BAB III

AUTOKOVARIAN

Pada bagian ini akan dibahas tentang Autokovarian yang menyatakan tingkat ketergantungan antara pengamatan waktu ke t dengan pengamatan pada waktu sebelum t. Dengan terlebih dahulu akan dibahas mengenai estimasi kwadrat terkecil dalam regresi sederhana; mean, varian, kovarian dan korelasi dari variabel random; dan mean, varian dari $\hat{\beta}_1$, $\hat{\phi}_1$ dan $\hat{\rho}_k$. Setelah itu baru sifat-sifat distribusi dari a_t pada model ARMA dan teori autokovarian.

3.1 ESTIMASI KWADRAT TERKECIL DALAM REGRESI SEDERHANA

Model regresi biasa

$$\mathring{y}_t = \beta_0+\beta_1\mathring{x}_t+\varepsilon_t \qquad \text{................(3.1.1)}$$

Estimasi kuadrat terkecil dari Y terhadap β_0 dan β_1 diperoleh dengan meminimalkan jumlah kuadrat dari error ε_t

$$\Sigma\, \varepsilon_t^2 = \Sigma\left(\mathring{y}_t - \beta_0 - \beta_1\mathring{x}_t\right)^2$$

dimana Σ menunjukkan penjumlahan dari t yang berjalan dari 1 sampai N. Jika didefferensialkan terhadap β_0, β_1 dan menyamakan dengan nol, estimasi dari $\hat{\beta}_0$ dan $\hat{\beta}_1$ adalah :

$$\frac{\partial\ \Sigma\varepsilon_t^2}{\partial\ \beta_0} = -2\Sigma\left(\mathring{y}_t - \beta_0 - \beta_1\mathring{x}_t\right) = 0 \qquad \text{.........(3.1.2)}$$

$$\frac{\partial\ \Sigma\varepsilon_t^2}{\partial\ \beta_1} = -2\Sigma\ \mathring{x}_t\left(\mathring{y}_t - \beta_0 - \beta_1\mathring{x}_t\right) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots(3.1.3)$$

Membagi persamaan (3.1.2) dengan -2N akan didapatkan :

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1\bar{x}_t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.1.4)$$

Karena

$$\Sigma\bar{x}\left(\mathring{y}_t - \bar{y}\right) = \bar{x}\left(\Sigma\mathring{y}_t - \Sigma\bar{y}\right) = 0$$

$$\Sigma\bar{x}\left(\mathring{x}_t - \bar{x}\right) = \bar{x}\left(\Sigma\mathring{x}_t - \Sigma\bar{x}\right) = 0$$

mengganti β_0 dalam persamaan (3.1.3) dan membagi dengan -2 akan didapatkan

$$\Sigma\ \mathring{x}_t\left[\left(\mathring{y}_t - \bar{y}\right) - \hat{\beta}_1\left(\mathring{x}_t - \bar{x}\right)\right] = \Sigma\ \mathring{x}_t\left[\left(\mathring{y}_t - \bar{y}\right) - \beta_1\left(\mathring{x}_t - \bar{x}\right)\right]$$

$$- \Sigma\ \bar{x}\left[\left(\mathring{y}_t - \bar{y}\right) - \beta_1\left(\mathring{x}_t - \bar{x}\right)\right] = 0$$

yaitu

$$\Sigma\left(\mathring{x}_t - \bar{x}\right)\left[\left(\mathring{y}_t - \bar{y}\right) - \hat{\beta}_1\left(\mathring{x}_t - \bar{x}\right)\right] = 0$$

atau

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\Sigma\left(\mathring{y}_t - \bar{y}\right)\left(\mathring{x}_t - \bar{x}\right)}{\Sigma\left(\mathring{x}_t - \bar{x}\right)^2} = \frac{\Sigma y_t x_t}{\Sigma x_t^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3.1.5)$$

3.2 MEAN, VARIAN, KOVARIAN DAN KORELASI DARI VARIABEL RANDOM

Dua karakteristik utama dari variabel random adalah mean (rata-rata dari nilai observasi/pengamatan), dan varian, yang mana merupakan nilai ekspektasi kwadrat penyimpangan dari mean. Mean menunjukkan titik tengah dari distribusi probabilitas dan varian menunjukkan penyebaran yang menyatakan seberapa jauhkah penyimpangan tersebut dari titik tengah atau mean. Akar kwadrat dari varian dinamakan standar error atau standar deviasi. Untuk dua variabel random sebagai karakteristik tambahan adalah kovarian, yaitu nilai ekspekstasi dari hasil kali penyimpangan pada mean masing-masing. Kovarian menyatakan tingkat ketergantungan antara pasangan variabel random dan sama dengan **nol** ketika keduanya independen.

Jika **X** dan **Y** adalah dua variabel random dengan mean μ_x dan μ_y, varian σ_x^2 dan σ_y^2 dan kovarian γ_{xy}, dan nilai harapan (ekspektasi) dengan E maka

$$\text{Mean dari X} = \mu_x = E(x) \quad \text{.............(3.2.1)}$$

$$\text{Mean dari Y} = \mu_y = E(y) \quad \text{.............(3.2.2)}$$

$$\text{Varian dari X} = \sigma_x^2 = E(x-\mu_x)^2 \quad \text{..........(3.2.3)}$$

$$\text{Varian dari Y} = \sigma_y^2 = E(y-\mu_y)^2 \quad \text{..........(3.2.4)}$$

$$\text{Kovarian (X,Y)} = \gamma_{xy} = E(x-\mu_x)(y-\mu_y) \quad \text{......(3.2.5)}$$

Membagi kovarian dengan akar kwadrat dari varian atau standar deviasi dinamakan korelasi yang juga mengukur tingkat ketergantungan tetapi dengan skala kovarian, dan dinyatakan dengan ρ_{xy}, yaitu :

$$\text{Korelasi} = \frac{\text{Kovarian }(X,Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)\ \text{Var}(Y)}} \quad \text{...........(3.2.6)}$$

$$= \frac{E(X-\mu_x)(Y-\mu_y)}{\sqrt{E(X-\mu_x)^2 E(Y-\mu_y)^2}} \qquad \text{..........(3.2.6a)}$$

$$\rho_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \qquad \text{..........(3.2.6b)}$$

Nilai dari korelasi ini akan selalu lebih kecil atau sama dengan satu dalam nilai mutlak, atau $|\rho_{xy}| \leq 1$. Untuk membuktikannya, walaupun variabel random dapat positip atau negatip, nilai kwadratnya tidak akan negatip dan oleh karena itu nilai ekspektasi atau variannya tidak akan pernah negatip. Sekarang menganggap variabel random aX+bY.

$$\begin{aligned} \text{Mean dari } (aX+bY) &= \mu_{ax+by} = E(aX+bY) \\ &= aE(X)+bE(Y) \\ &= a\mu_x+b\mu_y \qquad \text{..........(3.2.7)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Varian dari } (aX+bY) &= \sigma^2_{ax+by} = E(aX+bY-\mu_{ax+by})^2 \\ &= E[a(X-\mu_x)+b(Y-\mu_y)]^2 \\ &= E[a^2(X-\mu_x)^2+2ab(X-\mu_x)(Y-\mu_y) \\ &\qquad +b^2(Y-\mu_y)^2] \\ &= a^2E(X-\mu_x)^2+2abE(X-\mu_x)(Y-\mu_y) \\ &\qquad +b^2E(Y-\mu_y)^2] \\ &= a^2\text{Var}(X)+2ab\ \text{Kov}(X,Y)+b^2\text{Var}(Y) \end{aligned}$$

$$\text{..........(3.2.8)}$$

Misal :

$$a=1 \text{ dan } b^2=\frac{\text{Var}(X)}{\text{Var}(Y)} \text{ atau } b=\pm\sqrt{\frac{\text{Var}(X)}{\text{Var}(Y)}}$$

maka persamaan (3.2.8) akan menjadi :

$$\text{Var}\left(X\right)\pm2\sqrt{\frac{\text{Var}(X)}{\text{Var}(Y)}}\ \text{Kov}\left(X,Y\right)+\text{Var}\left(X\right) \geq 0$$

atau

$$\text{Kov}\left(X,Y\right) \leq \sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)} \qquad ....(3.2.9a)$$

Sehingga $|\rho_{xy}| \leq 1$

Apabila X dan Y independen maka kovarian $(X,Y) = 0$ atau korelasi $\rho_{xy} = 0$. Sehingga persamaan (3.2.8) menjadi

$$\text{Var}\left(aX+bY\right)=a^2\text{Var}\left(X\right)+b^2\text{Var}\left(Y\right) \qquad ....(3.2.10)$$

Pada umumnya persamaan (3.2.10) dapat dikatakan bahwa varian dari jumlah atau selisih dari variabel random yang independen adalah jumlah dari variannya (a=1, b=±1).

Mean dari kombinasi linier pada variabel random (persamaan (3.2.7)) adalah sama dengan kombinasi linier dari mean dan varian dari kombinasi linier pada variabel random independen (persamaan (3.2.10)) adalah kombinasi linier dari varian dengan koefisien kwadrat. Sebagai catatan bahwa variabel independen tidak mempengaruhi dalam perhitungan mean tetapi untuk perhitungan varian dapat mempengaruhi.

Operasi ekspektasi yang digunakan dalam persamaan (3.2.1) sampai (3.2.5) adalah teori operasi pada populasi atau sampel tak terbatas. Dalam praktek, biasanya yang dibutuhkan adalah mengestimasi banyaknya sampel yang terhingga dari **N** observasi/pengamatan, katakanlah X_1, X_2, ..., X_N, dan Y_1, Y_2, ..., Y_N. Jalan termudah untuk mendapatkan estimasi tersebut adalah dengan mengganti operasi ekspektasi dari sampel tak terhingga dalam persamaan (3.2.1) sampai (3.2.5) dengan operasi rata-rata pada sampel terhingga yang tersedia. Diberikan sekelompok estimasi dari mean, varian, kovarian dan korelasi seperti berikut :

$$\bar{X} = \frac{1}{N}\Sigma X_i \qquad \text{.............(3.2.11)}$$

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{N}\Sigma (X_i-\bar{X})^2 \qquad \text{.............(3.2.12)}$$

$$\hat{\gamma}_{xy} = \frac{1}{N}\Sigma(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y}) \qquad \text{.............(3.2.13)}$$

$$\hat{\rho}_{xy} = \frac{\Sigma(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})}{\sqrt{\Sigma(X_i-\bar{X})^2\Sigma(Y_i-\bar{Y})^2}} \qquad \text{........(3.2.14)}$$

dimana Σ pada persamaan diatas adalah penjumlahan dari i mulai **1** sampai **N**.

Jika disubstitusikan nilai observasi/pengamatan dalam persamaan (3.2.11) sampai (3.2.14) akan didapatkan nilai tertentu dari estimasi. Bagaimanapun nilai tersebut akan berbeda untuk kelompok sampel yang berbeda, karena estimator yang digunakan dalam persamaan (3.2.11) sampai (3.2.14) adalah variabel random mereka sendiri. Yang perlu untuk dikemukakan dari estimator adalah sifat tak biasnya. Estimator dikatakan tak bias jika rata-rata (mean) atau nilai ekspektasi adalah parameternya. Untuk contoh, $\bar{X}$ adalah estimator tak bias dari μ_x, karena ini mudah untuk diperlihatkan bahwa mean dari $\bar{X}$ adalah μ_x, dengan menggunakan persamaan (3.2.7) :

$$E(\bar{X})=E\left(\frac{1}{N}\Sigma X_i\right)$$

$$=E\left(\frac{1}{N}X_1+\frac{1}{N}X_2+\ldots+\frac{1}{N}X_N\right)$$

$$=\frac{1}{N}E(X_1)+\frac{1}{N}E(X_2)+\ldots+\frac{1}{N}E(X_N)$$

$$=\frac{\mu_x}{N}+\frac{\mu_x}{N}+\ldots+\frac{\mu_x}{N}=\mu_x \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(3.2.15)$$

karena setiap X_i adalah sampel dari populasi yang sama dengan μ_x.

Jadi estimator $\bar{X}$ adalah titik tengah dari μ_x, yang merupakan parameter estimasi. Bagaimanapun, untuk pengambilan sampel penghitungan rata-rata tidak akan sama untuk μ_x. Seberapa jauh penghitungan rata-rata akan menyimpang dari μ_x, untuk kelompok yang berbeda dari sampel akan ditunjukkan dengan varian dari $\bar{X}$. Jadi persamaan (3.2.7) akan digunakan untuk menghitung mean dari $\bar{X}$, dan persamaan (3.2.8) akan digunakan untuk menghitung varian dari $\bar{X}$. Bagaimanapun untuk menggunakan persamaan (3.2.8), haruslah diketahui dulu kovarian dari semua pasangan yang mungkin dari X_1, X_2, ..., X_N yang mana pada umumnya sulit didalam praktek. Kesulitan ini dapat diatasi jika pengamatan adalah indepeden, sedemikian hingga kovarian semuanya nol dan dapat digunakan pernyataan sederhana (3.2.10). Jadi untuk pengamatan independen $X_1, X_2, \ldots, X_N$:

$$\mathrm{Var}(\bar{X}) = \mathrm{Var}\left(\frac{1}{N}X_1 + \frac{1}{N}X_2 + \ldots + \frac{1}{N}X_N\right)$$

$$= \frac{1}{N^2}\mathrm{Var}(X_1) + \frac{1}{N^2}\mathrm{Var}(X_2) + \ldots + \frac{1}{N^2}\mathrm{Var}(X_N)$$

$$= \frac{N\ \mathrm{Var}(X)}{N^2}$$

$$= \frac{1}{N}\mathrm{Var}(X) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.2.16)$$

yaitu :

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = E\left(\bar{X} - E(\bar{X})\right)^2 = E\left(\bar{X} - \mu_x\right)^2 = \frac{1}{N}\sigma_x^2 \qquad \ldots\ldots(3.2.16a)$$

atau

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sigma_x \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.2.16b)$$

Jadi persamaan (3.2.16a) dan (3.2.16b) memperlihatkan standar deviasi dari $\bar{X}$ yang mana jarak antara estimator $\bar{X}$ dan parameter μ_x adalah estimasinya, dengan skala $1/\sqrt{N}$ sepertinya jumlah pengamatan N meningkat. Khususnya $\sigma_{\bar{x}} \longrightarrow 0$ untuk $N \longrightarrow \infty$, yang berarti bahwa jumlah pengamatan adalah besar, akhirnya estimator $\bar{X}$ adalah untuk parameter dalam mengestimasi. Sifat yang lain dari estimator ini akan dinamakan konsistensi.

3.3 MEAN, VARIAN DARI $\hat{\beta}_1$, $\hat{\phi}_1$ DAN $\hat{\rho}_k$

Dalam model regresi linier biasa persamaan (3.1.1) yaitu :

$$\mathring{y}_t=\beta_0+\beta_1\mathring{x}_t+\varepsilon_t$$

ε_t mempunyai mean nol, karena independen pada t yang berbeda yaitu :

$$E(\varepsilon_t)=0$$

$$\begin{aligned}\text{Kov}(\varepsilon_t,\varepsilon_{t-k})&=E\left\{[\varepsilon_t-E(\varepsilon_t)][\varepsilon_{t-k}-E(\varepsilon_{t-k})]\right\}\\&=E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-k})\\&=0 \text{ untuk } k\neq 0\end{aligned}$$

dan mempunyai varian $\sigma_\varepsilon^{\,2}$, yaitu

$$\begin{aligned}\text{Var}(\varepsilon_t)&=E[\varepsilon_t-E(\varepsilon_t)]^2\\&=E\ \varepsilon_t^{\,2}\\&=\sigma_\varepsilon^{\,2}\end{aligned}$$

Untuk variabel mean sama dengan nol, varian dan kovarian akan mudah dinyatakan dengan $E(\varepsilon_t^2)$ dan $E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-k})$. β_0 dan $\beta_1\mathring{x}_t$ adalah variabel deterministik (non random) dan oleh karena itu nilai ekspektasinya adalah sama. Pada kenyataannya, biasanya variabel deterministik dapat dikatakan sebagai "degenerasi" variabel random dengan mean yang sama dan variannya adalah nol, dan mereka akan independen pada beberapa variabel random lainnya. Jadi untuk model (3.1.1) jika digunakan persamaan (3.2.7) :

$$\text{Mean } (\mathring{y}_t)=E(y_t)=E(\beta_0+\beta_1\mathring{x}_t+\varepsilon_t)$$

$$=E(\beta_0+\beta_1\mathring{x}_t)+E\ \varepsilon_t$$

$$=E(\beta_0)+E(\beta_1\mathring{x}_t)+0$$

$$=\beta_0+\beta_1\mathring{x}_t \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.3.1)$$

dan dengan persamaan (3.2.10) :

$$\text{Var } (\mathring{y}_t)=\text{Var }(\beta_0+\beta_1\mathring{x}_t+\varepsilon_t)$$

$$=\text{Var }(\beta_0+\beta_1\mathring{x}_t)+\text{Var }(\varepsilon_t)$$

$$=0+E(\varepsilon_t)$$

$$=\sigma_\varepsilon^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.3.2)$$

atau

$$\text{Var } (\mathring{y}_t)=E(\mathring{y}_t-E\ \mathring{y}_t)^2=E(\mathring{y}_t-\beta_0+\beta_1\mathring{x}_t)^2=E(\varepsilon_t^2)=\sigma_\varepsilon^2$$

Juga jika diambil rata-rata mulai dari t=1 sampai N dalam persamaan (3.1.1)

$$\bar{y} = \beta_0+\beta_1\bar{x}+\bar{\varepsilon}$$

$$E\ \bar{y} = E\ \beta_0+E\ \beta_1\bar{x}+E\ \bar{\varepsilon}$$

$$= \beta_0+\beta_1\bar{x}$$

Sekarang mengingat estimator β_1 yang diberikan dalam persamaan (3.1.5) dapat dilihat bahwa :

$$E\ y_t=E(\mathring{y}_t-\bar{y})$$

$$=E\ \mathring{y}_t - E\ \overline{y}$$

$$=\beta_0+\beta_1\mathring{x}_t-\beta_0-\beta_1\overline{x}$$

$$=\beta_1\left(\mathring{x}_t-\overline{x}\right)$$

$$=\beta_1 x_t$$

dan karena hanya variabel random dalam sisi kanan dari persamaan (3.1.5) yaitu $y_t=\left(\mathring{y}_t-\overline{y}\right)$, x_t adalah konstan, sehingga dapat diterapkan persamaan (3.2.7) kepersamaan (3.1.5) dan akan didapatkan :

Mean dari $\hat{\beta}_1=E\left(\hat{\beta}_1\right)$

$$=E\left[\frac{\Sigma\ y_t x_t}{\Sigma\ x_t^2}\right]$$

$$=\frac{1}{\Sigma\ x_t^2}E\left(y_1x_1+y_2x_2+\ldots+y_Nx_N\right)$$

$$=\frac{1}{\Sigma\ x_t^2}\left(x_1Ey_1+x_2Ey_2+\ldots+x_NEy_N\right)$$

$$=\frac{1}{\Sigma\ x_t^2}\left(x_1\beta_1x_1+x_2\beta_1x_2+\ldots+x_N\beta_1x_N\right)$$

$$=\beta_1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.3.3)$$

sehingga β_1 adalah estimator *tak bias* dari β_1.

Demikian pula $\mathring{y}_t$ adalah independen karena ε_t independen dan oleh karena itu jika diterapkan persamaan (3.2.10) dan sebagai catatan bahwa $\Sigma\overline{y}x_t=0$

$$\text{Var}\left(\hat{\beta}_1\right)=\text{Var}\left[\left(\frac{x_1}{\Sigma x_t^2}\right)\mathring{y}_t+\left(\frac{x_2}{\Sigma x_t^2}\right)\mathring{y}_2+\ldots+\left(\frac{x_N}{\Sigma x_t^2}\right)\mathring{y}_N\right]$$

$$=\left(\frac{x_1}{\Sigma x_t^2}\right)^2\text{Var}\left(\mathring{y}_t\right)+\left(\frac{x_2}{\Sigma x_t^2}\right)^2\text{Var}\left(\mathring{y}_2\right)+\ldots$$

$$+\left(\frac{x_N}{\Sigma x_t^2}\right)^2\text{Var}\left(\mathring{y}_N\right)$$

$$=\frac{\Sigma x_t^2}{\left(\Sigma x_t^2\right)^2}\text{Var}\left(\mathring{y}_t\right)$$

$$=\frac{1}{\Sigma x_t^2}\text{Var}\left(\mathring{y}_t\right)$$

$$=\frac{\sigma_\varepsilon^2}{\Sigma x_t^2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.3.4)$$

Karena $\Sigma x_t^2 \longrightarrow \infty$ untuk $N \longrightarrow \infty$ persamaan (3.3.4) memperlihatkan bahwa $\text{Var}\left(\hat{\beta}_1\right) \longrightarrow 0$ untuk $N \longrightarrow \infty$. Karena rata-rata dari $\hat{\beta}_1$ sebenarnya adalah nilai β_1, ini memperlihatkan bahwa $\hat{\beta}_1$ begitu mendekati nilai sebenarnya dengan bertambahnya jumlah pengamatan, dengan kata lain estimatornya adalah konsisten. Demikian pula, karena $E\bar{y}=\beta_o+\beta_1\bar{x}$ dan $E\,\hat{\beta}_1=\beta_1$, mengikuti dari persamaan (3.1.4) bahwa :

$$E\left(\hat{\beta}_o\right)=\beta_o \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.3.5)$$

dan dengan persamaan (3.2.10), karena $\bar{y}$ dapat ditunjukkan keindependenannya pada $\hat{\beta}_1$,

$$\text{Var}\left(\hat{\beta}_o\right)=\text{Var}\ \bar{y}+\bar{x}^2\ \text{Var}\left(\hat{\beta}_1\right)$$

$$=\sigma_{\varepsilon}^{2}\left[\frac{1}{N}+\frac{\bar{x}^{2}}{\Sigma x_{t}^{2}}\right] \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.3.6)$$

Hasil dari model regresi sederhana

$$y_t=\beta_1 x_t+\varepsilon_t$$

sebenarnya tidak dapat dipakai untuk model AR(1)

$$X_t=\phi_1 X_{t-1}+a_t$$

Sekalipun seperti ε_t, a_t adalah independen, karena X_{t-1} adalah random variabel tidak seperti variabel deterministik x_t. Pada saat t-1, pengamatan X_{t-1} diketahui atau tertentu dan deterministik, maka model AR(1) dapat dipertimbangkan sebagai model regresi linier bersyarat dan persamaan (3.1.5) dapat digunakan untuk memperoleh estimator

$$\hat{\phi}_1=\frac{\Sigma X_t X_{t-1}}{\Sigma X_{t-1}^{2}}$$

Jika kita asumsikan X_0 itu ada, dengan cara lain penjumlahannya dapat dikurangi seperti dalam persamaan berikut :

$$\hat{\phi}_1=\frac{\sum_{t=2}^{N} X_t X_{t-1}}{\sum_{t=2}^{N} X_{t-1}^{2}}$$

dimana $X_t=\dot{X}_t-\bar{X}$. Menurut kwadrat terkecil bersyarat ini, $\hat{\phi}_1$ adalah tak bias dan konsisten, yaitu rata-rata atau mean dari $\hat{\phi}_1$ adalah ϕ_1 dan variannya cenderung ke-nol untuk $N \longrightarrow \infty$.

Bagaimanapun, menurut kwadrat terkecil tak bersyarat, ketika X_{t-1} ditentukan sebagai variabel random dan t-1 tidak dipertimbangkan secara khusus, maka hasilnya hanya kebenaran kira-kira. Penaksiran serupa dapat digunakan pada N yang besar untuk menghitung varian dari $\hat{\phi}_1$ dengan mengganti ΣX_{t-1}^2 dengan nilai ekspektasi

$$\mathrm{Var}\left(\hat{\phi}_1\right) \simeq \frac{\sigma_a^2}{\Sigma X_{t-1}^2} \simeq \frac{\sigma_a^2}{N\ \mathrm{Var}(X_t)}$$

$$= \frac{\left(1-\phi_1^2\right)}{N} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.3.7)$$

dan

$$\mathrm{Var}\left(\hat{\phi}_1\right) = \frac{\sigma_a^2}{N\ \sigma_a^2} \quad \text{ketika } \phi_1 = 0$$

$$= \frac{1}{N} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.3.8)$$

Alasan serupa dapat digunakan untuk estimator sampel autokorelasi

$$\hat{\rho}_k = \frac{\Sigma X_t X_{t-k}}{\Sigma X_{t-k}^2}$$

untuk mendapatkan varian saat $\rho_k \equiv 0$:

$$\mathrm{Var}\left(\hat{\rho}_k\right) \simeq \frac{1}{N} \qquad (3.3.9)$$

3.4 SIFAT-SIFAT DISTRIBUSI DARI a_t PADA MODEL ARMA

Ketika a_t pada model-model ARMA seperti diuraikan dalam bab terdahulu adalah variabel random untuk t tertentu atau proses stokastik untuk nilai-nilai t yang berbeda, karakteristik probabilitas sifat-sifat distribusinya diberikan sebagai berikut :

$$a_t \sim NID\left(0, \sigma_a^2\right)$$

Sifat ini menyatakan bahwa sekelompok data, katakanlah banyaknya N dari a_t $\{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$ mempunyai distribusi normal multivariat dengan setiap a_t mempunyai rata-rata nol, varian σ_a^2 dan kovarian antara dua a_t adalah nol. Karena kovarian yang dimaksud disini adalah proses stokastik dengan dirinya sendiri pada waktu t yang berbeda, maka dikatakan sebagai "autokovarian". Secara umum autokovarian a_t pada lag-k akan diberikan dengan :

$$\text{Cov}\ \left(a_t, a_{t-k}\right) = E\left(a_t - \mu\right)\left(a_{t-k} - \mu\right)$$

dimana E adalah ekspektasi (nilai harapan), μ adalah mean (rata-rata) dari a_t dan autokovarian pada lag nol adalah variannya. Karena rata-rata dari a_t adalah nol, maka $\mu = 0$. Sehingga dapat pula dinyatakan dengan :

$$E\left(a_t, a_{t-k}\right) = \sigma_a^2 \quad , \ k = 0$$

$$= 0 \quad , \ k \neq 0$$

atau

$$E\left(a_t\right) = 0$$

$$E\left(a_t, a_{t-k}\right) = \delta_k \sigma_a^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.4.1)$$

dimana δ_k adalah fungsi delta Kronecker yang sama dengan nol untuk semua k kecuali pada saat k=0 sehingga δ_k=1.

3.5 TEORI AUTOKOVARIAN

Seperti pada bab sebelumnya baik AR(1), ARMA(2,1) maupun ARMA(n,n-1) disebutkan bahwa :

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} G_j a_{t-j}$$

Dapat dilihat bahwa X_t adalah kombinasi linier dari a_t dengan fungsi Green sebagai koefisien, maka juga berdistribusi normal multivariat dengan mean nol. Distribusi ini juga mempunyai karakteristik lengkap dengan autokovarian dari X_t yang didefinisikan dengan :

$$\gamma_k = E\left(X_t, X_{t-k}\right)$$

yang merupakan autokovarian pada lag-k dan jika k=0 maka akan didapatkkan varian (γ_0) dari X_t. Dengan mengetahui autokovarian a_t yang ditunjukkan dengan persamaan (3.4.1) dan mengetahui fungsi Green dari sistem ARMA pada bab terdahulu, maka dapat ditentukan autokovarian γ_k dari X_t. Sehingga akan ditetapkan karakteristik probabilitasnya yang akan memberi karakteristik dari proses stokastik X_t. Pada waktu autokovarian γ_k dibagi varian γ_0 akan didapatkan autokorelasi ρ_k pada lag-k, yaitu

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

dengan catatan bahwa $\rho_0 = 1$

Autokovarian γ_k atau autokorelasi ρ_k menunjukkan ketergantungan X_t terhadap X_{t-k}. Perhitungannya dapat diperoleh secara langsung dari data sebelum dimasukkan kemodelnya yaitu dengan :

$$\hat{\gamma}_k = \frac{1}{N} \sum_{t=k+1}^{N} X_t X_{t-k}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{t=k+1}^{N} (\dot{X}_t - \bar{X})(\dot{X}_{t-k} - \bar{X}) \qquad \text{........(3.5.1)}$$

dimana X_t adalah data pengamatan dikurangi dengan rata-rata atau $\bar{X}$, dan

$$\hat{\rho}_k = \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\gamma}_o} \qquad \text{..................(3.5.2)}$$

Hal-hal tersebut diatas disebut sampel autokovarian dan autokorelasi untuk membedakan dengan nilai-nilai γ_k dan ρ_k secara teoritik.

Dalam pembicaraan selanjutnya akan diperlukan kovarian antara a_{t-l} dan X_{t-k} yang dapat diperoleh dari persamaan (3.4.1) dan ekspansi fungsi Green dari setiap model ARMA,

$$X_t = \sum_{j=o}^{\infty} G_j a_{t-j} \qquad \text{.................(3.5.3)}$$

dan karena G_o=1, maka akan didapatkan juga kovarian antara a_t dengan X_t yang dinyatakan dengan :

$$E(a_t X_t) = \sigma_a^2$$

dan

$$E(a_t X_{t-k}) = 0 \qquad , k > 0$$

Hubungan-hubungan ini dapat juga ditulis sebagai berikut :

$$E(a_t X_{t-k}) = \delta_k \sigma_a^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.5.4)$$

Untuk model persamaan (3.5.3) dapat juga dinyatakan untuk X_{t-k} sehingga menjadi :

$$X_{t-k} = \sum_{j=o}^{\infty} G_j a_{t-k-j}$$

Maka kovarian antara a_{t-l} dan X_{t-k} secara umum dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$E(a_{t-l} X_{t-k}) = E\left[a_{t-l}\left(\sum_{j=o}^{\infty} G_j a_{t-k-j}\right)\right]$$

$$= \sum_{j=o}^{\infty} G_j E(a_{t-l} a_{t-k-j})$$

$$= 0 \qquad \text{jika} \quad k > l$$

$$= G_{l-k}\sigma_a^2 \qquad \text{jika} \quad k \leq l \qquad \ldots\ldots(3.5.5)$$

Sebagai catatan

$$\gamma_k = E(X_t X_{t-k}) = E(X_{t-k} X_t) = E(X_t X_{t-k}) = \gamma_{-k} \quad \ldots(3.5.6)$$