BAB II

METODE JACKKNIFE

Metode Jackknife pada dasarnya bertujuan memperbaiki suatu penduga dalam arti mengurangi atau jika mungkin menghilangkan bias dari suatu penduga. Metode ini terutama berguna untuk memperbaiki penduga yang akan digunakan dengan sampel berukuran n, dimana n tidak terlalu besar , dan bias penduga tersebut sebanding dengan $\frac{1}{n}$.

2.1. DASAR PEMBENTUKAN METODE JACKKNIFFE

Misal $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ adalah data yang ada, berupa sampel random berukuran n. Berdasarkan data itu ingin diduga parameter populasi θ. Misalkan $\hat{\theta}$ adalah penduga bias untuk θ yang didapat berdasarkan semua data tersebut, dan biasanya adalah $E(\hat{\theta} - \theta) = \frac{a}{n}$, dimana a adalah fungsi dari θ, atau berupa konstanta, tetapi bukan fungsi dari n.

Salah satu cara yang dapat dilakukan untuk mengurangi bias tersebut adalah dengan berusaha memperbanyak nilai-nilai penduga tersebut, misalnya dengan mengambil sampel sebanyak M dari data tersebut (M < n) secara acak kemudian hitung θ , yaitu nilai θ berdasarkan sampel berukuran M tersebut. Misalkan cara ini dilakukan sebanyak m kali, maka akan didapat $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$, ... , $\hat{\theta}_m$ yang masing-masing mempunyai bias

$\frac{a}{M_1}, \frac{a}{M_2}, \ldots\ldots\ldots, \frac{a}{M_m}$. Dari sini kemudian diambil

$\hat{\theta}^* = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \hat{\theta}_i$ yaitu rata-rata dari $\hat{\theta}_i$.

Pengambilan sampel tersebut dapat dilakukan dengan pengembalian. Jika pengambilan dilakukan dengan pengembalian, maka dapat terjadi satu atau beberapa data terpakai berkali-kali sehingga lebih banyak terpakai dibandingkan data lainnya. Akibatnya pengaruh tiap data terhadap $\hat{\theta}^*$ tidak sama. Selain itu, $\hat{\theta}^*$ juga masih bias karena $E(\hat{\theta}^* - \theta) = \frac{a}{m} \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{M_i}$.

Untuk mencegah adanya pengaruh satu atau sekelompok data yang berlebihan, maka pengambilan data dilakukan dengan tanpa pengembalian. Selain itu agar setiap $\hat{\theta}_i$ yang di dapat mempunyai bobot pengaruh yang sama terhadap $\hat{\theta}^*$, maka banyak sampel yang diambil dalam setiap pengambilan harus sama besar, misalkan sebanyak M (M < n). Cara ini terasa lebih baik dibandingkan cara sebelumnya, tetapi hasil yang didapat masih bias, karena :

$$E\,|\hat{\theta}^* - \theta| = \frac{|a|}{m} \sum^{m} \frac{1}{M} = \frac{|a|}{M} > \frac{|a|}{n}$$

Selain itu, cara ini tidak selalu dapat dilakukan, seperti misalnya jika n berupa bilangan prima dan kita ingin menduga variansi, maka yang dapat terjadi adalah M = 1 dan variansi akan 0 atau mungkin tak dapat dihitung (bergantung pada bentuk penduga yang digunakan).

Cara lain yang agak mirip dengan cara sebelumnya adalah dengan mengelompokkan data menjadi N kelompok yang masing-masing beranggotakan M ($NM = n$, dan $M \geq 1$). Misal $\hat{\theta}_i$ adalah nilai $\hat{\theta}$ yang dihitung dengan tidak mengikutsertakan kelompok ke-i ($i = 1, 2, \ldots\ldots, N$). Banyak data yang dilibatkan dalam perhitungan $\hat{\theta}_i$ adalah $n - M$. Dari $\hat{\theta}_i$ ini kemudian diambil $\hat{\theta}^* = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}\hat{\theta}_i$ sebagai penduga θ.

Misal $X_{11}, \ldots, X_{1M}, X_{21}, \ldots, X_{2M}, \ldots, X_{N1}, \ldots, X_{NM}$, adalah data yang sudah dikelompokkan dalam N kelompok yang tiap kelompok beranggotakan M($n = NM$). Rata-rata dari semua peubah acak ini adalah :

$$\bar{X} = \frac{1}{NM} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} X_{ij} .$$

Jika salah satu kelompok, misal kelompok ke-m tidak diikutsertakan, maka rata-ratanya menjadi $\bar{X}_{(m)}$, dimana :

$$\bar{X}_{(m)} = \frac{1}{(N-1)M} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^{N} \sum_{j=1}^{M} X_{ij} .$$

Rata-rata kelompok ke-m dapat dinyatakan dalam $\bar{X}$ dan $\bar{X}_{(m)}$ sebagai berikut :

$$\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M} X_{mj} = \frac{1}{M}\left[\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} X_{ij} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^{N} \sum_{j=1}^{M} X_{ij} \right]$$

$$= N\left[\frac{1}{NM} \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} X_{ij}\right] - (N - 1)\left[\frac{1}{(N-1)M} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^{N}\sum_{j=1}^{M} X_{ij}\right]$$

$$= N\bar{X} - (N - 1)\bar{X}_{(m)} .$$

Bilangan "N" dapat dianggap bobot dari $\bar{X}$ (karena melibatkan N kelompok), dan "(N - 1)" dianggap bobot dari $\bar{X}_{(m)}$ (karena melibatkan N - 1 kelompok).

Walaupun contoh di atas adalah contoh yang diterapkan untuk X, yang merupakan penduga tak bias untuk rata-rata populasi μ, tetapi contoh itu memberikan gambaran mengenai bentuk yang digunakan untuk menyatakan $\hat{\theta}_i^*$, yaitu :

$$\hat{\theta}_i^* = N\hat{\theta} - (N - 1)\hat{\theta}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Dari bentuk ini akan didapat N harga $\hat{\theta}_i^*$. Untuk mendapatkan satu bentuk penduga titik untuk θ, maka diambil rata-rata dari $\hat{\theta}_i^*$ tersebut, yaitu :

$$\bar{\hat{\theta}}^* = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\hat{\theta}_i^* = N\hat{\theta} - (N - 1)\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\hat{\theta}_i\right]$$

Kebaikan dari bentuk ini adalah $\bar{\hat{\theta}}_i^*$ merupakan penduga yang tak bias, karena :

$$E\left[\bar{\hat{\theta}}_i^*\right] = N\,E(\hat{\theta}) - (N - 1)\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}E(\hat{\theta}_i)\right]$$
$$= N\left[\theta + \frac{a}{NM}\right] - (N - 1)\left[\theta + \frac{a}{(N - 1)M}\right]$$
$$= \theta.$$

2.2. METODE JACKKNIFE

Misal diketahui peubah acak $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ dan kita ingin menduga parameter populasi θ berdasarkan peubah acak tersebut. Misal $\hat{\theta}$ adalah penduga dari θ ($\hat{\theta}$ ini untuk selanjutnya disebut penduga awal dari θ). Kelompokkan peubah acak itu menjadi N kelompok (N > 1) yang masing-masing beranggotakan M (n = NM). Tentukan $\hat{\theta}_i$, yaitu harga $\hat{\theta}$ yang didapat dengan tidak mengikutsertakan kelompok ke-i (i = 1,2, ..., N).

Definisikan nilai semu (pseudovalue) $J_i(\hat{\theta}$ sebagai berikut :

$$J_i(\hat{\theta}) = N\hat{\theta} - (N - 1)\hat{\theta}_i \ , \ i = 1, 2, \ldots , N.$$

Nilai $J_i(\hat{\theta})$ ini dapat dianggap sebagai dugaan $\hat{\theta}$ untuk kelompok ke-i, meskipun dalam perhitungannya peubah acak dalam kelompok ke-i tidak diikutsertakan. Itulah sebabnya $J_i(\hat{\theta})$ disebut nilai semu. Dengan cara ini akan didapat N harga $J_i(\hat{\theta})$. Untuk mendapatkan satu penduga titik, maka diambil rata-rata dari $J_1(\hat{\theta}), J_2(\hat{\theta}), \ldots\ldots, J_N(\hat{\theta})$, yaitu :

$$J(\hat{\theta}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} J_i(\hat{\theta}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (N\hat{\theta} - (N - 1)\hat{\theta}_i)$$

maka $J(\hat{\theta}) = N\hat{\theta} - (N - 1)\bar{\hat{\theta}}_i$, dimana $\bar{\hat{\theta}}_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \hat{\theta}_i$

DEFINISI 2.1.

$J(\hat{\theta})$ seperti di atas disebut penduga jakknife dari θ.

Dalam penduga Jackknife ini selalu dibutuhkan suatu penduga awal. Oleh karena itu metode ini lebih tepat dikatakan sebagai metode <u>Perbaikan Penduga</u> .

Metode Jackknife yang paling sering digunakan adalah metode yang menggunakan M = 1 (satu peubah acak dalam tiap kelompok). Sebenarnya tidak ada ketentuan mengenai cara pengelompokkan ini, tetapi dengan menggunakan M = 1 diharapkan akan memberikan hasil yang lebih baik (mempunyai bias lebih kecil) dibandingkan jika diambil $M > 1$, karena dalam perhitungan $\hat{\theta}_i$ akan melibatkan peubah acak yang lebih banyak sehingga hasilnya diharapkan memiliki bias yang makin kecil, walaupun hal ini tidak selalu berlaku umum.

2.3. SIFAT-SIFAT PENDUGA JACKKNIFE DALAM MEREDUKSI BIAS PENDUGA

Pada permulaan bab ini, telah diperlihatkan bahwa penduga Jackknife ini dapat mereduksi bias suatu penduga yang sebanding dengan $\frac{1}{n}$. Di sini akan diperlihatkan bahwa bentuk penduga Jackknife ini juga dapat mereduksi bias yang lebih umum, yaitu berbentuk $B(\theta,n) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{n^i}$.

Misal $\hat{\theta}$ penduga θ yang didefinisikan pada peubah acak berukuran n sedemikian sehingga $E(\hat{\theta}) = \theta + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{n^i}$ dimana a_i adalah fungsi dari θ saja (bukan fungsi dari n). Kelompokkan peubah acak tersebut menjadi N kelompok (N faktor dari n) sehingga tiap kelompok beranggotakan M ($n = NM$), maka :

$$E(\hat{\theta}) = \theta + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{N^i M^i}$$

dan
$$E\left[\bar{\theta}_i\right] = \theta + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{(n-M)^i}$$

$$= \theta + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{(N-1)^i M^i}$$

sehingga

$$E(J(\hat{\Theta})) = N\ E(\hat{\Theta}) - (N - 1)\ E\left[\ \bar{\hat{\Theta}}_i\ \right]$$

$$= N\left[\Theta + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{N^i M^i}\right] - (N - 1)\left[\Theta + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{(N-1)^i M^i}\right]$$

$$E(J(\hat{\Theta})) = \Theta + \sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{Na_i}{N^i M^i} - \frac{(N-1)a_i}{(N-1)^i M^i}\right]$$

$$= \Theta - \frac{a_2}{M^2 N(N-1)} - \frac{a_3(2N-1)}{M^3 N^2 (N-1)^2} - \ldots\ldots\ldots$$

$$\text{maka}\quad E(J(\hat{\Theta})) = \Theta - \frac{a_2}{n(n-M)} - \frac{a_3(2n-M)}{n^2(n-M)^2} - \ldots\ldots$$

Dari hasil diatas, jika $a_1 \neq 0$ maka bias $J(\hat{\Theta})$ berorde n^{-2} sedangkan $\hat{\Theta}$ berorde n^{-1}. Ini berarti $J(\hat{\Theta})$ lebih kecil kebiasannya dibandingkan $\hat{\Theta}$. Jika $a_1 \neq 0$ dan $a_2, a_3,\ \ldots\ldots = 0$, maka $J(\hat{\Theta})$ menjadi tidak bias.

Hasil di atas menunjukkan salah satu bentuk bias penduga yang dapat direduksi oleh metode Jackknife. Untuk dapat menentukan bilangan metode ini dapat berguna dalam mereduksi bias suatu penduga secara lebih umum, kita memerlukan bentuk bias dari $J(\hat{\Theta})$ itu sendiri. Hal ini diberikan dalam teorema berikut :

TEOREMA 2.1.

Misal $\hat{\Theta}$ penduga Θ yang didefinisikan pada peubah acak $X_{11}, \ldots\ldots, X_{1M}, X_{21}, \ldots\ldots, X_{2M}, \ldots\ldots, X_{N1}, \ldots\ldots, X_{NM}$. Misal $E(\hat{\Theta} - \Theta) = B(n,\Theta)$, dimana $n = NM$, maka :

$$E(J(\hat{\Theta})) = \Theta + B(n,\Theta) + (N - 1)\Delta B(NM,\Theta)$$

dimana $\Delta B(NM,\Theta) = B(NM,\Theta) - B(NM-M,\Theta)$.

BUKTI :

Karena $X_{11},\ldots,X_{1M},X_{21},\ldots,X_{2M},\ldots,X_{N1},\ldots,X_{NM}$ peubah acak, maka $X_{11},\ldots,X_{1M},X_{21},\ldots,X_{2M},\ldots,X_{N1},\ldots,X_{NM}$ saling bebas dan berdistribusi sama (identik), sehingga :

$$E\left[\bar{\hat{\theta}}_i\right] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E(\hat{\theta}_i)$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Big[\theta + B(n-M,\theta)\Big]$$

$$= \theta + B(n-M,\theta)$$

$$= \theta + B(NM-M,\theta).$$

Tetapi, $J(\hat{\theta}) = N\hat{\theta} - (N-1)\bar{\hat{\theta}}_i$

$$= \hat{\theta} + (N-1)(\hat{\theta} - \bar{\hat{\theta}}_i)$$

$$= \hat{\theta} + (N-1)[(\hat{\theta} - \theta) - (\bar{\hat{\theta}}_i - \theta)]$$

maka $E(J(\hat{\theta})) = E(\hat{\theta}) + (N-1)[E(\hat{\theta} - \theta) - E(\bar{\hat{\theta}}_i - \theta)]$

$$= [\theta + B(n,\theta)] + (N-1)\,[B(NM,\theta) - B(NM-M,\theta)]$$

$$E(J(\hat{\theta})) = \theta + B(n,\theta) + (N-1)\Delta B(NM,\theta).$$

Catatan : Khususnya untuk $M = 1$, maka :

$$E(\hat{J}(\theta)) = \theta + B(n,\theta) + (n-1)\Delta B(n,\theta)$$

dimana $\Delta B(n,\theta) = B(n,\theta) - B(n-1,\theta)$

Teorema 2.1. ini hanya dapat digunakan jika bentuk biasnya diketahui. Teorema ini dapat digunakan untuk menunjukan sifat berikut.

TEOREMA 2.2.

Misal $\hat{\theta}$ penduga θ yang didefinisikan pada peubah acak berukuran n. Misal : $E(\hat{\theta}) = \theta + B(n,\theta)$ dimana : $\lim_{n\to\infty} B(n,\theta) = 0$, maka berlaku $B(n,\theta) = 0$ jika dan hanya jika $J(\hat{\theta}) = \hat{\theta}$.

BUKTI :

($\Rightarrow$) Diketahui $B(n,\theta) = 0$. Menurut Teoreme 2.1, didapat $E(J(\hat{\theta}) - \theta) = 0$ sehingga $E(J(\hat{\theta})) = \theta$ ($J(\hat{\theta})$ penduga penduga tak bias untuk θ). Ini mengakibatkan $E(J\hat{\theta}) - \hat{\theta}) = 0$ [karena keduanya penduga tak bias] untuk setiap n, dan untuk setiap peubah acak berukuran n sehingga haruslah $J(\hat{\theta}) = \hat{\theta}$.

($\Leftarrow$) Diketahui $J(\hat{\theta}) = \hat{\theta}$, maka $E(J(\hat{\theta})) = E(\hat{\theta})$. Menurut teorema 2.1,

$$\theta + B(NM,\theta) + (N - 1)\Delta B(NM,\theta) = \theta + B(n,\theta)$$

sehingga didapat $\Delta B(NM,\theta) = 0$ atau

$$B(NM,\theta) - B(NM-M,\theta) = 0 .$$

Berarti $B(NM,\theta) = B(NM-M,\theta)$, atau B hanya berupa fungsi dari θ saja. Jadi, dapat ditulis :

$$B(n,\theta) = C(\theta).$$

Tetapi,

$$\lim_{n\to\infty} B(n,\theta) = 0 \quad \text{sehingga} \quad B(NM,\theta) = C(\theta) = 0.$$

Jadi, $B(n,\theta) = 0$.

Catatan : Kondisi $\lim_{n\to\infty} B(n,\theta) = 0$ berarti bahwa $\hat{\theta}$ adalah penduga yang konsisten. Kondisi ini sebenarnya tidak terlalu diperlukan dalam teorema di atas, tetapi kondisi ini membuat teorema menjadi lebih mudah dibuktikan tanpa mempengaruhi teorema itu sendiri.

Teorema 2.2, ini dapat digunakan untuk menguji apakah suatu penduga itu bias atau tidak, tanpa harus diketahui bentuk biasnya. Akibatnya, teorema ini dapat digunakan secara lebih luas, dibandingkan teorema 2.1.

Selanjutnya, teorema 2.1, akan digunakan untuk membuat suatu kriteria bilamana metode ini berguna untuk mereduksi bias, tetapi sebelumnya diperlukan lemma 2.1, berikut ini.

LEMMA 2.1.

Misal $\{a_n\}$ dan $\{b_n\}$ adalah barisan bilangan real sedemikian sehingga $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, dan $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ dan barisan $\{b_n\}$ turun monoton, maka jika

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$$

ada berhingga, atau tak berhingga maka berlaku

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta a_n}{\Delta b_n}$$

dimana $\Delta a_n = a_n - a_{n-1}$, dan $\Delta b_n = b_n - b_{n-1}$.

BUKTI :

Jika $\{b_n\}$ monboton turun, maka $b_n > 0$ $\forall n = 1,2,...$

Ada tiga kasus yang dapat terjadi, yaitu :

<u>Kasus 1.</u>

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$ ada dan berhingga, misal sama dengan L, berati $\forall\varepsilon > 0$, $\exists$ $m \in \mathbb{N}$ (himpunan bilangan asli), sehingga :

$$\left| \frac{a_t - a_{t-1}}{b_t - b_{t-1}} - L \right| < \varepsilon, \text{ jika } t > m.$$

Karena $\left| \dfrac{a_t - a_{t-1}}{b_t - b_{t-1}} - L \right| < \varepsilon$, maka :

$$(L - \varepsilon) < \frac{a_t - a_{t-1}}{b_t - b_{t-1}} < (L + \varepsilon).$$

Karena $\{b_n\}$ monoton turun, maka $b_t - b_{t-1} < 0$, sehingga diperoleh :

$$(L-\varepsilon)\left[b_t - b_{t-1}\right] < a_t - a_{t-1} > (L+\varepsilon)\left[b_t - b_{t-1}\right].$$

Untuk $t = n$ $(n > m)$ di dapat

$$(L-\varepsilon)\left[b_n - b_{n-1}\right] < a_n - a_{n-1} > (L+\varepsilon)\left[b_n - b_{n-1}\right].$$

Untuk $t = n + 1$ di dapat

$$(L-\varepsilon)\left[b_{n+1} - b_n\right] < a_{n+1} - a_n > (L+\varepsilon)\left[b_{n+1} - b_n\right].$$

Untuk $t = n + 2$ didapat

$$(L-\varepsilon)\left[b_{n+2} - b_{n+1}\right] < a_{n+2} - a_{n+1} > (L+\varepsilon)\left[b_{n+2} - b_{n+1}\right].$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

Untuk $t = n + p$ didapat

$$(L-\varepsilon)\left[b_{n+p} - b_{n+p-1}\right] < a_{n+p} - a_{n+p-1} > (L+\varepsilon)\left[b_{n+p} - b_{n+p-1}\right].$$

Jika dijumlahkan seluruhnya akan didapat :

$$(L-\varepsilon)\left[b_{n+p} - b_{n-1}\right] < a_{n+p} - a_{n-1} > (L+\varepsilon)\left[b_{n+p} - b_{n-1}\right].$$

Untuk $p \to \infty$ didapat $a_{n+p} \to 0$, $b_{n+p} \to 0$, dan

$$(L - \varepsilon)[-b_{n-1}] > [-a_{n-1}] > (L + \varepsilon)[-b_{n-1}]$$

$$(L - \varepsilon)[b_{n-1}] < [a_{n-1}] < (L + \varepsilon)[b_{n-1}]$$

$$-\varepsilon\, b_{n-1} < a_{n-1} - Lb_{n-1} < \varepsilon\, b_{n-1}$$

$$\left|a_{n-1} - Lb_{n-1}\right| < \varepsilon\, b_{n-1}$$

Karena $b_{n-1} > 0$, maka didapat $\left|\dfrac{a_{n-1}}{b_{n-1}} - L\right| < \varepsilon$, $\forall n > m$.

Ini berarti $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n-1}}{b_{n-1}} = L$.

Dengan mengganti $n - 1$ menjadi n, diperoleh

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L = \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta a_n}{\Delta b_n}.$$

Kasus 2.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta a_n}{\Delta b_n} = +\infty,$$

ini berarti $\forall N > 0$, $\exists m \in \mathbb{N}$ sehingga

$$\frac{a_t - a_{t-1}}{b_t - b_{t-1}} > N, \text{ jika } t > m.$$

Karena $\{b_n\}$ monoton turun, maka $b_t - b_{t-1} < 0$,

sehingga didapat $a_t - a_{t-1} < N\,(b_t - b_{t-1})$.

Untuk $t = n$ $(n > m)$; $a_n - a_{n-1} < N\,(b_n - b_{n-1})$.

Untuk $t = n + 1$; $a_{n+1} - a_n < N\,(b_{n+1} - b_n)$.

Untuk $t = n + 2$; $a_{n+2} - a_{n+1} < N\,(b_{n+2} - b_{n+1})$.

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

Untuk $t = n + p$; $a_{n+p} - a_{n+p-1} < N\,(b_{n+p} - b_{n+p-1})$.

Jika dijumlahkan didapat $a_{n+p} - a_{n-1} < N(b_{n+p} - b_{n-1})$.

Untuk $p \to \infty$ didapat $-a_{n-1} < N(-b_{n-1})$.

Karena $b_{n-1} > 0$, maka $\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} > N$, $\forall n > m$.

Ini berarti $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} = +\infty$.

Dengan mengganti $n - 1$ dengan n diperoleh :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty = \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta a_n}{\Delta b_n} .$$

Kasus 3.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta a_n}{\Delta b_n} = -\infty ,$$

maka $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-\Delta a_n}{\Delta b_n} = +\infty$.

Dari kasus 2, telah didapat

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\Delta a_n}{\Delta b_n} , \quad \text{maka}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta a_n}{\Delta b_n} = -\infty$$

Jika $\{b_n\}$ monoton naik, maka $\{-b_n\}$ monoton turun.

Dengan menggunakan hasil di atas, diperoleh :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{-b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta a_n}{\Delta(-b_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta a_n}{-\Delta b_n - (b_{n-1})}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta a_n}{-\Delta b_n}$$

Jadi, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\Delta a_n}{\Delta b_n}$.

Dengan lemma 2.1, ini dapat kita buktikan teorema 2.3, berikut :

TEOREMA 2.3.

Misal $\hat{\theta}$ penduga θ dimana $E(\hat{\theta}) = \theta + B(n,\theta)$

$$E(\hat{\theta}) = \theta + B(n,\theta)$$

Jika ada suatu p > 0 sehingga :

$\lim_{n\to\infty} n^p B(n,\theta) = C(\theta) \neq 0$, atau $\pm\infty$, dan

$\lim_{n\to\infty} n^{p+1} \Delta B(n,\theta)$ ada, maka :

(i) Jika p = 1, maka $J(\hat{\theta})$ L.O.B.E. $\hat{\theta}$,

(ii) Jika $p < 2$ dan $p \neq 1$, maka $J(\hat{\theta})$ B.S.O.B.E. $\hat{\theta}$.

(iii) Jika p = 2, maka $J(\hat{\theta}$ S.O.B.E. $\hat{\theta}$

(iv) Jika p > 2, maka $\hat{\theta}$ B.S.O.B.E. $J(\hat{\theta})$.

Catatan : Teorema ini umumnya digunakan untuk M = 1, sehingga $\Delta B(n,\theta) = B(n,\theta) - B(n-1,\theta)$.

BUKTI :

Mula – mula akan ditunjukan bahwa $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\Delta B(n,\theta)}{\Delta(n^{-p})}$ ada dimana $\Delta(n^{-p}) = n^{-p} - (n-1)^{-p}$.

$$\text{Karena } \frac{\Delta B(n,\theta)}{\Delta(n^{-p})} = \frac{\Delta B(n,\theta)}{n^{-p} - (n-1)^{-p}} \cdot \frac{n^{p+1}}{n^{p+1}}$$

$$= \frac{n^{p+1}\Delta B(n,\theta)}{n - n\left[1 + \frac{1}{(n-1)}\right]^p}$$

dan $\lim_{n\to\infty} n^{p+1}\Delta B(n,\theta)$ ada, maka yang perlu dibuktikan adalah $\lim_{n\to\infty}\left[n - n\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^p\right]$ ada.

$$\lim_{n\to\infty}\left[n - n\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^p\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1 - [1 + 1/(n-1)]^p}{1/n}\right].$$

Misal $t = 1/n$, $t \in \mathbb{R}$ (agar dalil L'hospital dapat digunakan), maka $n \to \infty \Rightarrow t \to 0$, dan

$$\lim_{n\to\infty}\left[n - n\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^p\right] = \lim_{t\to 0}\left[\frac{1 - [1 + t/(1-t)]^p}{t}\right]$$

dengan menggunakan teorema L'Hospital di dapat :

$$\lim_{n\to\infty}\left[n - n\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{p}\right] = \lim_{t\to 0}\frac{-p[1 + t/(1-t)]^{p-1}}{(1-t)^{2}}$$

$$= -p \quad \text{(ada)}$$

maka $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\Delta B(n,\theta)}{\Delta(n^{-p})}\right]$ ada.

Karena $B(n,\theta) \to 0$ untuk $n \to \infty$, n^{-p} konvergen monoton menuju 0, dan $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\Delta B(n,\theta)}{\Delta(n^{-p})}\right]$ ada, maka menurut lemma 2.1,

$$C(\theta) = \lim_{n\to\infty}\frac{B(n,\theta)}{(n^{-p})} = \lim_{n\to\infty}\frac{\Delta B(n,\theta)}{\Delta(n^{-p})}$$

sehingga, dengan menggunakan teorema 2.1, didapat :

$$\left|\lim_{n\to\infty}\frac{E(J(\hat{\theta}) - \theta)}{E(\hat{\theta} - \theta)}\right| = \left|\lim_{n\to\infty}\frac{B(n,\theta) + (n-1)\Delta B(n,\theta)}{B(n,\theta)}\right|$$

$$= \left|1 + \lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)\Delta B(n,\theta)}{B(n,\theta)}\right|$$

$$= \left|1 + \lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)^{p+1}\Delta(n^{-p})[\Delta B(n,\theta)/\Delta(n^{-p})]}{(n-1)^{p}B(n,\theta)}\right|$$

$$= \left|1 + \lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)^{p+1}\ \Delta(n^{-p})\ C(\theta)}{C(\theta)}\right|$$

$$= \left|1 + \lim_{n\to\infty}(n-1)^{p+1}\Delta(n^{-p})\right|$$

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)^{p+1}\Delta(n^{-p}) = \lim_{n\to\infty}(n-1)^{p+1}\left(\frac{1}{n^{p}} - \frac{1}{(n-1)^{p}}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}(n-1)^{p+1}\left(\frac{(n-1)^{p} - n^{p}}{n^{p}\ (n-1)^{p}}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}(n-1)\left(\frac{(n-1)^{p} - n^{p}}{n^{p}}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} (n-1)\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^p - 1\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^p - 1\right]}{\left(\frac{1}{n-1}\right)}$$

misal $t = \dfrac{1}{n-1}$, $t \in \mathbb{R}$, maka : $n \to \infty \Rightarrow t \to 0$,

sehingga

$$\lim_{n\to\infty} (n-1)^{p+1}\Delta(n^{-p}) = \lim_{t\to 0} \frac{\left(1-\frac{t}{1+t}\right)^p - 1}{t}$$

dengan menggunakan teorema L'Hospital di dapat :

$$\lim_{n\to\infty} (n-1)^{p+1}\Delta(n^{-p}) = \lim_{t\to 0} \frac{-p\left[1-\frac{t}{1+t}\right]^{p-1}}{(1+t)^2} = -p$$

Jadi, $\left|\lim_{n\to\infty} \dfrac{E(J(\hat{\theta}) - \theta)}{E(\hat{\theta} - \theta)}\right| = |1 - p|$.

Jika $p = 1$, maka $|1 - p| = 0$, berarti $J(\theta)$ L.O.B.E. θ.

Jika $p < 2$ dan $p \neq 1$, maka $0 < |1 - p| < 1$, berarti $J(\theta)$ B.S.O.B.E. θ.

Jika $P = 2$, maka $|1 - p| = 1$, berarti $J(\theta)$ S.O.B.E. θ.

Jika $p > 2$, maka $|1 - p| > 1$, berarti θ B.S.O.B.E. $J(\theta)$.

Teorema 2.3, ini hanya dapat digunakan jika bentuk bias penduga awalnya diketahui. Pada prakteknya, tidak selalu bentuk bias ini diketahui. Oleh karena itu, dari teorema-teorema di atas, yang dapat digunakan secara lebih luas adalah teorema 2.2.

Dari sifat-sifat di atas tampak bahwa metode Jakknife ini mungkin akan bermanfaat terutama jika diterapkan untuk bias yang merupakan fungsi dari n dan θ.