BAB II

MATERI PENUNJANG

2.1 ESTIMASI KWADRAT TERKECIL DALAM REGRESI SEDERHANA

Untuk mendapatkan estimasi parameter dari model regresi sederhana berbentuk:

$$\mathring{y}_t = \beta_0+\beta_1\mathring{x}_t+\varepsilon_t \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.1.1)$$

digunakan Metode Estimasi kuadrat terkecil, yaitu dengan meminimalkan jumlah kuadrat kesalahan ε_t sebagai berikut:

$$\Sigma\, \varepsilon_t^2 = \Sigma(\mathring{y}_t - \beta_0 - \beta_1\mathring{x}_t)^2$$

dengan mendeferensialkan ke β_0 dan β_1, diperoleh estimasi dari $\hat{\beta}_0$ dan $\hat{\beta}_1$ sebagai berikut:

$$\frac{\partial\ \Sigma\varepsilon_t^2}{\partial\ \beta_0} = -2\Sigma(\mathring{y}_t - \beta_0 - \beta_1\mathring{x}_t) = 0 \ldots\ldots\ldots(2.1.2)$$

$$\frac{\partial\ \Sigma\varepsilon_t^2}{\partial\ \beta_1} = -2\Sigma\ \mathring{x}_t(\mathring{y}_t - \beta_0 - \beta_1\mathring{x}_t) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots(2.1.3)$$

Dari persamaan (2.1.2) dan membaginya dengan **-2N**, didapatkan :

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y}-\hat{\beta}_1\bar{x}_t \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.1.4)$$

Karena

$$\Sigma\bar{x}(\mathring{y}_t-\bar{y}) = \bar{x}(\Sigma\mathring{y}_t-\Sigma\bar{y}) = 0$$

$$\Sigma\bar{x}(\mathring{x}_t-\bar{x}) = \bar{x}(\Sigma\mathring{x}_t-\Sigma\bar{x}) = 0$$

memasukan $\hat{\beta}_0$ ke persamaan (2.1.3) akan didapatkan:

$$\Sigma\, \mathring{x}_t\left[(\mathring{y}_t - \bar{y}) - \hat{\beta}_1(\mathring{x}_t - \bar{x})\right] = \Sigma\, \mathring{x}_t\left[(\mathring{y}_t-\bar{y})-\beta_1(\mathring{x}_t-\bar{x})\right]$$

$$- \Sigma\, \bar{x}\left[(\mathring{y}_t-\bar{y})-\beta_1(\mathring{x}_t-\bar{x})\right] = 0$$

yaitu

$$\Sigma(\mathring{x}_t-\bar{x})\left[(\mathring{y}_t-\bar{y}) - \hat{\beta}_1(\mathring{x}_t-\bar{x})\right] = 0$$

atau

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\Sigma(\mathring{y}_t-\bar{y})(\mathring{x}_t-\bar{x})}{\Sigma(\mathring{x}_t-\bar{x})^2} = \frac{\Sigma y_t x_t}{\Sigma x_t^2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.1.5)$$

2.2 MEAN, VARIAN, KOVARIAN DAN KORELASI DARI VARIABEL RANDOM

Dua karakteristik utama dari variabel random adalah **mean** (rata-rata dari nilai observasi/pengamatan), dan **varian**, yang merupakan nilai ekspektasi kwadrat penyimpangan dari mean. Mean menunjukkan titik tengah dari distribusi probabilitas dan varian menunjukkan penyebaran yang menyatakan seberapa jauh penyimpangan tersebut dari titik tengah atau mean. Akar kwadrat dari varian dinamakan standar deviasi. Karakteristik yang lain darivariabel random adalah kovarian, yaitu nilai ekspekstasi dari hasil kali penyimpangan pada mean masing-masing. Kovarian menyatakan tingkat ketergantungan antara dua variabel random dan benilai **nol** ketika keduanya independen.

Jika **x** dan **y** adalah dua variabel random dengan mean μ_x dan μ_y, varian σ_x^2 dan σ_y^2 dan kovarian γ_{xy}, maka nilai ekspektasinya adalah:

$$\text{Mean dari x} = \mu_x = E(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.2.1)$$

$$\text{Mean dari y} = \mu_y = E(y) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.2.2)$$

$$\text{Varian dari x} = \sigma_x^2 = E(x - \mu_x)^2 \quad \ldots\ldots\ldots(2.2.3)$$

$$\text{Varian dari y} = \sigma_y^2 = E(y - \mu_y)^2 \quad \ldots\ldots\ldots(2.2.4)$$

$$\text{Kovarian (x,y)} = \gamma_{xy} = E(x - \mu_x)(y - \mu_y) \ldots(2.2.5)$$

Korelasi (ρ_{xy}) menyatakan tingkat ketergantungan antara variabel x dan y dan dinyatakan dengan :

$$\text{Korelasi} = \frac{\text{Kovarian (x,y)}}{\sqrt{\text{Var(x)Var(y)}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.2.6)$$

$$= \frac{E(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sqrt{E(x-\mu_x)^2 E(y-\mu_y)^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.2.6a)$$

$$\rho_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.2.6b)$$

Penjumlahan dari dua variabel random x dan y menjadi ax+by dengan a dan b konstan, diperoleh mean dan varian sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\text{Mean dari } (ax+by) &= \mu_{ax+by} = E(ax+by)\\ &= aE(x)+bE(y)\\ &= a\mu_x+b\mu_y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.2.7)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Varian dari } (ax+by) &= \sigma^2_{ax+by} = E(ax+by-\mu_{ax+by})^2\\ &= E[a(x-\mu_x)+b(y-\mu_y)]^2\\ &= E[a^2(x-\mu_x)^2+2ab(x-\mu_x)(y-\mu_y)\\ &\quad +b^2(y-\mu_y)^2]\end{aligned}$$

$$=a^2E(x-\mu_x)^2+2abE(x-\mu_x)(y-\mu_y)$$

$$+b^2E(y-\mu_y)^2]$$

$$=a^2Var(x)+2ab\ Kov(x,y)+b^2Var(y)$$

..........(2.2.8)

Apabila x dan y independen, maka kovarian $(x,y) = 0$ atau korelasi $\rho_{xy} = 0$. Sehingga persamaan (2.2.8) menjadi

$$Var(ax+by)=a^2Var(x)+b^2Var(y) \quad ....(2.2.10)$$

Varian dari jumlah atau selisih dari variabel random yang independen adalah jumlah dari variannya.

Mean dari kombinasi linier pada variabel random (persamaan (2.2.7)) adalah sama dengan kombinasi linier dari mean variabel random masing-masing dan varian dari kombinasi linier pada variabel random independen (persamaan (2.2.10)) adalah kombinasi linier dari varian dengan koefisien kwadrat.

Operasi ekspektasi dalam persamaan (2.2.1) sampai (2.2.5) adalah untuk populasi atau sampel tak berhingga. Operasi ekspektasi untuk sampel berhingga dengan N observasi/pengamatan, yaitu: x_1, x_2, ..., x_N, dan y_1, y_2, ..., y_N, digunakan rata-rata sampel sebagai berikut:

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\Sigma\, x_i \quad ....(2.2.11)$$

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{N}\Sigma\,(x_i-\bar{x})^2 \quad ....(2.2.12)$$

$$\hat{\gamma}_{xy} = \frac{1}{N}\Sigma(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}) \quad ....(2.2.13)$$

$$\hat{\rho}_{xy} = \frac{\Sigma(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x_i-\bar{x})^2\Sigma(y_i-\bar{y})^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.2.14)$$

dimana i berjalan dari 1 sampai N.

Perlu untuk dikemukakan bahwa estimator mempunyai sifat bias dan tak bias. Estimator dikatakan tak bias jika rata-rata (mean) atau nilai ekspektasi adalah parameternya. Untuk contoh, $\bar{x}$ adalah estimator tak bias dari μ_x, karena mean dari $\bar{x}$ adalah μ_x. Dengan menggunakan persamaan (2.2.7) diperoleh:

$$E(\bar{x}) = E\left(\frac{1}{N}\Sigma x_i\right)$$

$$= E\left(\frac{1}{N}x_1 + \frac{1}{N}x_2 + \ldots + \frac{1}{N}x_N\right)$$

$$= \frac{1}{N}E(x_1) + \frac{1}{N}E(x_2) + \ldots + \frac{1}{N}E(x_N)$$

$$= \frac{\mu_x}{N} + \frac{\mu_x}{N} + \ldots + \frac{\mu_x}{N} = \mu_x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.2.15)$$

Jadi estimator $\bar{x}$ adalah titik tengah dari μ_x, yang merupakan estimasi parameter . Bagaimanapun, untuk pengambilan sampel, penghitungan rata-rata sampel tidak akan sama dengan μ_x yang merupakan rata-rata populasi. Seberapa jauh penghitungan rata-rata akan menyimpang dari μ_x, ditunjukkan dengan menggunakan varian dari $\bar{x}$. Persamaan (2.2.7) digunakan untuk menghitung mean dari $\bar{x}$, dan persamaan (2.2.8) digunakan untuk menghitung varian dari $\bar{x}$. Untuk pengamatan independen , persamaan (2.2.10) dapat digunakan untuk menghitung varian dari $\bar{x}$. Untuk pengamatan independen x_1, x_2, ..., x_N , Varian dari $\bar{x}$ adalah:

$$\mathrm{Var}\left(\bar{x}\right)=\mathrm{Var}\left(\frac{1}{N}x_1+\frac{1}{N}x_2+\ldots+\frac{1}{N}x_N\right)$$

$$=\frac{1}{N^2}\mathrm{Var}\left(x_1\right)+\frac{1}{N^2}\mathrm{Var}\left(x_2\right)+\ldots+\frac{1}{N^2}\mathrm{Var}\left(x_N\right)$$

$$=\frac{N\ \mathrm{Var}(x)}{N^2}$$

$$=\frac{1}{N}\mathrm{Var}(x) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.2.16)$$

yaitu :

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = E\left(\bar{x}-E(\bar{x})\right)^2 = E\left(\bar{x}-\mu_x\right)^2 = \frac{1}{N}\sigma_x^2 \qquad \ldots\ldots(2.2.16a)$$

atau

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sigma_x \qquad (2.2.16b)$$

persamaan (2.2.16a) dan (2.2.16b) memperlihatkan standar deviasi dari $\bar{x}$ yang merupakan jarak antara estimator $\bar{x}$ dan parameter μ_x.

2.3 MEAN, VARIAN DARI $\hat{\beta}_1$ DAN $\hat{\beta}_0$

Dalam model regresi linier sederhana persamaan (2.1.1), ε_t mempunyai mean nol, ini dikarenakan ε_t independen pada t yang berbeda.

$$E\left(\varepsilon_t\right)=0$$

$$\mathrm{Kov}\left(\varepsilon_t,\varepsilon_{t-k}\right)=E\left\{\left[\varepsilon_t-E(\varepsilon_t)\right]\left[\varepsilon_{t-k}-E(\varepsilon_{t-k})\right]\right\}$$

$$=E\left(\varepsilon_t\varepsilon_{t-k}\right)$$

$$= 0 \text{ untuk } k \neq 0$$

dan mempunyai varian σ_ε^2, yaitu:

$$\mathrm{Var}\left(\varepsilon_t\right)=E\left[\varepsilon_t-E(\varepsilon_t)\right]^2$$

$$=E\ \varepsilon_t^2$$

$$= \sigma_{\varepsilon}^{2}$$

Parameter β_o dan $\beta_1\mathring{x}_t$ adalah variabel deterministik (non random) dan oleh karena itu nilai ekspektasinya adalah dirinya sendiri. Variabel deterministik dapat dikatakan sebagai variabel random dengan mean yang sama dan variannya adalah nol, dan juga independen pada beberapa variabel random lainnya. Jadi untuk model (2.1.1) jika digunakan persamaan (2.2.7) diperoleh:

$$\text{Mean } (\mathring{y}_t) = E(y_t) = E(\beta_o + \beta_1\mathring{x}_t + \varepsilon_t)$$

$$= E(\beta_o + \beta_1\mathring{x}_t) + E\ \varepsilon_t$$

$$= E(\beta_o) + E(\beta_1\mathring{x}_t) + 0$$

$$= \beta_o + \beta_1\mathring{x}_t \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.3.1)$$

dan dengan persamaan (2.2.10) :

$$\text{Var } (\mathring{y}_t) = \text{Var}(\beta_o + \beta_1\mathring{x}_t + \varepsilon_t)$$

$$= \text{Var}(\beta_o + \beta_1\mathring{x}_t) + \text{Var}(\varepsilon_t)$$

$$= 0 + E(\varepsilon_t)$$

$$= \sigma_{\varepsilon}^{2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.3.2)$$

atau

$$\text{Var } (\mathring{y}_t) = E(\mathring{y}_t - E\ \mathring{y}_t)^2 = E(\mathring{y}_t - \beta_o + \beta_1\mathring{x}_t)^2 = E(\varepsilon_t^2) = \sigma_{\varepsilon}^{2}$$

mengambil rata-rata persamaan (2.1.1) diperoleh:

$$\bar{y} = \beta_o + \beta_1\bar{x} + \bar{\varepsilon}$$

$$E\ \bar{y} = E\ \beta_o + E\ \beta_1\bar{x} + E\ \bar{\varepsilon}$$

$$= \beta_0+\beta_1\overline{x}$$

Dengan estimator β_1 yang diberikan dalam persamaan (2.1.5) dapat dilihat bahwa :

$$E\ y_t=E\left(\mathring{y}_t-\overline{y}\right)$$

$$=E\ \mathring{y}_t-E\ \overline{y}$$

$$=\beta_0+\beta_1\mathring{x}_t-\beta_0-\beta_1\overline{x}$$

$$=\beta_1\left(\mathring{x}_t-\overline{x}\right)$$

$$=\beta_1 x_t$$

Dari persamaan (2.1.5), $y_t=\left(\mathring{y}_t-\overline{y}\right)$ adalah variabel random dan $x_t$adalah konstanta. Persamaan (2.2.7) dapat digunakan untuk menentukan Mean $\hat{\beta}_1$ dalam persamaan (2.1.5) sebagai berikut:

Mean dari $\hat{\beta}_1=E\left(\hat{\beta}_1\right)$

$$=E\left(\frac{\Sigma\ y_t x_t}{\Sigma\ x_t^2}\right)$$

$$=\frac{1}{\Sigma\ x_t^2}E\left(y_1x_1+y_2x_2+...+y_Nx_N\right)$$

$$=\frac{1}{\Sigma\ x_t^2}\left(x_1Ey_1+x_2Ey_2+...+x_NEy_N\right)$$

$$=\frac{1}{\Sigma\ x_t^2}\left(x_1\beta_1x_1+x_2\beta_1x_2+...+x_N\beta_1x_N\right)$$

$$=\beta_1 \qquad \text{.....................(2.3.3)}$$

sehingga β_1 adalah estimator *tak bias* dari β_1.

Variabel $\mathring{y}_t$ adalah independen, karena ε_t independen dan oleh karena itu persamaan (2.2.10) dapat digunakan untuk mendapatkan Varian $\hat{\beta}_1$ sebagai berikut:

$$\mathrm{Var}\left(\hat{\beta}_1\right)=\mathrm{Var}\left[\left(\frac{x_1}{\Sigma x_t^2}\right)\mathring{y}_t+\left(\frac{x_2}{\Sigma x_t^2}\right)\mathring{y}_2+\ldots+\left(\frac{x_N}{\Sigma x_t^2}\right)\mathring{y}_N\right]$$

$$=\left(\frac{x_1}{\Sigma x_t^2}\right)\mathrm{Var}\left(\mathring{y}_t\right)+\left(\frac{x_2}{\Sigma x_t^2}\right)\mathrm{Var}\left(\mathring{y}_2\right)+\ldots$$

$$+\left(\frac{x_N}{\Sigma x_t^2}\right)\mathrm{Var}\left(\mathring{y}_N\right)$$

$$=\frac{\Sigma x_t^2}{\left(\Sigma x_t^2\right)}\mathrm{Var}\left(\mathring{y}_t\right)$$

$$=\frac{1}{\Sigma x_t^2}\mathrm{Var}\left(\mathring{y}_t\right)$$

$$=\frac{\sigma_\varepsilon^2}{\Sigma x_t^2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.3.4)$$

Untuk $N \longrightarrow \infty$, maka $\Sigma x_t^2 \longrightarrow \infty$,dan $\mathrm{Var}\left(\hat{\beta}_1\right) \longrightarrow 0$

Dapat disimpulkan bahwa rata-rata dari $\hat{\beta}_1$ sebenarnya adalah nilai β_1, ini memperlihatkan bahwa $\hat{\beta}_1$ begitu mendekati nilai sebenarnya dengan bertambahnya jumlah pengamatan, dengan kata lain estimatornya adalah konsisten. Demikian pula, karena $E\bar{y}=\beta_0+\beta_1\bar{x}$ dan $E\ \hat{\beta}_1=\beta_1$, dengan mengikuti persamaan (2.1.4) diperoleh :

$$E\left(\hat{\beta}_0\right)=\beta_0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.3.5)$$

dan dengan persamaan (2.2.10), diperoleh varian dari $\hat{\beta}_0$ sebagai berikut:

$$\mathrm{Var}\left(\hat{\beta}_0\right)=\mathrm{Var}\ \bar{y}+\bar{x}^2\ \mathrm{Var}\left(\hat{\beta}_1\right)$$

$$=\sigma_\varepsilon^2\left(\frac{1}{N}+\frac{\bar{x}^2}{\Sigma x_t^2}\right) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.3.6)$$

2.4 ANALISA VARIAN MODEL ARMA

Pembahasan analisa varian untuk model ARMA akan mengacu pada analisa varian model regresi.

Model ARMA (1,0) / AR (1)

Hasil dari model regresi sederhana

$$y_t=\beta_1 x_t+\varepsilon_t$$

sebenarnya tidak dapat dipakai untuk model AR(1)yang dibahas pada bab III dalam bentuk:

$$X_t=\phi_1 X_{t-1}+a_t \qquad \text{................(2.4.1)}$$

Sekalipun seperti ε_t, a_t adalah independen, karena X_{t-1} adalah random variabel tidak seperti variabel deterministik x_t. Pada saat t-1, pengamatan X_{t-1} diketahui atau tertentu dan deterministik, maka model AR(1) dapat dipertimbangkan sebagai model regresi linier bersyarat dan persamaan (2.1.5) dapat digunakan untuk memperoleh estimator

$$\hat{\phi}_1 = \frac{\Sigma X_t X_{t-1}}{\Sigma X_{t-1}^{\;2}} \qquad \text{...............(2.4.2)}$$

dimana $X_t = \dot{X}_t - \bar{X}$

Menurut kwadrat terkecil bersyarat ini, $\hat{\phi}_1$ adalah tak bias dan konsisten, yaitu rata-rata atau mean dari $\hat{\phi}_1$ adalah ϕ_1 dan variannya cenderung ke-nol untuk $N \longrightarrow \infty$.

Bagaimanapun, menurut kwadrat terkecil tak bersyarat, ketika X_{t-1} ditentukan sebagai variabel random dan t-1 tidak dipertimbangkan secara khusus, maka hasilnya hanya kebenaran kira-kira. Penaksiran serupa dapat digunakan pada N yang besar untuk menghitung varian dari $\hat{\phi}_1$ dengan mengganti ΣX_{t-1}^2 dengan nilai ekspektasi.

Pada pembahasan dibelakang (bab III), disebutkan bahwa:

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^{\,j}\, a_{t-j} \qquad ....(2.4.3)$$

sehingga, $\operatorname{Var}(X_t) = \operatorname{Var}\left(\sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^{\,j}\, a_{t-j}\right)$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \operatorname{var}\left(\phi_1^{\,j}\, a_{t-j}\right)$$

$$= \left(\sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^{2j}\right) \sigma_a^2$$

$$= \frac{\sigma_a^2}{1 - \phi_1^2} \qquad ....(2.4.4)$$

$$N \operatorname{Var}(X_{t-1}) = N \operatorname{Var}(X_t) = N\, \sigma_a^2/(1-\phi_1^2)$$

$$\operatorname{Var}(\hat{\phi}_1) \simeq \frac{\sigma_a^2}{\Sigma X_{t-1}^2} \simeq \frac{\sigma_a^2}{N \operatorname{Var}(X_t)} = \frac{(1-\phi_1)}{N}$$

$$............(2.4.5)$$

dan

$$\operatorname{Var}(\hat{\phi}_1) \simeq \frac{\sigma_a^2}{N\, \sigma_a^2} \quad \text{dimana } \phi_1 = 0$$

$$= \frac{1}{N} \qquad ....(2.4.6)$$

Alasan serupa dapat digunakan untuk estimator sampel autokorelasi

$$\hat{\rho}_k = \frac{\Sigma X_t X_{t-k}}{\Sigma X_{t-k}^2}$$

untuk mendapatkan varian saat $\rho_k \equiv 0$:

$$\mathrm{Var}\left(\hat{\rho}_k\right) \simeq \frac{1}{N} \qquad \text{.....................(2.4.7)}$$

Model ARMA (2,0) / AR (2)

Mengikuti penalaran yang sama pada model regresi berganda, untuk model AR (2) dengan bentuk :

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} = a_t \qquad \text{.............(2.4.8)}$$

Estimasi model ini adalah :

$$\begin{bmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \end{bmatrix} = (X'X)^{-1}X'Y \qquad \text{.............(2.4.9)}$$

dimana

$$X = \begin{bmatrix} X_2 & X_1 \\ X_3 & X_2 \\ \vdots & \vdots \\ X_{N-1} & X_{N-2} \end{bmatrix}$$

$$Y = X_t = \begin{bmatrix} X_3 \\ X_4 \\ \vdots \\ X_N \end{bmatrix}$$

Varian dari parameter ini adalah :

$$\mathrm{Var}\begin{bmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \end{bmatrix} = (X'X)^{-1}\sigma^2_a = \begin{bmatrix} \Sigma X_t^2 & \Sigma X_t X_{t-1} \\ \Sigma X_t X_{t-1} & \Sigma X_t^2 \end{bmatrix}^{-1} \sigma_a^2$$

..........(2.4.10)

Untuk jumlah N pengamatan yang besar, nilai-nilai dari ΣX_t^2 dan $\Sigma X_t X_{t-1}$ sama dengan nilai ekspektasinya :

$$N \text{ Var } (X_t) = N\,\gamma_o \text{ dan } N \text{ Kov } (X_t X_{t-1}) = N\,\gamma_1$$

$$\gamma_o = \frac{(1-\phi_2)\sigma_a^2}{(1+\phi_2)[(1-\phi_2)^2-\phi_1^2]} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.4.11)$$

$$\gamma_1 = \frac{\phi_1}{(1-\phi_2)}\,\gamma_o \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.4.12)$$

dimana pengertian γ_o dan γ_1 dijelaskan pada bab III.

oleh karena itu :

$$\text{Var}\begin{bmatrix}\hat{\phi}_1\\ \hat{\phi}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N\gamma_o & N\gamma_1\\ N\gamma_1 & N\gamma_o\end{bmatrix}^{-1}\sigma_a^2$$

$$= \frac{\sigma_a^2}{N\gamma_o}\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{\phi_1}{(1-\phi_2)}\\ \dfrac{\phi_1}{(1-\phi_2)} & 1\end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{(1+\phi_2)[(1-\phi_2)^2-\phi_1^2]}{N(1-\phi_2)}\;\frac{(1-\phi_2)}{[(1-\phi_2)^2-\phi_1^2]}\begin{bmatrix} 1 & \dfrac{-\phi_1}{(1-\phi_2)}\\ \dfrac{-\phi_1}{(1-\phi_2)} & 1\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{N}\begin{bmatrix} 1-\phi_2^2 & -\phi_1(1+\phi_2)\\ -\phi_1(1+\phi_2) & 1-\phi_2^2\end{bmatrix} \quad ..(2.4.13)$$

Model ARMA (n,n-1)

Varian model ARMA dapat diperoleh dengan jalan yang sama seperti model AR (2). Ditentukan lebih dahulu nilai-nilai dari a_t dengan cara rekursive seperti yang dilakukan pada bab IV dan menganggap nilai-nilai dari a_t

adalah sebagai data seperti X_t.

Contoh untuk model ARMA (2,1):

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} = a_t - \theta_1 a_{t-1} \quad \ldots\ldots\ldots(2.4.14)$$

Apabila nilai estimasi telah ditentukan dengan prosedur estimasi (pada bab IV), maka a_t dapat ditentukan sebagai berikut:

$$a_t = X_t - \hat{\phi}_1 X_{t-1} - \hat{\phi}_2 X_{t-2} + \hat{\theta}_1 a_{t-1} \quad \ldots\ldots\ldots(2.4.15)$$

dimana $\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \hat{\theta}_1$ adalah ekpektasi dari ϕ_1, ϕ_2, θ_1.

Menulis kembali model ARMA (2,1) dalam bentuk:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} - \theta_1 a_{t-1} + a_t \quad \ldots\ldots\ldots(2.4.16)$$

Bentuk persamaan (2.4.16) sama dengan model AR (3) :

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \phi_3 X_{t-3} + a_t \quad \ldots\ldots\ldots(2.4.17)$$

dengan : $\phi_3 = -\theta_1$; $X_{t-3} = a_{t-1}$

dengan cara yang sama seperti pada AR (2) , dapat ditentukan Varian dari ϕ_1, ϕ_2 dan θ_1.

2.5 DISTRIBUSI NORMAL DAN INTERVAL KONVIDENSI

Jika X adalah variabel random berdistribusi normal dengan mean μ_x dan varian σ_x^2 , ditulis secara singkat :

$$X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$$

Probabilitas Kepadatan dari x pada X diberikan oleh:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}\,\sigma_x} \text{Exp.}-\left[(x - \mu_x)^2/2\sigma_x^2\right] \quad \ldots\ldots(2.5.1)$$

$$-\infty < x < \infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1 \qquad .....(2.5.2)$$

Kemungkinan X akan mempunyai nilai antara a dan b, dinyatakan dengan :

$$P(a \le X \le b) = \int_{a}^{b} f(x)\, dx \qquad ....(2.5.3)$$

Kombinasi linier dari variabel berdistribusi normal adalah berdistribusi normal pula.

$$X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)\ ;\ Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$$

maka

$$aX + bY \sim N\left[(a\mu_x + b\mu_y), (a^2\sigma_x^2 + 2ab\sigma_{xy} + b^2\sigma_y^2)\right] \qquad ....(2.5.4)$$

jika X dan Y independen maka:

$$\text{Kov.}(X,Y) = \gamma_{xy} = \sigma_{xy} = 0$$

$$aX + bY \sim N\left[(a\mu_x + b\mu_y), (a^2\sigma_x^2 + b^2\sigma_y^2)\right] \qquad ....(2.5.5)$$

Mentranformasikan variabel random X kedalam variabel random Z sebagai berikut:

$$Z = \frac{X - \mu_x}{\sigma_x} = \frac{\text{Variabel - Mean}}{\text{Standar Deviasi}}$$

$$Z = \frac{1}{\sigma_x} X - \frac{\mu_x}{\sigma_x} \qquad ....(2.5.6)$$

dengan mempergunakan persamaan (2.5.5) dan mengambil harga $a = 1/\sigma_x$ dan $b = -1$ diperoleh:

$$\mu_z = E(Z) = \frac{\mu_x}{\sigma_x} - \frac{\mu_x}{\sigma_x} = 0$$

$$\sigma_z = E(Z - \mu_z)^2 = E(Z^2)$$

$$= \frac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2} + (-1)^2 \times 0 = 1$$

maka $Z \sim N(0,1)$

Jadi Z berdistribusi normal standar dengan mean nol dan varian satu. Probabilitas kumulatif $\Phi(z) = P(-\infty < Z \leq z)$ untuk semua harga z diberikan dalam Tabel pada Lampiran. Nilai-nilai yang banyak digunakan dalam praktek adalah:

$\Phi(1{,}65) = 0{,}95053$

$\Phi(1{,}96) = 0{,}975$

$\Phi(2{,}58) = 0{,}99506$

Distribusi Normal Standar adalah simetrik, sehingga untuk:

$$P(-1{,}65 \leq Z \leq 1{,}65) = \Phi(1{,}65) - \Phi(-1{,}65)$$
$$= \Phi(1{,}65) - [1 - \Phi(1{,}65)]$$
$$\simeq 0{,}90 = 90\%$$

dengan cara yang sama:

$P(-1{,}96 \leq Z \leq 1{,}96) = 0{,}95 = 95\%$

$P(-2{,}58 \leq Z \leq 2{,}58) = 0{,}99 = 99\%$

Dengan kata lain, kepercayaan :90% , 95% ,dan 99% batas probabilitas untuk Z berturut-turut adalah : $\pm$ 1,65 , $\pm$ 1,96 ,dan $\pm$ 2,58.

Dari persamaan (2.5.6) diperoleh:

$$X = \mu_x + Z\sigma_x \qquad \text{.................(2.5.7)}$$

= Mean + Z x Standar Deviasi

Dengan kepercayaan 90% , 95% , dan 99% , batas probabilitas untuk X adalah :

$\mu_x \pm 1{,}65\ \sigma_x$, $\mu_x \pm 1{,}96\ \sigma_x$,dan $\mu_x \pm 2{,}58\ \sigma_x$

pada umumnya kepercayaan (p x 100%) batas probabilitasnya adalah :

$$\mu_x \pm z_{p+1/2}\ \sigma_x \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.5.8)$$

dimana

$$\Phi\ (z_{p+1/2}) = p + \frac{1-p}{2} = \frac{p+1}{2} \qquad \ldots.(2.5.9)$$

Jika diketahui Mean μ_x dan Varian σ_x dari distribusi variabel normal, maka batas probabilitas dapat ditentukan dari persamaan (2.5 . 8). Dengan menggunakan Tabel pada Lampiran dapat ditentukan $z_{(p+1)/2}$ yang didefinisikan oleh persamaan (2.5.9).

Contoh:

Batas probabilitas 80% dapat ditentukan dengan Tabel sebagai berikut:

$$\Phi\ (z_{p+1/2}) = \frac{0,8+1}{2} = 0,9$$

diperoleh $z_{p+1/2} = 1,28$ sehingga batas probabilitasnya adalah:

$$\mu_x \pm 1,28\ \sigma_x$$

Sekarang jelas bahwa (lihat persamaan (2.3.1) dan (2.3.2)) model Regresi sederhana:

$$\mathring{y}_t = \beta_0 + \beta_1 \mathring{x}_t + \varepsilon_t \quad , \quad \varepsilon_t \sim \text{NID}\ (0, \sigma_\varepsilon^2)$$

ekivalen dengan:

$$\dot{y}_t \sim \text{NID}\ (\beta_0 + \beta_1 \dot{x}_t, \sigma_\varepsilon^2) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.5.10)$$

lebih singkatnya:

$$y_t = \beta_1 x_t + \varepsilon_t \quad , \quad \varepsilon_t \sim \text{NID}\ (0, \sigma_\varepsilon^2)$$

ekivalen dengan:

$$y_t \sim \text{NID}\ (\beta_1 x_t, \sigma_\varepsilon^2) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.5.11)$$

Jika diasumsikan bahwa parameter β_0, β_1, dan σ_ε^2 diketahui, prediksi untuk kedua kasus adalah $\beta_0 + \beta_1 \mathring{x}_t$ atau $\beta_1 x_t$ dan batas probabilitas 95% pada peramalan diberikan dengan:

$$\beta_0 + \beta_1 \mathring{x}_t \pm 1{,}96\sigma_\varepsilon \quad \text{dan} \quad \beta_1 x_t \pm 1{,}96\sigma_\varepsilon$$

Bagaimanapun , dalam praktek baik mean maupun varian diketahui. Andaikata yang diketahui σ_ε^2, maka $\bar{x}$ adalah estimator terbaik untuk μ_x. Sekarang dapat dibuat pernyataan probabilitas mengenai seberapa jauh $\bar{x}$ dari μ_x. Karena $\bar{x}$ adalah kombinasi linier dari distribusi normal variabel independen: $x_1, x_2, \ldots, x_N$, mengikuti persamaan (2.2.15),(2.2.16a) dan (2.5.5) bahwa

$$\bar{x} \sim N(\mu_x, \sigma_x^2/N) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.5.12)$$

Jika mengambil kepercayaan 95% didapatkan:

$$P\left(\mu_x - \frac{1{,}96\sigma_x}{\sqrt{N}} \le \bar{x} \le \mu_x + \frac{1{,}96\sigma_x}{\sqrt{N}}\right) = 0{,}95 = 95\%$$

yaitu:

$$P\left(\bar{x} - \frac{1{,}96\sigma_x}{\sqrt{N}} \le \mu_x \le \bar{x} + \frac{1{,}96\sigma_x}{\sqrt{N}}\right) = 0{,}95 = 95\%$$

Jadi Interval Konvidensi untuk mean μ_x adalah:

$$\bar{x} \pm 1{,}96\ \sigma_x/\sqrt{N}$$

dan dengan cara yang sama , Interval Konvidensi 90% dan 99% adalah:

$$\bar{x} \pm 1{,}65\ \sigma_x/\sqrt{N} \quad \text{dan} \quad \bar{x} \pm 2{,}58\ \sigma_x/\sqrt{N}$$

Dengan cara yang sama estimator kwadrat terkecil $\hat{\beta}_0$ dan $\hat{\beta}_1$ adalah kombinasi linier pada variabel normal independen: $\dot{y}_1, \dot{y}_2, \ldots, \dot{y}_N$ dan oleh karena itu, jika digunakan persamaan (2.1.4) sampai (2.3.6) didapatkan:

$$\hat{\beta}_o \sim N\left\{\beta_o,\ \sigma_\varepsilon^2\ \left(\frac{1}{N}+\frac{\bar{x}^2}{\Sigma x_t^2}\right)\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.5.13)$$

$$\hat{\beta}_1 \sim N\left\{\beta_1,\ \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\Sigma x_t^2}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.5.14)$$

oleh karena itu, Interval Konvidensi 95% untuk β_o dan β_1 berturut-turut adalah:

$$\hat{\beta}_o \pm 1,96\ \sigma_\varepsilon \sqrt{\frac{1}{N}+\frac{\bar{x}^2}{\Sigma x_t^2}}$$

$$\hat{\beta}_1 \pm 1,96\ \frac{\sigma_\varepsilon}{\sqrt{\Sigma x_t^2}}$$

Penggunaan metode yang demikian, dapat ditunjukan bahwa untuk $N \longrightarrow \infty$, $\hat{\phi}_1$atau $\hat{\rho}_k$ biasanya berdistribusi normal dengan mean $\phi_1$atau ρ_k.Oleh karena itu , untuk N berhingga aproksimasi interval konvidensi 95% dapat diberikan dengan persamaan (2.4.5) untuk syarat kecukupan model AR (1).

$$\hat{\phi}_1 \pm \frac{1,96\sigma_\varepsilon}{\sqrt{\Sigma x_t^2}}$$

atau:

$$\hat{\phi}_1 \pm 1,96\ \sqrt{(1-\phi_1^{\,2})/N}$$

dan ketika ϕ_1=0atau ρ_k=0, dengan persamaan (2.4.6) dan (2.3.9) didapatkan:

$$\pm\ 1,96\ /\ \sqrt{N}$$

2.6 DISTRIBUSI CHI-KWADRAT

Distribusi Chi-Kwadrat (X^2) didefinisikan sebagai: Jumlah kwadrat pada variabel normal standar Independen.

Jika $z_1, z_2, \ldots, z_v$ adalah variabel normal standar independen, maka χ_v^2 dinyatakan dalam jumlah kwadrat sebagai berikut:

$$\chi_v^2 = z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_v^2 \ , \qquad \ldots\ldots\ldots(2.6.1)$$

$$z_t \sim \text{NID}\ (0,1)$$

dimana z didefinisikan oleh persamaan (2.2.6)

$$\chi_v^2 = \frac{(x_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2 - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} + \ldots + \frac{(x_v - \mu_v)^2}{\sigma_v^2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.6.2)$$

$$x_t \sim \text{NID}\ (\mu_t, \sigma_t^2)$$

Mean dari χ_v^2 adalah:

$$E\ (\chi_v^2) = E\ (z_1^2) + E\ (z_2^2) + \ldots + E\ (z_v^2)$$

$$= v \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.6.3)$$

Bilangan bulat v merupakan jumlah dari variabel normal standar independen untuk χ_v^2, sehingga v merupakan derajat kebebasan dari χ_v^2. Jika diambil $\sigma_i^2 = \sigma^2$ dalam (2.6.2), mengikuti jumlah kwadrat dari variabel normal independen dengan mean nol dan varian σ^2 adalah berdistribusi $\sigma^2 \chi_v^2$, yaitu:

$$\sum_{i=1}^{v} y_i^2 \sim \sigma^2 \chi_v^2 \ , \quad y_i \sim (0, \sigma^2) \quad \ldots(2.6.4)$$

$$E \sum_{i=1}^{v} y_i^2 = E\ \left(\sigma^2 \chi_v^2\right) = v\sigma^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.6.5)$$

Fungsi probabilitas kepadatan dari χ_v^2 dapat dibuat dari persamaan (2.5.1) menggunakan definisi (2.6.1).

Distribusi Chi-kwadrat dibutuhkan ketika varian tak diketahui. Menggunakan χ^2, dapat diperlihatkan bahwa estimator $\hat{\sigma}_x^2$ yang dinyatakan dengan (2.2.12), dengan mengganti ekpektasi dengan rata-rata akan menjadi bias, dan dapat diubah untuk menjadi takbias.

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{N} \Sigma (x_i - \bar{x})^2$$

$$N\hat{\sigma}_x^2 = \Sigma (x_i - \bar{x})^2$$

Jadi $N\hat{\sigma}_x^2$ adalah jumlah kwadrat dari variabel normal dengan mean nol; $x_1 - \bar{x}$, $x_2 - \bar{x}$, ..., $x_N - \bar{x}$; yang mana hanya N - 1 yang independen , sebab:

$$\Sigma (x_i - \bar{x})^2 = \Sigma x_i - N \bar{x} = 0$$

oleh karena itu dengan persamaan (2.6.4) diperoleh:

$$N\hat{\sigma}_x^2 \sim \sigma_x^2 X_{N-1}^2 \quad \text{atau} \quad \frac{N\sigma_x^2}{\sigma_x^2} \sim X_{N-1}^2 \qquad \ldots\ldots(2.6.6)$$

dimana $v = N - 1$

yaitu:

$$\text{Derajat kebebasan} = \begin{matrix}\text{pengamatan}\\ \text{independen}\end{matrix} - \begin{matrix}\text{estimator}\\ \text{parameter}\end{matrix} \qquad \ldots\ldots(2.6.7)$$

Dengan kata lain , dikatakan kehilangan satu derajat kebebasan yang disebabkan digunakannya satu estimator $\bar{x}$ yang menggantikan parameter μ_x. Catatan bahwa dengan persamaan (2.6.4) didapatkan:

$$\Sigma (x_i - \mu_x)^2 \sim \sigma_x^2 X_N^2$$

yang mana mempunyai N derajat kebebasan, yang disebabkan karena μ_x diketahui. dengan persamaan (2.6.5) :

$$E(N\hat{\sigma}_x^2) = E\,\Sigma(x_i - \bar{x})^2 = (N - 1)\sigma_x^2 \qquad \ldots\ldots(2.6.8)$$

$$E(\hat{\sigma}_x^2) = \frac{(N - 1)\sigma_x^2}{N} \qquad \ldots\ldots(2.6.8a)$$

Terlihat bahwa estimasi dari $\hat{\sigma}_x^2$ adalah bias. Hal ini dapat diperbaiki dengan estimator baru:

$$S^2 = \frac{N}{N-1}\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{N-1}\Sigma(x_t - \bar{x})^2 \quad ....(2.6.9)$$

dimana: $E(S^2) = \sigma_x^2$

yang merupakan estimator tak-bias dari σ_x^2. Kemudian:

$$\Sigma(x_i - \bar{x})^2 = (N-1)S^2 \sim \sigma_x^2 \, X_{N-1}^2$$

$$\frac{(N-1)S^2}{\sigma_x^2} \sim X_{N-1}^2 \quad ....(2.6.10)$$

Dengan cara yang sama, dapat digunakan untuk varian σ_ε^2 dari $\dot{y}_t$ dalam model Regresi sederhana tidak diketahui. Jadi seperti pada $\hat{\sigma}_x^2$, estimator kwadrat terkecil $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ yang dinyatakan sebagai:

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{N}\Sigma(y_t - \hat{\beta}_1 x_t)^2 \quad ....(2.6.11)$$

adalah bias. Persamaan (2.6.11) dinyatakan dalam variabel data yang sesungguhnya dan dengan menggunakan persamaan (2.1.4) menjadi:

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{N}\Sigma(y_t - \hat{\beta}_1 x_t)^2$$

$$= \frac{1}{N}\Sigma(\dot{y}_t - \bar{y} - \hat{\beta}_1\dot{x}_t + \hat{\beta}_1\bar{x})^2$$

$$= \frac{1}{N}\Sigma(\dot{y}_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1\dot{x}_t)^2 \quad ....(2.6.12)$$

Jadi $N\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ adalah jumlah kwadrat variabel random berdistribusi Normal dengan mean nol dari N pengamatan independen dengan dua parameter β_0 dan β_1 yang diganti dengan estimasinya. Oleh karena itu dengan persamaan

(2.6.7) diperoleh derajat kebebasan N - 2.

$$N\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2} \sim \sigma_{\varepsilon}^{2} \chi_{N-2}^{2} \quad \text{.........................(2.6.13)}$$

maka dengan persamaan (2.6.5) diperoleh:

$$E\ (N\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}) = E\ \Sigma(\dot{y}_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1\dot{x}_t)^2 = (N-2)\sigma_{\varepsilon}^{2}$$

atau

$$E(\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}) = \frac{(N-2)\sigma_{\varepsilon}^{2}}{N} \quad \text{.......................(2.6.14)}$$

ini menunjukan bahwa estimatornya adalah Bias. Estimator tak-Bias akan menjadi:

$$S_R^2 = \frac{N}{N-2}\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}$$

$$= \frac{1}{N-2}\Sigma\ (\dot{y}_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1\dot{x}_t)^2 \quad \text{............(2.6.15)}$$

dan

$$E\ (S_R^2) = \sigma_{\varepsilon}^{2}$$

dengan :

$$\Sigma\ (\dot{y}_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1\dot{x}_t)^2 = (N-2)S_R^2 \sim \sigma_{\varepsilon}^{2} \chi_{N-2}^{2}$$

$$\frac{(N-2)S_{\varepsilon}^{2}}{\sigma_{\varepsilon}^{2}} \sim \chi_{N-2}^{2} \quad \text{...............(2.6.16)}$$

Jadi S_R^2 akan digunakan untuk mengganti σ_{ε}^{2}, jika diinginkan estimasi tak-Bias.