B A B III

AUTOREGRESSIVE MOVING AVERAGE (A R M A)

Pada bab ini akan diperkenalkan model Autoregressive Moving Average (n,n-1) / ARMA (n,n-1) dan model-model untuk n = 1, n = 2. Kemudian juga akan dibahas karakteristik dari model ARMA yaitu : Fungsi Green, Fungsi Invers dan Fungsi Autokovarian.

3.1 Model ARMA (n,n-1)

Definisi 3.1

Model ARMA (n,n-1) didefinisikan sebagai berikut :

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} - \dots - \phi_n X_{t-n} = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_{n-1} a_{t-n+1} \quad \dots\dots\dots(3.1.1)$$

$a_t \sim$ NID $(0,\sigma_a^2)$

dimana : $X_t = \dot{X}_t - \bar{X}$

$\dot{X}_t$ = Input data

$\bar{X}$ = Rata-rata

a_t = goncangan random (white niose)

Assumsi pada ARMA (n,n-1)

Assumsi yang berlaku untuk model ARMA (n,n-1) adalah

a_t independent terhadap: a_{t-n}, a_{t-n-1}, ...

a_t independent terhadap: X_{t-n-1}, X_{t-n-2}, ...

3.1.1 Model ARMA (1,0) / AR (1)

Model ini diperoleh dari model ARMA (n,n-1) dengan mengambil **n=1**, sehingga model ini mempunyai bentuk:

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} = a_t \qquad \text{.......(3.1.2)}$$

$$a_t \sim \text{NID}\ (0,\sigma_a^2)$$

Model ini nampak seperti model regresi sederhana, tetapi variabelnya bergantung pada dirinya sendiri, maka dikatakan sebagai model Autoregressive. Model ini sama seperti model Regresi biasa, hanya indek nominalnya yang berubah, yaitu:

$$X_{t+1} = \phi_1 X_t + a_{t+1}$$

$$X_{t+2} = \phi_1 X_{t+1} + a_{t+2}$$

dan

$$X_{t-1} = \phi_1 X_{t-2} + a_{t-1}$$

$$X_{t-2} = \phi_1 X_{t-3} + a_{t-2}$$

dan seterusnya.

Asumsi-asumsi pada model AR (1)

Asumsi yang berlaku pada model AR (1) adalah :

a_t independen terhadap: a_{t-1}, a_{t-2}, ...

a_t independen terhadap: X_{t-2}, X_{t-3}, ...

3.1.2 Model ARMA (2.1)

Model ini diperoleh dari model ARMA (n,n-1) dengan mengambil n=2, sehingga model ini mempunyai bentuk :

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} = a_t - \theta_1 a_{t-1} \qquad .....(3.1.3)$$

$$a_t \sim \text{NID}(0, \sigma_a^2)$$

Assumsi pada model ARMA (2,1)

Seperti pada AR (1), a_t pada ARMA (2,1) berdistribusi normal dengan mean nol dan varian σ_a^2. Assumsi dasar dari model ARMA (2,1) adalah :

a_t independent terhadap: a_{t-2}, a_{t-3}, ...

a_t independent terhadap: X_{t-3}, X_{t-4}, ...

3.2 KARAKTERISTIK MODEL ARMA

Pada kenyataannya model ARMA memiliki struktur yang lebih mendalam bila dibandingkan dengan model Regresi. Perbedaan mendasar antara model ARMA dengan model Regresi adalah bahwa sistim ARMA dinamis sedangkan sistim Regresi adalah statis. Artinya, bahwa pada model ARMA satu gangguan a_t akan terus berpengaruh pada sistim sampai fase tertentu, sedangkan pada model Regeresi satu gangguan ε_t hanya berpengaruh pada saat t ,sehingga pada saat **t+1** gangguan ε_t dikesampingkan. Oleh karena itu sistim Regresi hanya mempunyai satu ketergantungan yang statis dari satu variabel terhadap variabel yang lain. Pada bagian ini akan dibicarakan secara singkat karakteristik tersebut yang menggambarkan kedinamikan dari model ARMA.

3.2.1. Fungsi Green

Fungsi Green akan menjadikan model ARMA dalam bentuk kedinamikan dari a_t sebelumnya. Fungsi Green juga akan menjelaskan bagaimana a_t mempengaruhi respon X_t dengan mengekspresikannya sebagai kombinasi linier dari a_t. Berikut ini akan ditunjukan fungsi Green dalam AR (1), ARMA (2.1), ARMA (n,n-1) dan kestabilannya.

Sistem AR (1) dan Kestabilannya

Model AR (1) mempunyai bentuk sebagai berikut :

$$X_t = \theta_1 X_{t-1} + a_t$$

dengan menggunakan operator *Backshift* B yang didefinisikan dengan:

$$B\, X_t = X_{t-1} \text{ dan } B^j X_t = X_{t-j} \qquad \text{........(3.2.1)}$$

model AR (1) menjadi:

$$(1 - \phi_1 B)\, X_t = a_t \qquad \text{......(3.2.2)}$$

Fungsi Green dari model AR (1) bisa diperoleh dengan menggunakan metode pembalikan :

$$X_t = \frac{a_t}{(1 - \phi_1 B)}$$

$$= (1 + \phi_1 B + \phi_1^2 B^2 + \phi_1^3 B^3 + \dots)\, a_t$$

$$= a_t + \phi_1 a_{t-1} + \phi_1^2 a_{t-2} + \ldots$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j \, a_{t-j}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} G_j \, a_{t-j} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \; (3.2.3)$$

$$G_j = \phi_1^j$$

G_j dikatakan sebagai fungsi Green.

Untuk mendapatkan penyelesaian yang berhingga dari model AR (1), akan diberikan suatu batasan sebagai berikut:

Model AR (1) mempunyai penyelesaian :

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1 \, a_{t-j}$$

agar X_t mempunyai nilai yang berhingga, maka haruslah nilai $|\phi_1| \leq 1$. Syarat ini dikatakan sebagai kondisi kestabilan dan jika nilai $|\phi_1| < 1$, dikatakan stabil asymtotik.

Dapat dilihat bahwa kondisi kestabilan sepenuhnya bergantung pada bagian Autoregressive (AR), dan bagian Moving Average (MA) sama sekali tidak mempengaruhi kondisi kestabilan. Jadi kondisi kestabilan untuk model-model yang lain dengan order Autoregressive satu seperti misalnya ARMA (1,1) akan sama dengan kestabilan dari model AR (1).

Sistem ARMA (2,1) dan Kestabilan

Model ARMA (2,1) mempunyai bentuk sebagai berikut:

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} = a_t - \theta_1 a_{t-1}$$

Fungsi Green model ini dapat diekspresikan secara Implisit (menyatakan G_j dalam G_j yang lain) dan Eksplisit (menyatakan G_j terpisah dari G_j yang lain).

a). Metode Implisit

Metode Implisit digunakan untuk mendapatkan ekspresi Implisit dari fungsi Green. Dengan menggunakan operator B model ARMA (2,1) menjadi:

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)\, X_t = (1 - \theta_1 B)\, a_t \quad \ldots\ldots\ldots (3.2.4)$$

dari persamaan (3.2.3) diketahui

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} G_j\, a_{t-j} = \left[\sum_{j=0}^{\infty} G_j B^j \right] a_t$$

memasukan persamaan (3.2.3) ke persamaan (3.2.4) didapatkan :

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) \sum_{j=0}^{\infty} G_j\, a_{t-j} = (1 - \theta_1 B)\, a_t$$

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) \left[\sum_{j=0}^{\infty} G_j B^j \right] a_t = (1 - \theta_1 B)\, a_t$$

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)(G_0 + G_1 B + G_2 B^2 + G_3 B^3 + \ldots) = (1 - \theta_1 B)$$

Menyamakan koefisien-koefisien ruas kanan dengan ruas kiri dari operator B diperoleh :

$$0 : G_0 = 1$$

$$1 : G_1 - \phi_1 = -\theta_1 \longrightarrow G_1 = \phi_1 - \theta_1$$

$$2 : G_2 - \phi_1 G_1 - \phi_2 = 0 \longrightarrow G_2 = \phi_1^2 - \phi_1\theta_1 + \phi_2$$

dan

$$G_j = \phi_1 G_{j-1} + \phi_2 G_{j-2} \qquad j \geq 3 \qquad \text{........} \quad (3.2.5)$$

diperoleh :

$$\left(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2\right) G_j = 0 \qquad j \geq 2 \qquad \text{........} \quad (3.2.6)$$

Fungsi Green dapat dihitung secara rekursif.

b) Metode Eksplisit

Metode ini akan menghasilkan ekspresi Eksplisit dari fungsi Green. Untuk mendapatkan ekspresi Eksplisit dari sistim ARMA (2,1) digunakan metode pembalikan dan memfaktorkan bagian Autoregressive sebagai berikut:

$$\left(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2\right) = \left(1 - \lambda_1 B\right)\left(1 - \lambda_2 B\right)$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \phi_1 \qquad \text{..............} \quad (3.2.7)$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = -\phi_2 \qquad \text{..............} \quad (3.2.8)$$

dimana λ_1 dan λ_2 adalah akar karakteristik dari persamaan Difference order dua yang diberikan oleh:

$$\lambda^2 - \phi_1 \lambda - \phi_2 = 0 \qquad \text{..............} \quad (3.2.9)$$

Sehingga :

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{1}{2}\left[\phi_1 \pm \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}\right] \qquad \text{.......} (3.2.10)$$

Solusi dari persamaan difference adalah :

$$X_t = \frac{\left(1 - \theta_1 B\right) a_t}{\left(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2\right)}$$

$$= \frac{\left(1 - \theta_1 B\right) a_t}{\left(1 - \lambda_1 B\right)\left(1 - \lambda_2 B\right)}$$

$$= \left[\frac{\left(1 - \frac{\theta_1}{\lambda_1}\right)}{\left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)} \frac{1}{(1 - \lambda_1 B)} + \frac{\left(1 - \frac{\theta_1}{\lambda_2}\right)}{\left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)} \frac{1}{(1 - \lambda_2 B)} \right] a_t$$

$$= \left[\frac{(\lambda_1 - \theta_1)}{(\lambda_1 - \lambda_2)} \frac{1}{(1 - \lambda_1 B)} + \frac{(\lambda_2 - \theta_1)}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \frac{1}{(1 - \lambda_2 B)} \right] a_t$$

$$X_t = \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda_1 - \theta_1)}{(\lambda_1 - \lambda_2)} \lambda_1^{\,j} + \frac{(\lambda_2 - \theta_1)}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \lambda_2^{\,j} \right] a_{t-j}$$

Sehingga diperoleh fungsi Green sebagai berikut :

$$G_j = \left[\frac{\lambda_1 - \theta_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \right] \lambda_1^{\,j} + \left[\frac{\lambda_2 - \theta_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \right] \lambda_2^{\,j} \quad \text{..........(3.2.11)}$$

atau

$$G_j = g_1 \lambda_1^{\,j} + g_2 \lambda_2^{\,j} \quad \text{.............. (3.2.12)}$$

dengan

$$g_1 = \left[\frac{\lambda_1 - \theta_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \right] \quad \text{dan} \quad g_2 = \left[\frac{\lambda_2 - \theta_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \right] \quad \text{......(3.2.13)}$$

Kondisi kestabilan model ARMA (2,1) mengikuti penalaran yang sama seperti pada AR (1). Ekspresi fungsi Green dari ARMA (2,1) dikatakan stabil asyimtottik apabila:

$$|\lambda_1| < 1 \quad \text{dan} \quad |\lambda_2| < 1 \quad \text{............(3.2.14)}$$

Kondisi kestabilan ini dapat dinyatakan secara langsung dalam bentuk parameter Autoregressive sebagai berikut :

Karena $\phi_2 = -\lambda_1\lambda_2$

$$\text{maka} \qquad |\phi_2| < 1$$

$$-1 < \phi_2 < 1$$

$$\lambda_1(1 - \lambda_2) < (1 - \lambda_2)$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1\lambda_2 < 1$$

$$\phi_1 + \phi_2 < 1$$

$$-(1 + \lambda_2) < \lambda_1(1 + \lambda_2)$$

$$-\lambda_1\lambda_2 - (\lambda_1 + \lambda_2) < 1$$

$$\phi_2 - \phi_1 < 1$$

Sehingga kondisi kestabilan asymtotik untuk sistem ARMA (2,1) adalah :

$$\phi_1 + \phi_2 < 1 \qquad \phi_2 - \phi_1 < 1 \qquad |\phi_2| < 1 \quad \ldots(3.2.15)$$

Jika salah satu $|\lambda_1|$ atau $|\lambda_2|$ bernilai satu, sistim ini masih dikatakan stabil begitu juga apabila kedua akarnya benilai satu dan berlawanan tandanya. Tetapi jika kedua akar bernilai satu dan mempunyai tanda yang sama, sistim tidak stabil. Pernyataan kestabilan ini ditekankan pada tetap terikatnya G_j pada- j tak berhingga.

Sistim ARMA (n, n-1) dan Kestabilan

Model ini mempunyai bentuk sebagai berikut:

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} - \ldots - \phi_n X_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \ldots - \theta_{n-1} a_{t-n}$$

dengan mengikuti penalaran yang sama dengan metode Implisit pada ARMA (2,1), didapatkan:

$$\left(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \ldots - \phi_n B^n\right)\left(G_o + G_1 B + G_2 B^2 + \ldots\right)$$

$$\equiv \left(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \ldots - \theta_{n-1} B^{n-1}\right)$$

Menyamakan koefisien-koefisien ruas kanan dengan ruas kiri dari operator B diperoleh:

$$0:\ G_o = 1$$

$$1:\ G_1 - \phi_1 G_o = -\theta_1$$

$$2:\ G_2 - \phi_1 G_1 - \phi_2 G_o = -\theta_2$$

$$3:\ G_3 - \phi_1 G_2 - \phi_2 G_1 - \phi_3 G_o = -\theta_3$$

$$\ldots$$

$$n-1:\ G_{n-1} - \phi_1 G_{n-2} - \ldots - \phi_{n-1} G_o = -\theta_{n-1}$$

$$n:\ G_n - \phi_1 G_{n-1} - \ldots - \phi_n G_o = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots(3.2.16)$$

diperoleh

$$\left(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \ldots - \phi_n B^n\right) G_j = 0 \qquad j \geq n \quad \ldots(3.2.17)$$

Dengan jalan yang sama seperti pada ARMA (2,1), metode eksplisit untuk model ARMA (n,n-1) dapat ditunjukan sebagai berikut:

$$G_j = g_1\lambda_1^{\,j} + g_2\lambda_2^{\,j} + \ldots + g_n\lambda_n^{\,j} \qquad \ldots\ldots\ldots(3.2.18)$$

dimana $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ adalah akar karakteristik dari:

$$\lambda^n - \phi_1\lambda^{n-1} - \phi_2\lambda^{n-2} - \ldots - \phi_n = 0$$

dan

$$g_i = \frac{\left(\lambda_i^{\,n-1} - \theta_1\lambda_i^{\,n-2} - \ldots - \theta_{n-1}\right)}{(\lambda_i-\lambda_1)(\lambda_i-\lambda_2)\ldots(\lambda_i-\lambda_{i-1})(\lambda_i-\lambda_{i+1})\ldots(\lambda_i-\lambda_n)}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n$$

Seperti dalam kasus ARMA (2,1), model ARMA (n,n-1) mempunyai persaratan kestabilan asymtotik sebagai berikut:

$$|\lambda_k| < 1 , \quad k = 1,2,\ldots,n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3.2.19)$$

sementara persayaratan kestabilan adalah:

$$|\lambda_k| \leq 1 , \quad k = 1,2,\ldots,n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3.2.20)$$

apabila $\lambda_i = \lambda_j$, $i \neq j$ maka $|\lambda_i| = |\lambda_j| < 1$ dimana $i,j = 1,2,\ldots,n$.

3.2.2. Fungsi Invers

Fungsi Green memberikan kedinamikan suatu sistim dalam a_t yang terdahulu dan menunjukan bagaimana a_t tersebut berakibat terhadap respon X_t. Hal ini diperoleh dengan menyatakan X_t sebagai kombinasi linier dari a_t. Kedinamikan juga dapat ditunjukan dengan menganggap X_t sebagai kombinasi linier dari X_t sebelumnya. Fungsi Koefisien pada perluasan ini disebut Fungsi Invers dan dilambangkan dengan I_j. Fungsi Invers (I_j) didefinisikan oleh :

$$X_t = \sum_{j=1}^{\infty} I_j X_{t-j} + a_t$$

atau:

$$a_t = (1 - I_1B - I_2B^2 - \ldots\ldots) X_t$$

yang merupakan model AR (∞).

Agar X_t pada pernyataan diatas berhingga , maka I_j harus tetap terikat untuk j tak-berhingga. Keadaan ini sama dengan fungsi Green yang menghendaki adanya batas

Kestabilan. Pada fungsi Invers batasan ini dikatakan batas Invertibility .

Sistim AR (1) dan MA (1)

Untuk model AR (1):

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + a_t$$

maka fungsi Invers untuk model AR (1) adalah:

$$I_1 = \phi_1 , \quad I_j = 0 \quad j > 1$$

fungsi Green untuk model AR (1) diperoleh dari operator:

$$\frac{1}{(1 - \phi_1 B)}$$

sementara operator yang memberikan fungsi Invers adalah:

$$(1 - \phi_1 B)$$

Model AR (1) tidak mempunyai parameter Moving Average, maka untuk model ini tidak ada batasan Invertibility.

Untuk model MA (1):

$$X_t = (1 - \theta_1 B)\, a_t$$

$$a_t = \frac{1}{(1 - \theta_1 B)} X_t$$

$$= (1 + \theta_1 B + \theta_1^2 B^2 + \ldots\ldots) X_t$$

$$= (1 + I_1 B + I_2 B^2 + \ldots\ldots) X_t \quad \ldots\ldots\ldots(3.2.21)$$

$$X_t = \sum_{j=1}^{\infty} - \theta_1^j X_{t-j} + a_t$$

sehingga: $I_j = - \theta_1^j$ ....(3.2.22)

dan persyaratan Invertibility-nya adalah:

$$|\theta_1| < 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.2.23)$$

fungsi Green dari model MA (1) adalah:

$$G_0 = 1$$

$$G_1 = -\theta_1$$

$$G_j = 0 \qquad j > 1$$

dan operator yang memberi harga pada (G_j) adalah :

$$(1 - \theta_1 B)$$

operator yang memberi fungsi Invers (I_j) adalah:

$$\frac{1}{(1 - \theta_1 B)}$$

Sistim ARMA (1,2)

Sistem ini mempunyai bentuk :

$$(1 - \phi_1)\, X_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2)\, a_t \quad \ldots\ldots\ldots(3.2.24)$$

dengan subtitusi persamaan (3.2.21) kepersamaan (3.2.24) dan menyamakan koefisien ruas kanan dengan ruas kiri dari operator B ,

$$(1 - \phi_1 B) = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2)(1 - I_1 B - I_2 B^2 - \ldots\ldots)$$

didapatkan persamaan rekursif seperti pada fungsi Green dari ARMA (2,1) yaitu dengan menukar antara ϕ dan θ sebagai berikut:

$$-I_1 - \theta_1 = -\phi_1 \longrightarrow I_1 = \phi_1 - \theta_1$$

$$I_j = \theta_1 I_{j-1} + \theta_2 I_{j-2} \qquad j \geq 2$$

$$I_0 = -1$$

maka, $(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2)\, I_j = 0$, $j \geq 2$ .... (3.2.25)

Untuk model dengan order lebih tinggi dapat dicari seperti pada fungsi Green baik untuk ekspresi Implisit maupun Eksplisit dengan menukar tempat antara ϕ dengan θ.

Selanjutnya dipertimbangkan v_1 dan v_2 yang merupakan akar karakteristik dari bagian Moving Average pada persamaan (3.2.24) sebagai berikut:

$$\left(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2\right) = \left(1 - v_1 B\right)\left(1 - v_2 B\right) \;\ldots\ldots\; (3.2.26)$$

$$v_1 + v_2 = \theta_1 \quad \text{dan} \quad v_1 v_2 = -\theta_2 \qquad \ldots\ldots\; (3.2.27)$$

v_1 dan v_2 dapat dihitung dari:

$$v^2 - \theta_1 v - \theta_2 = 0$$

sehingga

$$v_1, v_2 = \frac{1}{2}\left[\theta_1 \pm \sqrt{\left(\theta_1^2 + 4\theta_2\right)}\right] \;\ldots\ldots\ldots\; (3.2.28)$$

dengan menukar ϕ dengan θ dan λ dengan v pada fungsi Green dari ARMA (2,1) diperoleh fungsi Invers sebagai berikut:

$$I_j = -\left(\frac{v_1 - \phi_1}{v_1 - v_2}\right) v_1^{\,j} - \left(\frac{v_2 - \phi_1}{v_2 - v_1}\right) v_2^{\,j} \;\ldots(3.2.29)$$

Persyaratan Invertibility untuk model ARMA (1,2) atau secara umum untuk model ARMA (n,2) adalah:

$$|v_1| < 1 \qquad |v_2| < 1 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; (3.2.30)$$

atau

$$\theta_1 + \theta_2 < 1 \qquad \theta_2 - \theta_1 < 1 \qquad |\theta_2| < 1 \;\ldots\ldots\; (3.2.31)$$

Fungsi Invers (I_j) untuk model MA (1) dan MA (2) dapat diperoleh dari persamaan (3.2.29) dengan memasukan $\phi_1 = 0$ dan $\theta_2 = 0$. Fungsi Invers untuk model ARMA (1,1) yang diperoleh dengan memasukan $\theta_2 = v_2 = 0$ dan $\theta_1 = v_1$ adalah:

$$I_j = \frac{\theta_1 - \phi_1}{-\theta_1}\theta_1^{\ j} = (\phi_1 - \theta_1)\theta_1^{\ j-1} \quad \ldots\ldots(3.2.32)$$

Satu kasus khusus dari hal diatas untuk $\phi_1 = 1$, ini dalah fungsi Invers untuk model:

$$(1 - B)\ X_t = (1 - \theta_1 B)\ a_t \quad \ldots\ldots\ldots\ (3.2.33)$$

Bentuk Eksplisit dari fungsi Invers untuk sistim ARMA (n,m) secara umum mengikuti persamaan (3.2.18) dengan mengganti G_j dengan $- I_j$, λ_k dengan v_k dan menukar tempat ϕ dengan θ. Persyaratan Invertibility untuk model secara umum adalah:

$$|\ v_k| < 1 \qquad k = 1,2, \ldots ,m \quad \ldots\ldots\ (3.2.34)$$

v_k adalah akar karakteristik dari:

$$v^m - \theta_1 v^{m-1} - \ldots - \theta_m = 0$$

3.2.3. Fungsi Autokovarian

Pada bagian ini akan dibicarakan fungsi Autokovarian pada beberapa model ARMA dimana fungsi ini memberikan karakteristik pada model ARMA dari sudut pandang Statistik.

Disini a_t berdistribusi normal dengan mean nol, varian $\sigma_a^{\ 2}$ dan kovarian antara a_t adalah nol. Karena kovarian yang dibicarakan adalah pada dirinya sendiri pada t yang berbeda , maka disebut Autokovarian dan secara umum Autokovarian dari a_t pada lag-k akan diberikan oleh:

$$\mathrm{Cov}\ (a_t, a_{t-k}) = E\ (a_t - \mu)(a_{t-k} - \mu)$$

dimana E adalah nilai yang diharapkan (ekspetasi) dan μ adalah rata-rata (mean) dari a_t, dan Autokovarian pada lag nol adalah variannya. Pada kasus ini , karena $\mu = 0$ maka Autokovarian a_t adalah:

$$E\,(a_t\ a_{t-k}) = \sigma_a^{\ 2}, \qquad k = 0$$
$$= 0 \qquad k \neq 0$$

atau

$$E\,(a_t) = 0 \qquad E\,(a_t a_{t-k}) = \delta_k\ \sigma_a^{\ 2} \quad \ldots\ldots (3.2.35)$$

dimana δ_k (delta Kronecker) bernilai nol untuk semua k kecuali pada saat k = 0 bernilai satu.

Distribusi dari X_t adalah distribusi normal dengan mean nol, ini dikarenakan X_t adalah kombinasi linier dari a_t dengan fungsi Green sebagai koefisien. Maka sifat distribusi sepenuhnya dikarakteristikan oleh fungsi Autokovarian dari X_t yang didefinisikan dengan:

$$\gamma_k = E\,(X_t\ X_{t-k})$$

yang merupakan Autokovarian pada lag-k, dan untuk k = 0 adalah variannya.

Pembicaraan akan memerlukan variasi antara a_{t-l} dan X_{t-k} yang dapat diperoleh dari ekspansi fungsi Green dari setiap model ARMA.

$$X_t = \sum_{j=o}^{\infty} G_j\ a_{t-j}$$

Karena $G_o = 1$

$$E\,(a_t\ X_t) = \sigma_a^{\ 2}$$
$$E\,(a_t\ X_{t-k}) = 0 \qquad k > 0$$

Hubungan ini juga dapat ditulis :

$$E\,(a_t\;X_{t-k}) = \delta_k\;\sigma_a^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.2.36)$$

secara umum:

$$E\,(a_{t-l}\;X_{t-k}) = E\left[a_{t-l}\;\left(\sum_{j=0}^{\infty} G_j\;a_{t-k-j}\right)\right]$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} G_j\;E\,\left(a_{t-l}\;a_{t-k-j}\right)$$

$$= 0 \quad \text{jika,} \quad k > l$$

$$= G_{l-k}\;\sigma_a^2 \quad \text{jika,} \quad k \le l \;\ldots(3.2.37)$$

Terdapat hubungan penting berikut:

$$\gamma_k = E\,\left(X_t\;X_{t-k}\right) = E\,\left(X_{t-k}\;X_t\right) = E\,\left(X_t\;X_{t+k}\right) = \gamma_{-k}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.2.38)$$

Model AR (1) / ARMA (1,0)

Fungsi Autokovarian dari model ARMA dapat diambil dari salah satu dari dua bentuk yang sama seperti fungsi Green, yang pertama adalah bentuk rekursive yang diperoleh dari ekspansi Implisit dan yang kedua adalah ekspresi Eksplisit.

a). Ekspresi Implisit

Mengalikan kedua sisi dari model AR (1) dengan X_{t-k} dan menggunakan ekspetasi didapatkan:

$$E\,\left(X_t\;X_{t-k}\right) = \phi_1\;E\,\left(X_{t-1}X_{t-k}\right) + E\,\left(a_t\;X_{t-k}\right)$$

dari persamaan (3.2.36) sampai persamaan (3.2.38) diperoleh:

$$\gamma_0 = \phi_1\gamma_1 + \sigma_a^2$$

$$\gamma_k = \phi_1\gamma_{k-1} \qquad\qquad k > 0$$

mengganti $\gamma_1 = \phi_1\gamma_0$ dari persamaan diatas diperoleh hubungan sebagi berikut:

$$\gamma_0 = \frac{\sigma_a^2}{1 - \phi_1^2}$$

$$\gamma_k = \phi_1\ \gamma_{k-1} \qquad\qquad k \geq 1 \qquad\qquad ....(3.2.39)$$

b). Ekspresi Eksplisit

Ekspresi Eksplisit untuk γ_k dapat diperoleh dengan fungsi Green, dimana untuk model AR (1) adalah:

$$G_j = \phi_1^j$$

maka :

$$\gamma_k = E\ (X_t\ X_{t-k})$$

$$= E\left[\left(\sum_{i=0}^{\infty} G_i\ a_{t-i}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} G_j\ a_{t-(j+k)}\right)\right]$$

$$= \left(\sum_{j=0}^{\infty} G_{j+k}G_j\right)\sigma_a^2$$

$$= \left(\phi_1^k \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^{2j}\right)\sigma_a^2$$

$$= \frac{\sigma_a^2}{(1 - \phi_1^2)}\ \phi_1^k$$

Model ARMA (2,1)

Akan diperlihatkan fungsi Autokovarian model ARMA (2,1):

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} - \theta_1 a_{t-1} + a_t$$

a). Ekspresi Implisit

Mengalikan model ARMA (2,1) dengan X_{t-k} diperoleh:

$$X_t X_{t-k} = \phi_1 X_{t-1} X_{t-k} + \phi_2 X_{t-2} X_{t-k} - \theta_1 a_{t-1} X_{t-k} + a_t X_{t-k}$$

Ekspetasinya diperoleh :

$$E\left(X_t X_{t-k}\right) = \phi_1 E\left(X_{t-1} X_{t-k}\right) + \phi_2 E\left(X_{t-2} X_{t-k}\right)$$

$$- \theta_1 E\left(a_{t-1} X_{t-k}\right) + E\left(a_t X_{t-k}\right)$$

dan karena

$$G_1 = \phi_1 - \theta_1$$

dengan persamaan (3.2.37) dan (3.2.38) diperoleh

$$k = 0 : \gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2 - \left(\phi_1 - \theta_1\right)\theta_1 \sigma_a^2 + \sigma_a^2$$

$$k = 1 : \gamma_1 = \phi_1 \gamma_0 + \phi_2 \gamma_1 - \theta_1 \sigma_a^2$$

$$\vdots$$

$$k = k : \gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} \quad , k \geq 2 \quad \ldots\ldots(3.2.40)$$

dengan manggunakan aturan Cramer dapat ditentukan nilai dari γ_i dengan $i = 0,1,2,\ldots,k$

b). Ekspresi Eksplisit

Untuk mendapatkan pernyataan Eksplisit untuk γ_k, akan membutuhkan persamaan (3.2.12).

$$G_j = g_1 \lambda_1^j + g_2 \lambda_2^j$$

Maka:

$$\gamma_k = E\left(X_t\ X_{t-k}\right)$$

$$= E\left[\left(\sum_{i=0}^{\infty} G_i a_{t-i}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} G_j a_{t-(k+j)}\right)\right]$$

$$= \left(\sum_{j=0}^{\infty} G_{k+j} G_j\right)\sigma_a^2$$

$$= \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{\infty}\left(g_1\lambda_1^{k+j} + g_2\lambda_2^{k+j}\right)\left(g_1\lambda_1^{j} + g_2\lambda_2^{j}\right)$$

$$= \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{\infty}\left(g_1^2\lambda_1^k\lambda_1^{2j} + g_2^2\lambda_2^k\lambda_2^{2j} + g_1 g_2\lambda_1^j\lambda_2^2(\lambda_1^k + \lambda_2^k)\right)$$

$$= \sigma_a^2\left[\frac{g_1^2}{(1-\lambda_1^2)}\lambda_1^k + \frac{g_2^2}{(1-\lambda_2^2)}\lambda_2^k + \frac{g_1 g_2}{(1-\lambda_1\lambda_2)}(\lambda_1^k + \lambda_2^k)\right]$$

$$\gamma_k = \sigma_a^2\left[\frac{g_1^2}{(1-\lambda_1^2)} + \frac{g_1 g_2}{(1-\lambda_1\lambda_2)}\right]\lambda_1^k + \sigma_a^2\left[\frac{g_2^2}{(1-\lambda_2^2)} + \frac{g_1 g_2}{(1-\lambda_1\lambda_2)}\right]\lambda_2^k \quad ..(3.2.41)$$

untuk $k = 0$ diperoleh

$$\gamma_0 = \sigma_a^2\left[\frac{g_1^2}{(1-\lambda_1^2)} + \frac{g_2^2}{(1-\lambda_2^2)} - \frac{g_1 g_2}{(1-\lambda_1\lambda_2)}\right]$$

dengan :

$$g_1 = \frac{\lambda_1 - \theta_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad \text{dan} \quad g_1 = \frac{\lambda_2 - \theta_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

Maka terlihat bahwa seperti dalam fungsi Green, fungsi Autokovarian adalah merupakan kombinasi linier dari λ_j^k yakni :

$$\gamma_k = d_1\lambda_1^k + d_2\lambda_2^k \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (3.2.42)$$

dimana:

$$d_1 = \sigma_a^2\ g_1\left[\frac{g_1}{1-\lambda_1^2} + \frac{g_2}{1-\lambda_1\lambda_2}\right]$$

$$d_1 = \sigma_a^2\ g_2\left[\frac{g_2}{1-\lambda_2^2} + \frac{g_1}{1-\lambda_1\lambda_2}\right]$$

Bentuk dari fungsi Autokovarian adalah sama dengan fungsi Green. Pada saat kovarian dari a_t ditentukan maka, fungsi Green sepenuhnya menentukan struktur Autokovarian dari output X_t.

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} G_j\ a_{t-j}$$

Autokovarian dari input a_t adalah:

$$E\ (a_t\ a_{t-k}) = \delta_k\ \sigma_a^{\ 2}$$

Outputnya dinyatakan dengan fungsi Green:

$$\gamma_k = E\ (X_t\ X_{t-k})$$

$$= E\ \left(\sum_{i=0}^{\infty} G_i a_{t-j}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} G_j a_{t-(k+j)}\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}\ \sum_{j=0}^{\infty} G_i G_j \delta_{i-(k+j)} \sigma_a^2$$

$$= \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{\infty} G_j G_{j+k} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.2.43)$$

Oleh karena itu fungsi Green benar-benar merupakan inti dari fungsi Autokovarian.

Model ARMA (n, m)

Model ini mempunyai bentuk:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \ldots + \phi_n X_{t-n}$$
$$a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \ldots - \theta_m a_{t-m}$$

Fungsi Autokovarian dari model ARMA (n,m) adalah:

$$E(X_t X_{t-k}) = E\,[\phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \ldots + \phi_n X_{t-n}]X_{t-k}$$
$$+ E\,[a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \ldots - \theta_m a_{t-m}]X_{t-k}$$

$$\gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2 + \ldots + \phi_n \gamma_n$$
$$+ \left(1 - \theta_1 G_1 - \theta_2 G_2 - \ldots - \theta_m G_m\right) \sigma_a^2$$

$$\gamma_1 = \phi_1 \gamma_0 + \phi_2 \gamma_1 + \ldots + \phi_n \gamma_{n-1}$$
$$+ \left(- \theta_1 - \theta_2 G_1 - \theta_3 G_2 - \ldots - \theta_m G_{m-1}\right) \sigma_a^2$$

....

$$\gamma_m = \phi_1 \gamma_{m-1} + \phi_2 \gamma_{m-2} + \ldots + \phi_n \gamma_{n-m} - \theta_m \sigma_a^2$$

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} + \ldots + \phi_n \gamma_{k-n} \qquad k \geq m+1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots (3.2.44)$$

atau

$$\Phi\,(B)\ \gamma_k = 0, \qquad k \geq m+1$$

Dengan proses yang sama dengan yang digunakan untuk mendapatkan persamaan (3.2.42), maka untuk ARMA (n,n-1) diperoleh:

$$\gamma_k = d_1\lambda_1{}^k + d_2\lambda_2{}^k + \dots + d_n\lambda_n{}^k$$

dimana:

$$d_i = \frac{g_i g_1}{1 - \lambda_i\lambda_1} + \frac{g_i g_2}{1 - \lambda_i\lambda_2} + \dots + \frac{g_i g_n}{1 - \lambda_i\lambda_n}$$

$$i = 1,2, \dots ,n.$$

Autokovarian pada lag nol diberikan oleh:

$$\gamma_0 = d_1 + d_2 + \dots + d_n$$