Bab II
MATERI PENUNJANG

2.1. Pengertian dasar graph

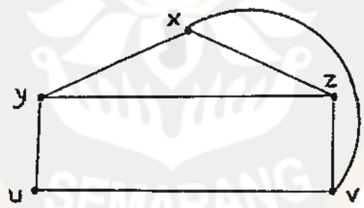
Definisi 1

Graph adalah suatu himpunan tidak kosong dari titik-titik $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots vn\}$ beserta himpunan garis-garis. $E(G) = \{(v_1,v_2), (v_2,v_3), \ldots (v_{n-1},v_n)\}$ dan boleh kosong.

Graph G dinyatakan oleh G(V,E) dan ruas garis berpangkal dan berujung pada titik-titik.

Contoh 1

Berikut ini suatu graph G(V,E) dengan himpunan titik $V = \{x,y,z,u,v\}$ dan himpunan garis $E = \{(x,y),(x,z),(x,v),(y,z),(y,v),(z,v),(u,v)\}$. Graph seperti ini dapat digambarkan secara geometris seperti berikut :



Gambar 2.1.1

Graph dengan 5 titik dan 7 garis

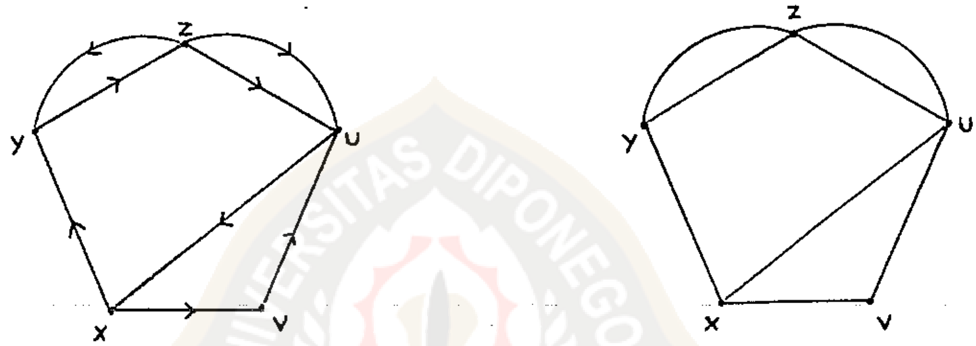
Definisi 2

Suatu graph berarah (directed graph atau digraph) adalah suatu G yang terdiri dari suatu himpunan V yaitu titik dan suatu himpunan E yaitu garis, yang terdiri dari pasangan terurut dari titik yang dituliskan sebagai (x,y) yang disebut garis berarah.

Contoh 2

Misalkan G(V,E) adalah suatu graph berarah dengan himpunan titiknya adalah V={x,y,z,u,v} dan garis berarah E={(x,y),(y,z),(z,y),(z,u),(u,x),(z,u),(v,u), (x,v)}.

Pada gambar di bawah ini sebelah kiri adalah graph berarah dan di sebelah kanan adalah graph tidak berarah.



Gambar 2.1.2

Graph berarah dan graph tidak berarah

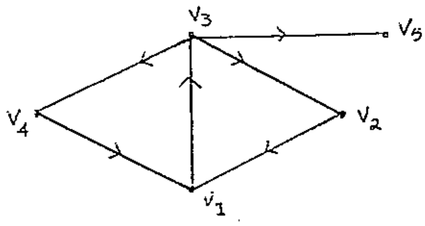
Definisi 3

Suatu garis (x,y) dalam suatu graph, titik x disebut titik awal (initial endpoint) dan titik y disebut titik akhir (terminal endpoint)

Definisi 4

Derajat (degree) suatu titik adalah banyaknya garis yang bertemu pada titik tersebut. Dalam suatu graph berarah yang dimaksud dengan derajat masuk (in degree) ialah jumlah garis yang masuk pada suatu titik dan yang dimaksud dengan derajat keluar (out degree) ialah jumlah garis yang keluar pada suatu titik. Maka derajat dari suatu titik adalah jumlahan dari derajat masuk dan derajat keluar.

Contoh 3.



Gambar 2.1.3 Titik V_3 mempunyai derajat 4.

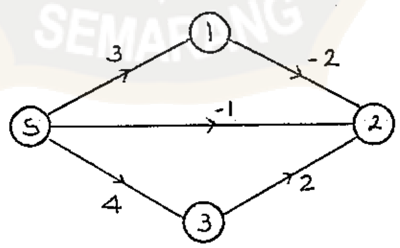
Definisi 5

Nilai / harga dari suatu garis dalam graph disebut bobot dari garis tersebut dan ditulis dengan lambang L(e) atau $L(v_i, v_j)$.

Bobot dari suatu garis bisa positif, nol ataupun negatif. Suatu graph berarah yang tiap garisnya berbobot disebut jaringan kerja berarah, dinotasikan G(V,E,L).

Contoh 4

Misal G(V,E) adalah suatu graph dengan himpunan titik V ={s,1,2,3,4}, himpunan garis E={(s,1),(s,2),(s,3),(1,2),(3,2)}, seperti pada gambar 2.1.4, maka L(s,1) = 3, L(s,2) = -1, L(s,3) = 4, L(1,2) = -2, L(3,2) = 2



Gambar 2.1.4.

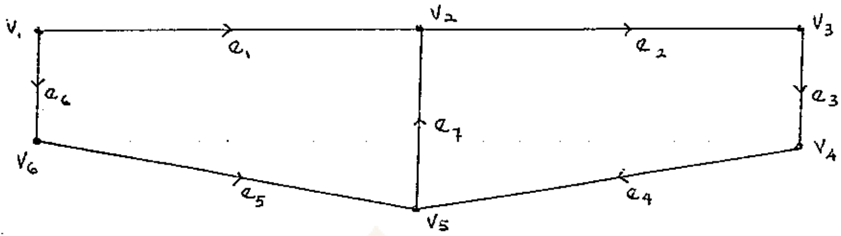
2.2. Lintasan

Definisi 6

Rantai adalah deretan bergantian antara titik dan garis berarah yang dimulai dan diakhiri dengan titik, serta garis tidak boleh berulang. Sedangkan lintasan adalah rantai yang garis berarahnya sehaluan.

Contoh 5

Andaikan G(V,E) adalah graph berarah dengan himpunan titik V = {v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6} dan himpunan garis E = {e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7}. Maka lintasan v_2 ke v_5 adalah v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_4, v_5



Gambar 2.1.5

Lintasan v_2 ke v_5 ($P_{v_2 v_5}$).

Definisi 7

Bobot suatu lintasan adalah jumlah bobot semua garis yang membentuk lintasan itu. Bobot lintasan dari titik i ke j ditulis dengan lambang $L(P_{ij})$.

Contoh 6

Seperti gambaran 2.1.5. jika $L(e_2) = 2$, $L(e_3) = -1$, $L(e_4) = 4$.

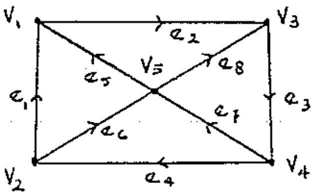
Maka $L(P_{v_2 v_5}) = L(e_2) + L(e_3) + L(e_4) = 2 - 1 + 4 = 5$

Definisi 8

Cycle adalah suatu rantai yang sedemikian sehinga garis tidak boleh diulang dan ke 2 titik ujung dari rantai merupakan titik yang sama.

Contoh 7

G(V,E) adalah suatu graph berarah dengan himpunan titik V = {v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 } dan himpunan garis E = {e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8}, terdapat suatu rantai yang merupakan cycle yaitu v_1, e_2, v_3, e_8, v_5, e_5, v_1



Gambar 2.1.5.

Definisi 9

Circuit adalah suatu cycle yang merupakan lintasan, yang titik awal dan titik akhirnya terletak pada titik yang sama.

Suatu circuit disebut circuit positif jika jumlah semua bobot garis yang membentuk circuit itu merupakan suatu bilangan positif. Sedangkan suatu circuit disebut circuit negatif jika jumlah semua bobot garis yang membentuk circuit itu merupakan suatu bilangan negatif.

Contoh 8

Seperti gambar 2.1.5., lintasan v_1, e_2, v_3, e_3, v_4, e_4, v_2, e_1, v_1. merupakan lintasan tertutup atau merupakan circuit.

Jika pada gambar 2.1.5 itu, masing-masing garisnya mempunyai bobot yaitu.

$L(e_1) = 2$, $L(e_2) = -7$, $L(e_3) = 3$, $L(e_4) = -2$,

$L(e_5) = 4$, $L(e_6) = 1$, $L(e_7) = -2$, $L(e_8) = 1$

Maka circuit v_1, e_2, v_3, e_3, v_4, e_4, v_2, e_1, v_2 merupakan circuit negatif sebab $L(e_1)+L(e_2)+(L(e_3)+L(e_4) = 2 + (-7) + 3+ (-2) = -4$

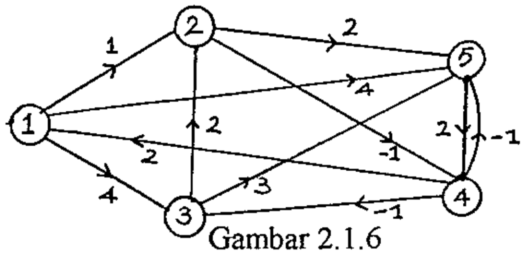
Definisi 10

Jarak adalah bobot terkecil lintasan dari titik i ke titik j dalam suatu jaringan G(V,E,L). Lintasan dengan bobot terkecil ini disebut lintasan terpendek.

Contoh 9

Dari gambar 2.1.6. yaitu suatu jaringan G(V,E,L) dengan V = {1,2,3,4,5}, E={(1,2),(1,3),(1,5),(2,4),(2,5),(3,2),(3,5),(4,1),(4,3),(4,5),(5,4)}. Bobot dari garisnya adalah :

L(1,2) = 1 ,	L(1,3) = 4 ,	L(1,5) = 4
L(2,4) = -1 ,	L(2,5) = 2 ,	L(3,2) = 2
L(3,5) = 3 ,	L(4,1) = 2 ,	L(4,3) = -1
L(4,5) = -1 ,	L(5,4) = 2	



Gambar 2.1.6

Dapat ditemukan 7 buah lintasan P_{15} yaitu lintasan dari titik 1 ke titik 5

${}^{(1)}P_{15}$ = (1,2) (2,5)

${}^{(2)}P_{15}$ = (1,2) (2,4) (4,5)

${}^{(3)}P_{15}$ = (1,2) (2,4) (4,3) (3,5)

${}^{(4)}P_{15}$ = (1,5)

${}^{(5)}P_{15}$ = (1,3) (3,2) (2,5)

${}^{(6)}P_{15}$ = (1,3) (3,2) (2,4) (4,5)

${}^{(7)}P_{15}$ = (1,3) (3,5)

Bobot dari masing-masing lintasan tersebut :

$L({}^{(1)}P_{15}) = L(1,2) + L(2,5) = 1+2 = 3$

$L({}^{(2)}P_{15}) = L(1,2) + L(2,4) + L(4,5) = 1-1-1 = -1$

$L({}^{(3)}P_{15}) = L(1,2) + L(2,4) + L(4,3) + L(3,5) = 1-1-1+3 = 2$

$L({}^{(4)}P_{15}) = L(1,5) = 4$

$L({}^{(5)}P_{15}) = L(1,3) + L(3,2) + L(2,5) = 4+2+2 = 8$

$L({}^{(6)}P_{15}) = L(1,3) + L(3,2) + L(2,4) + L(4,5) = 4+2-1-1 = 4$

$L({}^{(7)}P_{15}) = L(1,3) + L(3,5) = 4+3 = 7$

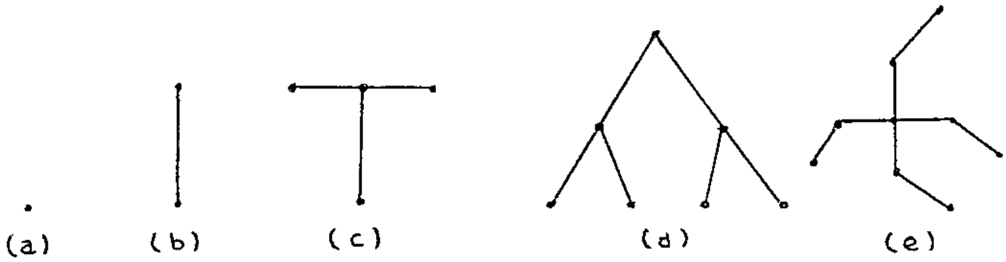
Bobot terkecilnya -1. Jadi lintasan terpendek P_{15} terdiri dari garis (1,2) (2,4) (4,5) dengan jarak -1

2.3. Tree

Definisi 11

Tree (pohon) adalah graph terhubung yang tidak memiliki cycle.

Contoh 10



Gambar 2.1.7. Tree

Teorema 1

Ada satu dan hanya satu lintasan di antara pasangan titik-titik dalam sebuah tree T.

Bukti :

Jika T adalah graph terhubung, maka harus ada sedikitnya satu lintasan diantara pasangan titik-titik dalam T.

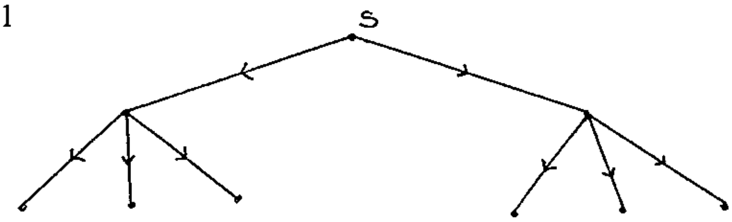
Andaikan diantara 2 titik a dan b pada T ada 2 buah lintasan yang berbeda, union dari 2 lintasan tersebut akan membentuk suatu cycle dan menurut definisi 11, maka T bukan merupakan Tree. Kontradiksi dengan T adalah Tree, pengandaian salah,yang benar adalah ada satu dan hanya satu lintasan antara pasangan titik-titik dalam T.

Terbukti.

Definisi 12

Suatu titik pada Tree disebut akar (root) jika salah satu titik ditunjuk sebagai pangkal terhadap yang lainnya dan mempunyai derajat masuk nol, sedangkan titik yang lainnya mempunyai derajat masuk 1 (satu).

Contoh 11



Gambar 2.1.8. Tree dengan s sebagai akarnya

Dalam suatu graph G(V,E), titik s adalah sebagai akar jika semua titik dalam G dapat dicapai melalui suatu lintasan dimulai dari s