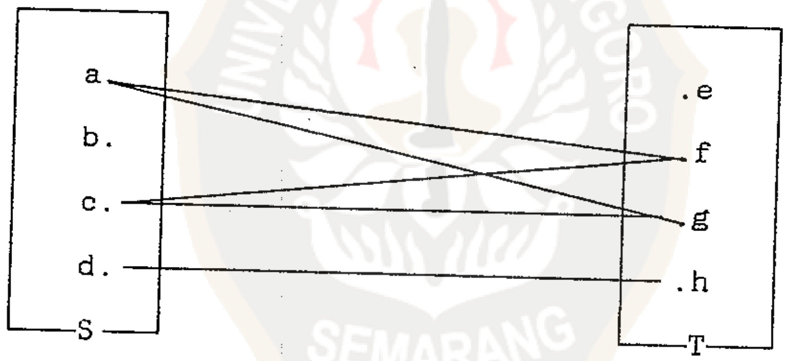
BAB II
MATERI PENUNJANG

2.1. Transformasi

2.1.1. Relasi

Suatu relasi didefiniskan antara anggota-anggota dari himpunan yang berbeda. Umpama himpunan S ialah himpunan siswa-siswa dari semester VI F MIPA dan T himpunan siswa-siswa dari semester X. Maka suatu relasi F antara anggota-anggota dari S dengan anggota-anggota dari T umpamanya ialah relasi berdiam sekampung.



Dalam gambar di atas nama-nama anggota yang berdiam sekampung dihubungkan dengan suatu garis lurus (a,c,f,g) berdiam dalam kampung Tembalang sedangkan (d,h) dalam kampung Bulusan.

Perhatikan bahwa :

1. Suatu anggota dari S (umpama b) mungkin tidak mempunyai kawan di dalam T, yaitu tidak ada anggota dari T yang berdiam sekampung dengannya. Demikian juga sebaliknya.

2. Suatu anggota dari S (umpama a) mungkin mempunyai beberapa kawan dalam T. Demikian juga sebaliknya.

Apabila urutan dari S dan T diperhatikan maka relasi di atas disebut relasi R dari S ke T. Jika demikian himpunan elemen-elemen dari S yang mempunyai kawan disebut daerah sumber (domain), sedang himpunan elemen dari T yang mempunyai kawan disebut daerah hasil (range) dari relasi R. Di bawah ini akan didefinisikan pengertian fungsi (atau pemetaan, mapping) yang merupakan kejadian khusus dari suatu relasi.

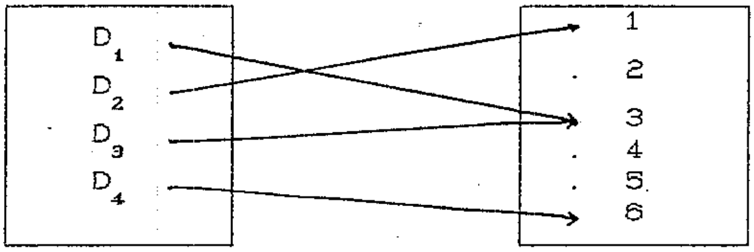
2.1.2. Pengertian Fungsi (Transformasi, Mapping, Pemetaan)

Definisi 2.1 :

Suatu fungsi dari S ke T (atau S sebagai daerah sumber (domain) dan T sebagai daerah kawan (kodomain)) ialah suatu aturan yang pada setiap anggota dari S menentukan dengan tunggal satu anggota dalam T.

Contoh :

S himpunan empat dadu. $S = \{D_1, D_2, D_3, D_4\}$. T himpunan bilangan-bilangan (mata dadu) 1 sampai dengan 6. $T=\{1,2,3,4,5,6\}$. Suatu lemparan menentukan suatu fungsi f dari S ke T.



Skema di atas memperlihatkan bahwa dadu D_1 jatuh dengan mata 3 di atas, D_2 dengan mata 1 di atas, dan seterusnya. Dikatakan bahwa kawan dari D_1 adalah 3, kawan dari D_2 adalah 1 dan seterusnya.

Perhatikan :

1. Setiap anggota dari S mempunyai kawan di dalam T. Dikatakan bahwa S (domainnya) dihabiskan. Sebaliknya ada anggota-anggota dari T yaitu 2, 4, dan 5 yang tidak mempunyai kawan dalam S.
2. Kawan dari anggota-anggota S adalah tunggal. Sebaliknya mungkin ada anggota-anggota dari T yang mempunyai beberapa kawan di S. Umpama anggota 3 dari T.

Definisi dari fungsi di atas memperlihatkan bahwa suatu fungsi adalah kejadian khusus dari relasi. Yiatu merupakan suatu relasi dari S ke T dengan setiap anggota dari S mempunyai kawan, sedang kawan itu tunggal.

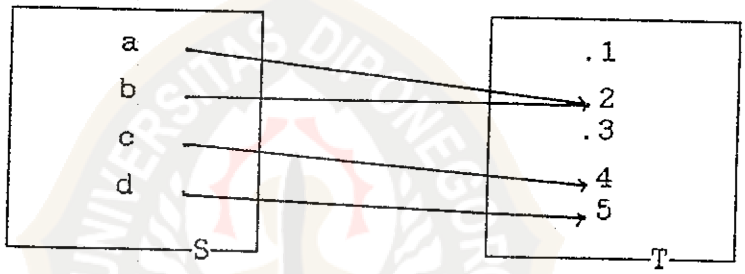
Suatu fungsi f dari S ke T disajikan dengan tanda $f : S \longrightarrow T$. Apabila $s \in S$, maka kawannya (tunggal) yang berada dalam T disajikan dengan $f(s)$. Dikatakan bahwa S dibawa ke $f(s)$. Dengan simbol :

$$s \longrightarrow f(s)$$

Definisi fungsi secara simbolis :

$$f : S \longrightarrow T \text{ bhb } (\forall s \in S)\ (\exists !t \in T).\ f(s) = t$$

Himpunan anggota-anggota dari T yang mempunyai kawan disajikan dengan $f(s)$ dan disebut daerah hasil (range) dari fungsi f.



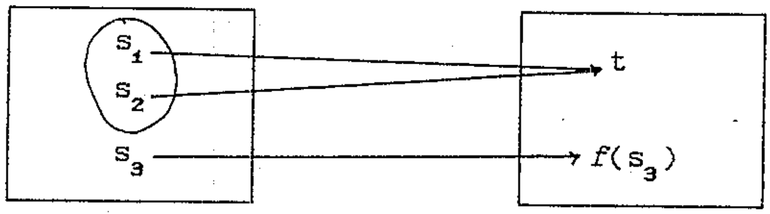
Pada fungsi di atas daerah sumber (domain), dari f ialah S={a,b,c,d}. Daerah kawan (kodomain) dari f ialah T={1,2,3,4,5}.

Daerah hasil (range) dari f ialah {2.4.5}.

Dalam definisi dari fungsi di atas S tidak usah berlainan dengan T. Umpama S himpunan bilangan-bilangan riel, dan T juga. Jadi S = T.

Pada fungsi $f : S \longrightarrow T$, dengan s dibawa ke $f(s)$, maka $f(s)$ disebut bayangan (image) atau harga fungsi. Dari definisi fungsi terlihat bahwa bayangan $f(s)$ dari S, adalah tunggal. Sebaliknya suatu anggota t dari T, mungkin mempunyai lebih satu kawan di dalam S. Himpunan kawan-kawan dari T ini disebut bayangan invers (invers image) dari t. Disajikan dengan $f^{-1}(t)$

$$f^{-1}(t). = \text{df.}\{s \in S \mid f(s) = t\}$$



Pada skema di atas $f^{-1}(t) = \{s_1, s_2\}$.

2.1.3. Fungsi-fungsi Injektif, Surjektif, Bijektif

Setiap fungsi (pemetaan) dari S ke T disebut fungsi dari S into T. Jika elemen-elemen dari T juga dihabiskan, jadi setiap t dalam T mempunyai kawan di dalam S, atau jika setiap t dalam T berasal dari sesuatu s di dalam S maka fungsi itu disebut fungsi dari S onto T. Dengan terminologi ini maka setiap fungsi yang onto adalah fungsi into, tapi tidak sebaliknya. Perhatikanlah bahwa untuk suatu fungsi yang onto berlakulah $f(s) = T$. Yaitu daerah hasil (range) berimpitan dengan daerah kawannya (kodomain). Pemetaan yang onto disebut juga *surjektif*. Atau bila disajikan dengan simbol logika :

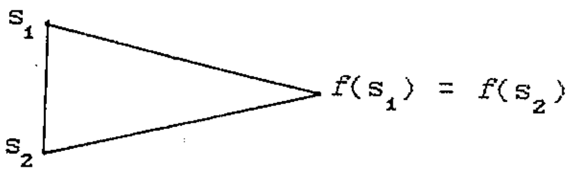
$f : S \longrightarrow T$ surjektif bhb $(\forall t \in T)\ (\exists s \in S).f(s) = t.$

Dari uraian diatas suatu fungsi disebut surjektif dari S ke T apabila $t \in T$ mungkin mempunyai lebih dari satu kawan di dalam S. Apabila $t \in T$ hanya mempunyai satu kawan saja maka fungsinya disebut *injektif*. Sehingga pada suatu fungsi yang injektif untuk setiap pasangan $s_1, s_2 \in S$

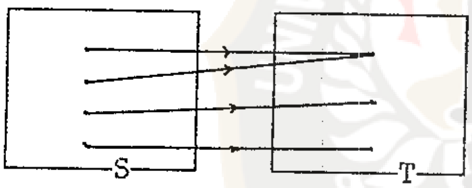
berlaku :

$$f(s_1) = f(s_2) \Longrightarrow s_1 = s_2$$

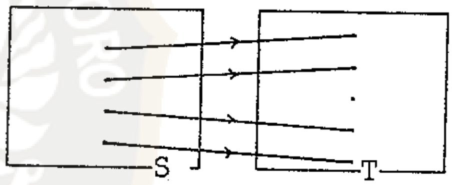
Dengan kontraposisi $s_1 \neq s_2 \Longrightarrow f(s_1) \neq f(s_2)$



Rumus di atas digunakan untuk membuktikan bahwa suatu fungsi injektif. Fungsi-fungsi yang surjektif dan injektif dapat disajikan dengan gambaran sebagai berikut :

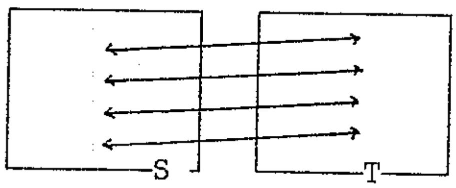


Surjektif



Injektif

Suatu fungsi yang injektif sekaligus surjektif disebut fungsi bijektif. Dengan demikian, suatu fungsi yang bijektif dapat didefinisikan sebagai berikut :
Setiap anggota dari S menentukan dengan tunggal satu anggota dari T dan sebaliknya, atau ada korespondensi satu-satu bertimbal balik antara anggota-anggota dari S dengan anggota dari T. Dapat digambarkan sebagai berikut :



Bijektif

Bilamana dan hanya bilamana f bijektif maka f^{-1} dapat dipandang sebagai suatu fungsi dari T ke S. f^{-1} juga merupakan fungsi yang bijektif dan disebut fungsi invers. Selanjutnya bilamana dan hanya bilamana f bijektif berlakulah rumus :

$f^{-1}(f(s)) = s$ $\qquad$ $s=f^{-1}f(s) \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} f(s)$

Contoh :

Misalkan S himpunan bilangan-bilangan asli sedangkan T himpunan bilangan genap positip. Perkwanan s $\in$ S dengan 2s$\in$T adalah fungsi yang bijektif.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots\ldots & n & \ldots\ldots \\ | & | & | & & | & \\ 2 & 4 & 6 & \ldots\ldots & 2n & \ldots \end{array}$$

2.2. Ruang Vektor.

2.2.1. Definisi Ruang Vektor Umum.

Pandang V adalah sembarang himpunan benda. Didefinisikan dua operasi yaitu penambahan dan perkalian dengan skalar (bilangan riel). Penambahan adalah sebuah kaidah untuk mengasosiasikan dengan setiap pasang benda u,v di dalam V sebuah elemen u + v, yang dinamakan jumlah dari u dan v. Sedangkan perkalian skalar adalah sebuah kaidah untuk mengasosiasikan dengan setiap skalar k dan setiap benda u di dalam V sebuah elemen k.u, yang dinamakan kelipatan skalar dari u oleh k.

Jika aksioma-aksioma berikut dipenuhi oleh suatu benda u,v,w di dalam V dan oleh semua skalar k dan l, maka dinamakan V sebuah ruang vektor dan benda-benda di dalam V dinamakan vektor :

(1). Jika u dan v adalah benda-benda di dalam V, maka u+v berada di dalam V.

(2). u + v = v + u

(3). u + (v + w) = (u + v) + w

(4). Ada sebuah benda 0 di dalam V sehingga 0+u = u+0 = u untuk semua u di dalam V.

(5). Untuk setiap u di dalam V, ada sebuah benda -u di dalam V yang dinamakan negatif dari u sehingga u+(-u) = (-u) + u = 0

(6). Jika k adalah sembarang bilangan riel dan u adalah sembarang benda di dalam V, maka k.u berada di dalam V.

(7). k(u+v) = ku + kv

(8). (k+l)u = ku + lu

(9). k(lu) = (kl)u

(10). 1.u = u

2.2.2. Transformasi Linier.

Definisi 2.2 :

T : V $\longrightarrow$ W adalah sebuah fungsi dari ruang vektor V ke ruang vektor W. T dinamakan transformasi linier jika :

(i). $T(u+v) = T(u) + T(v)$ untuk semua vektor u, v didalam V

(ii) $T(ku) = k\,T(u)$ untuk semua vektor u di dalam V dan semua skalar k.

Contoh 1 :

$T = R^2 \longrightarrow R^3$ adalah fungsi yang memetakan R^2 ke dalam R^3. Buktikan jika $v = (x,y)$ adalah sebuah vektor di R^2 maka

$T(v) = (x, x+y, x-y)$ adalah merupakan transformasi linear.

Bukti :

Ambil $v_1 = (x_1,y_1)$ dan $v_2 = (x_2,y_2)$

maka $v_1 + v_2 = (x_1+x_2, y_1+y_2)$

sehingga :

(i). $T(v_1+v_2) = (x_1+x_2,\ [x_1+x_2]+[y_1+y_2],\ [x_1+x_2]-[y_1+y_2])$

$= (x_1,\ x_1+y_1,\ x_1-y_1) + (x_2,\ x_2+y_2,\ x_2-y_2)$

$= T(v_1) + T(v_2)$

(ii) Jika k adalah sebuah skalar $\lambda v_1 = (kx_1, ky_1)$, sehingga

$T(kv_1) = (kx_1,\ kx_1 + ky_1,\ kx_1 - ky_1)$

$= k(x_1,\ x_1 + y_1,\ x_1 - y_1)$

$= kT(v_1)$

Jadi T adalah transformasi linear.

Contoh 2 :

$T : R^2 \longrightarrow R^3$ adalah fungsi yang memetakan R^2 ke R^3

Buktikan :

Jika $v = (x,y)$ adalah sebuah vektor di R^2 maka

$T(v) = (x,\ x+a,\ by)$ bukan merupakan transformasi linear.

Bukti :

(i). Ambil $v_1 = (x_1, y_1)$ dan $v_2 = (x_2, y_2)$

maka $v_1 + v_2 = (x_1+x_2,\ y_1+y_2)$ sehingga

$T(v_1 + v_2) = (x_1+x_2,\ x_1+x_2+a,\ b[y_1+y_2])$

$T(v_1) = (x_1,\ x_1+a,\ by_1)$

$T(v_2) = (x_2,\ x_2+a,\ by_2)$

$T(v_1) + T(v_2) = (x_1+x_2,\ x_1+x_2+2a,\ b[y_1+y_2])$

Terlihat

$T(v_1 + v_2) \neq T(v_1) + T(v_2)$

maka T bukan merupakan transformasi linear.

2.3. Bilangan Kompleks.

Definisi 2.3 :

Bilangan kompleks adalah suatu pasangan berurutan dari bilangan-bilangan riel, dan ditulis (x,y) dengan x dan y riel.

Definisi 2.4 :

Pandang z_1 dan z_2 berturut-turut adalah bilangan kompleks (x_1,y_1) dan (x_1,x_2). Penjumlahan dan perkalian antara dua bilangan komleks didefinisikan :

$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$

$z_1 . z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2,\ x_1y_2 + x_2y_1)$

Definisi 2.5 :

Didefinisikan $i = (0,1)$

Teorema 2.1

(a). $i^2 = -1$

(b). Jika x dan y riel maka $(x,y) = x + iy$

Bukti :

(a) $i^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1$

(b) $x + iy = (x,0) + (0,1)(y,0) = (x,0)+(0,y) = (x,y)$

2.3.1. Bentuk Siku-siku (Cartesis)

Sebuah bilangan kompleks yang dinyatakan sebagai jumlah dari bilangan riel dan sebuah bilangan imaginer, seperti $A = x + iy$, dikatakan berbentuk siku-siku atau berbentuk cartesis.

Sekarang didefinisikan operasi-operasi fundamental mengenai penjumlahan, selisih, perkalian dan pembagian untuk biangan-bilangan kompleks. Jumlah dua bilangan kompleks didefinisikan sebagai bilangan kompleks yang bagian rielnya adalah jumlah bagian riel dari kedua bilangan kompleks tersebut dan yang bagian imajinernya adalah jumlah bagian imajiner dari kedua bilangan kompleks tersebut. Jadi,

$$(a+ib) + (c+id) = (a+c) + i(b+d)$$

misalnya,

$$(3+i4) + (4-i2) = 7 + i2$$

Selisish dua bilangan kompleks diambil dengan cara yang sama misalnya

$$(3+i4) - (4-i2) = -1 + i6$$

Hasil perkalian dua bilangan kompleks didefinisikan oleh :

$$(a+ib)(c+id) = (ac - bd) + i(bc + ad)$$

Hasil ini dapat diperoleh dengan mudah dengan perkalian langsung dari kedua suku-suku binomial, dan menggunakan aljabar bilangan riel, dan kemudian menyederhanakan hasilnya dengan mengambil $i^2 = -1$. Misalnya :

$$\begin{aligned}(3+i4)(4-i2) &= 12 - i6 + i16 - 8i^2 \\ &= 12 + i10 + 8 \\ &= 20 + i10\end{aligned}$$

Lebih mudah mengalikan bilangan kompleks dengan metode ini khususnya jika dengan mengganti $i^2 = -1$ dari pada mensubtitusikannya kedalam rumus umum yang mendefinisikan perkalian.

Sebelum mendefinisikan operasi pembagian untuk bilangan-bilangan kompleks, didefinisikan konjugat dari sebuah bilangan kompleks. Konjugat dari bilangan kompleks $A = a + ib$ adalah $a - ib$ dan dinyatakan sebagai A^*. Konjugat dari suatu bilangan kompleks mudah didapat yakni dengan mengganti tanda bagian imajiner dari bilangan kompleks. Jadi, jika

$$A = 5 + i3$$

maka

$$A^* = 5 - i3$$

Jelaslah bahwa konjugat dari ungkapan kompleks yang sukar dapat dicari dengan mengganti setiap suku komplek dalam ungkapan tersebut dengan konjugatnya yang bisa didapat dengan menggantikan setiap i dalam ungkapan dengan -i.

Definisi penambahan, pengurangan dan perkalian memperlihatkan bahwa pernyatan yang berikut adalah benar. Jumlah sebuah bilangan kompleks dengan konjugatnya adalah sebuah bilangan riel; selisih dari sebuah bilangan kompleks dengan konjugatnya adalah sebuah bilangan imajiner; hasil perkalian sebuah bilangan kompleks dengan konjugatnya adalah sebuah bilangan riel. Jelaslah bahwa jika A^* adalah konjugat dari A, maka A adalah konjugat dari A^*; dengan perkataan lain $A = (A^*)^*$.

Pembagian dari dua buah bilangan kompleks didefinisikan sebagai berikut :

$$A/B = (A)(B^*)/(B)(B^*)$$

sehingga

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{(ac + bd) + i(bc - ad)}{c^2 + d^2}$$

Penyebut yang riel didapatkan dengan cara mengalikan pembilang dan penyebut dengan konjugat dari penyebut. Agar lebih jelas diberikan contoh numerik sebagai berikut :

$$\frac{3 + i4}{4 - i2} = \frac{(3 + i4)(4 + i2)}{(4 - i2)(4 + i2)}$$

$$= \frac{4 + i22}{16 + 4}$$

$$= 0,2 + i1,1$$

Penambahan atau pengurangan dua bilangan kompleks yang masing-masing dinyatakan di dalam bentuk siku-siku adalah operasi yang relatif sederhana. Perkalian atau pembagian dua bilangan kompleks di dalam bentuk siku-siku adalah proses yang lebih sukar. Operasi pembagian dan perkalian bilangan-bilangan kompleks akan jauh lebih sederhana jika kedua bilangan kompleks tersebut diberikan dalam bentuk eksponensial. Bentuk ini akan diperkenalkan di bagian lain dalam bab ini.

2.3.2. Identitas Euler

Dalam menyelenggarakan operasi defferensiasi atau integrasi konstanta kompleks dikerjakan seperti konstanta riel. Bila $f(t)$ adalah fungsi kompleks dari waktu, seperti misalnya :

$$f(t) = a \cos ct + ib \sin ct$$

maka

$$\frac{df(t)}{dt} = - ac \sin ct + ibc \cos ct$$

dan

$$\int f(t)\, dt = a/c \sin ct - ib/c \cos ct + C$$

dimana konstanta integrasi C pada umumnya adalah sebuah bilangan kompleks.

Sekarang akan diperkenalkan relasi fundamental yang sangat penting untuk menyelesaikan defferensiasi atau integrasi konstanta kompleks yang dinamai identitas Euler. Akan dibuktikan identitas ini karena relasi ini sangat berguna dalam menyatakan sebuah bilangan kompleks dalam bentuk lain dari bentuk siku-siku.

Buktinya didasarkan pada uraian deret pangkat untuk cos θ, sin θ, dan e^z.

$$\cos \theta = 1 - \theta^2/2! + \theta^4/4! - \theta^6/6! + \ldots..$$

$$\sin \theta = \theta - \theta^3/3! + \theta^5/5! - \theta^7/7! + \ldots..$$

atau

$$\cos \theta + i\sin \theta = 1 + i\theta - \theta^2/2! - i\theta^3/3! + \theta^4/4! + i\theta^5/5! - \ldots...$$

dan

$$e^z = 1 + z + z^2/2! + z^3/3! + z^4/4! + \ldots..$$

sehingga

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta - \theta^2/2! - i\theta^3/3! + \theta^4/4! + i\theta^5/5! - \ldots...$$

Disimpulkan bahwa

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \qquad (1)$$

atau jika diambil $z = -i\theta$ didapatkan

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta \qquad (2)$$

Dengan menambah dan mengurangi (1) dan (2) maka didapatkan dua ungkapan sebagai berikut :

$$\cos \theta = 1/2(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \qquad (3)$$

$$\sin \theta = -i1/2(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \qquad (4)$$

2.3.3. Bentuk Eksponensial.

Diambil identitas Euler

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$$

dan kedua ruas dikalikan dengan bilangan positip riel C,

$$Ce^{i\theta} = C \cos\theta + C\, i\sin\theta \qquad (5)$$

Ruas kanan dari (5) terdiri dari jumlah sebuah bilangan riel dan sebuah bilangan imajiner dan karenanya menyatakan sebuah bilangan kompleks dalam bentuk siku-siku. Bilangan kompleks ini diberi notasi A, dimana A= a + ib. Dengan menyamakan bagian riel

$$a = C \cos\theta \qquad (6)$$

dan bagian imajiner

$$b = C \sin\theta \qquad (7)$$

(6) dan (7) dikuadratkan dan dijumlahkan

$$a^2 + b^2 = C^2$$

atau

$$C = + \sqrt{a^2 + b^2} \qquad (8)$$

dengan membagi (7) dengan (6)

$$b/a = \tan\theta$$

atau

$$\theta = \tan^{-1} b/a \qquad (9)$$

Dari (8) dan (9) didapatkan hubungan yang memungkinkan untuk menentukan C dan θ jika diketahui a dan b.

Sebagai contoh, jika a = 4 + i2 maka, diidentifikasikan a sebagai 4 dan b sebagai 2 dan mencari C dan θ :

$$C = \sqrt{4^2 + 2^2} = 4{,}47$$

$$\theta = \tan^{-1} 2/4 = 26{,}6^{o}$$

Didapatkan informasi baru ini untuk menuliskan a dalam bentuk

$$A = 4{,}47 \cos 26{,}6^{o} + i\ 4{,}47 \sin 26{,}6^{o}$$

tetapi bentuk ruas kiri dari (5) terbukti akan lebih berguna :

$$A = C\ e^{i\theta} = 4{,}47\ e^{i26{,}6^{o}}$$

Sebuah bilangan kompleks yang dinyatakan dalam cara ini berada dalam bentuk eksponensial. Faktor pengali riel positip C dikenal sebagai amplitudo atau besar atau magnitudo dan kuantitas riel θ yang muncul di dalam eksponen dinamai argument atau sudut. Ahli matematika selalu menyatakan θ di dalam radian dan akan menuliskan $A=4{,}47\ e^{i0{,}464}$

tetapi para insinyur listrik biasanya bekerja dalam derajat.

Untuk merangkumkan, jika sebuah bilangan kompleks yang diberikan dalam bentuk siku-siku,

$$A = a + ib$$

dan ingin menyatakannya dalam bentuk eksponensial,

$$A = C\ e^{i\theta}$$

C dan θ dapat dicari dengan (8) dan (9). Sebaliknya jika diberikan bilangan kompleks dalam bentuk eksponensial, bisa dicari a dan b dengan (6) dan (7).

Dua bilangan kompleks yang kedua-duanya ditulis dalam bentuk eksponensial, dalah sama jika dan hanya jika amplitudo masing-masing adalah sama dan sudut-sudutnya adalah ekuivalen. Sudut-sudut yang ekuivalen adalah sudut-sudut yang berbeda dengan kelipatan 360^{o}.

Contoh :

Jika $A = C\, e^{i\theta}$ dan $B = D \cdot e^{i\phi}$, maka $A = B$, terpenuhi apabila $C = D$ dan $\theta = \phi \pm 360^{o}n$ dengan $n = 0,1,2,3,.....$