berbeda di bidang z ke tiga titik berbeda di bidang w, satu diantaranya mungkin di tak berhingga. Untuk w_k dikaitkan dengan z_k , k=1,2,3 maka :

$$w-w_k = \frac{\alpha z-\beta}{xz+\delta} - \frac{\alpha z_k-\beta}{\gamma z_k+\delta} = \frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)(z-z_k)}{(\gamma z-\delta)(\gamma z_k+\delta)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots *)$$

$$w-w_1 = \frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)(z-z_1)}{(\gamma z+\delta)(\gamma z_1+\delta)} \;,\; w-w_3 = \frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)(z-z_3)}{(\gamma z+\delta)(\gamma z_3+\delta)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots **)$$

w diganti dengan w_2 dan z dengan z_2

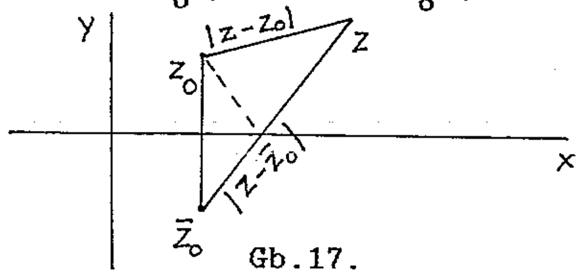
$$w_2-w_1 = \frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)(z_2-z_1)}{(\gamma z_2+\delta)(\gamma z_1+\delta)} \;,\; w_2-w_3 = \frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)(z_2-z_3)}{(\gamma z_2+\delta)(\gamma z_3+\delta)} \quad \ldots\ldots ***)$$

Dari **) dan ***) diperoleh $\dfrac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)} = \dfrac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}$.

Jika z_o terletak pada bagian atas separuh bidang z, maka transformasi mobius :

$w = e^{i\theta}\left(\dfrac{z-z_o}{z-\bar{z}_o}\right)$ memetakan separuh bidang atas tersebut kebagian dalam lingkaran satuan di bidang w, yaitu $|w|\leq 1$. Hal ini dapat dijelaskan sebagai berikut

$$|w| = \left|e^{i\theta}\left(\frac{z-z_o}{z-\bar{z}_o}\right)\right| = \left|\frac{z-z_o}{z-\bar{z}_o}\right|$$



Gb.17.

Dari gb.17 bila z terletak pada separuh bidang bagian atas $|z-z_o| \le |z-\bar{z}_o|$, maka kesamaan berlaku jika dan hanya jika z terletak pada sumbu x. Maka $|w| \leqslant 1$

Contoh 13.

Transformasi pecah yang memetakan separuh bidang z bagian atas ke lingkaran satuan, sehingga z=i dipetakan ke w=0, titik di takhingga dipetakan ke w=-1 adalah; w=0 berkaitan dengan z=i, w=-1 berkaitan dengan $z=\infty$, diperoleh: $0=e^{i\theta}\left(\frac{i-z_o}{i-\bar{z}_o}\right)$, sehingga $z_o=i$

$$-1=e^{i\theta}\left(\frac{\infty-z_o}{\infty-\bar{z}_o}\right) \text{, sehingga } e^{i\theta_o}=-1$$

Transformasi yang diinginkan adalah $w = -1\left(\frac{z-i}{z+i}\right) = \frac{i-z}{i+z}$

Gb.18.