BAB II

FUNGSI GREEN PADA MODEL ARMA

Fungsi Green yang dinyatakan dengan G_j adalah suatu fungsi yang akan digunakan dalam pembentukan model-model ARMA. Dalam bab ini yaitu tentang fungsi Green pada model ARMA yang juga merupakan penunjang sebelum ke bab selanjutnya akan dibahas tentang fungsi Green pada model AR(1), ARMA(2,1) dengan kasus khususnya yaitu AR(2) dan ARMA(1,1), ARMA(n,n-1) serta kestabilannya pada sistem AR(1), ARMA(2,1) dan ARMA(n,n-1)

2.1 FUNGSI GREEN PADA MODEL AR (1)

Secara umum modelnya adalah sebagai berikut:

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} = a_t \qquad \text{.................(2.1.1)}$$

adapun

$$X_t = \dot{X}_t - \bar{X}$$

$\dot{X}_t$ = Hasil pengamatan pada waktu t.

$\bar{X}$ = Rata-rata dari pengamatan.

Atau bisa juga ditulis sebagai berikut :

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + a_t$$

$$= \phi_1 (\phi_1 X_{t-2} + a_{t-1}) + a_t$$

$$= a_t + \phi_1 a_{t-1} + \phi_1^2 a_{t-2} + \dots$$

$$= \sum_{j=o}^{\infty} \phi_1^j a_{t-j} \qquad \text{.................(2.1.2)}$$

Koefisien ϕ_1^j pada persamaan diatas dinamakan fungsi Green dan apabila koefisien tersebut dilambangkan dengan G_j, maka untuk model AR (1) :

$$G_j = \phi_1^j \qquad \text{.................(2.1.3)}$$

sehingga persamaan (2.1.2) dapat dituliskan sebagai berikut :

$$X_t = \sum_{j=o}^{\infty} G_j a_{t-j} = \sum_{j=-\infty}^{t} G_{t-j} a_j \qquad \text{.........(2.1.4)}$$

Dengan catatan

$$G_o = 1$$

Menggunakkan metode "operator Backshift" B yang didefinisikan dengan

$$B\ X_t = X_{t-1}$$

dan secara umum

$$B^j\ X_t = X_{t-j} \qquad \text{.................(2.1.5)}$$

Model (2.1.1) AR (1) dapat dituliskan sebagai berikut :

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} = a_t$$

$$X_t - \phi_1 B X_t = a_t$$

$$(1 - \phi_1 B) X_t = a_t \qquad \text{................(2.1.1a)}$$

Seperti pada persamaan (2.1.2), fungsi Green juga bisa didapatkan dari bentuk (2.1.1a) diatas

$$X_t = \frac{a_t}{(1 - \phi_1 B)}$$

$$= (1 + \phi_1 B + \phi_1^2 B^2 + \phi_1^3 B^3 + \ldots)a_t$$

$$= a_t + \phi_1 a_{t-1} + \phi_1^2 a_{t-2} + \ldots$$

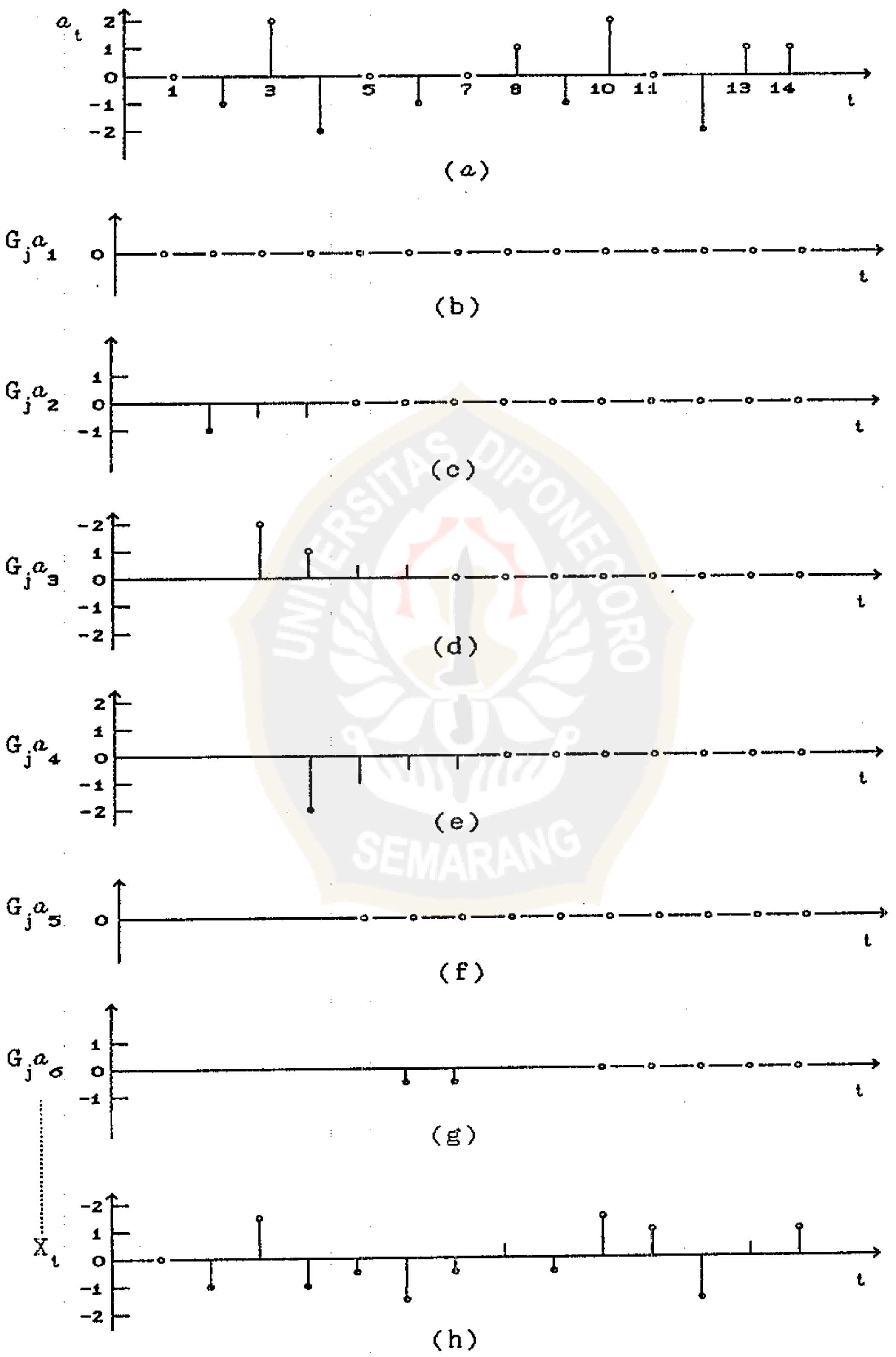
$$= \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j a_{t-j}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} G_j a_{t-j}$$

Gambar 2.1 menunjukkan respon dari generasi untuk model AR (1) dengan misal ϕ_1 = 0,5 yang juga dijelaskan dengan nilai-nilai dalam tabel 2.1, dimana a_t juga dimisalkan seperti dalam gambar 2.1(a).

j	t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
	a_t	0	0	−1	2	−2	0	−1	0	1	−1	2	0	−2	1	1
	G_t	1	.5	.25	.125	.0625	.0313	.0156	.0078	.0039	.0020	.0010	.0005	.0002	.0001	.0001
0	$G_{t-0}a_0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	$G_{t-1}a_1$		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	$G_{t-2}a_2$			−1	−.5	−.25	−.125	−.0625	−.0313	−.0156	−.0078	−.0039	−.0020	−.0010	−.0005	−.0002
3	$G_{t-3}a_3$				2	1	.5	.25	.125	.0625	.0313	.0156	.0078	.0039	.0020	.0010
4	$G_{t-4}a_4$					−2	−1	−.5	−.25	−.125	−.0625	−.0313	−.0156	−.0078	−.0039	−.0020
5	$G_{t-5}a_5$						0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	$G_{t-6}a_6$							−1	−.5	−.25	−.125	−.0625	−.0313	−.0156	−.0078	−.0039
7	$G_{t-7}a_7$								0	0	0	0	0	0	0	0
8	$G_{t-8}a_8$									1	.5	.25	.125	.0625	.0313	.0156
9	$G_{t-9}a_9$										−1	−.5	−.25	−.125	−.0625	−.0313
10	$G_{t-10}a_{10}$											2	1	.5	.25	.125
11	$G_{t-11}a_{11}$												0	0	0	0
12	$G_{t-12}a_{12}$													−2	−1	−.5
13	$G_{t-13}a_{13}$														1	.5
14	$G_{t-14}a_{14}$															1
	$X_t = \sum_{j=0}^{t} G_{t-j}a_j$	0	0	−1	1.5	−1.25	−.625	−1.3125	−.656	.672	−.664	1.668	.834	−1.583	.2035	1.104

Tabel 2.1. Nilai-nilai dari respon generasi dengan a_t = 0 untuk t ≤ 0 :Persamaan (2.1.4) yang ke-dua



Gambar 2.1 Grafik dari respon generasi dengan fungsi Green sistem AR (1) : $\phi_1 = 0,5$

Dengan persamaan (2.1.4) yang kedua dapat dihasilkan

$$X_t = \sum_{j=0}^{t} G_{t-j}a_j$$

$$= G_{t-0}a_0 + G_{t-1}a_1 + G_{t-2}a_2 + \ldots + G_0a_t$$

Jadi misalkan untuk $t = 3$ ($a_0 = 0$)

$$X_3 = \left[G_{t-1}a_1 + G_{t-2}a_2 + G_{t-3}a_3\right]_{t=3}$$

$$= G_2a_1+G_1a_2+G_0a_3 = 0 - 0,5 + 2 = 1,5$$

untuk $t = 4$

$$X_4 = \left[G_{t-1}a_1 + G_{t-2}a_2 + G_{t-3}a_3 + G_{t-4}a_4\right]_{t=4}$$

$$= G_3a_1+G_2a_2+G_1a_3+G_0a_4 = 0 - 0,25 + 1 - 2 = -1,25$$

yang mana hasilnya sama jika digunakan perhitungan dari bentuk persamaan (2.1.1), dimana :

$$X_3 = 0,5\ X_2 + a_3 = 0,5\ (-1) + 2 = 1,5$$

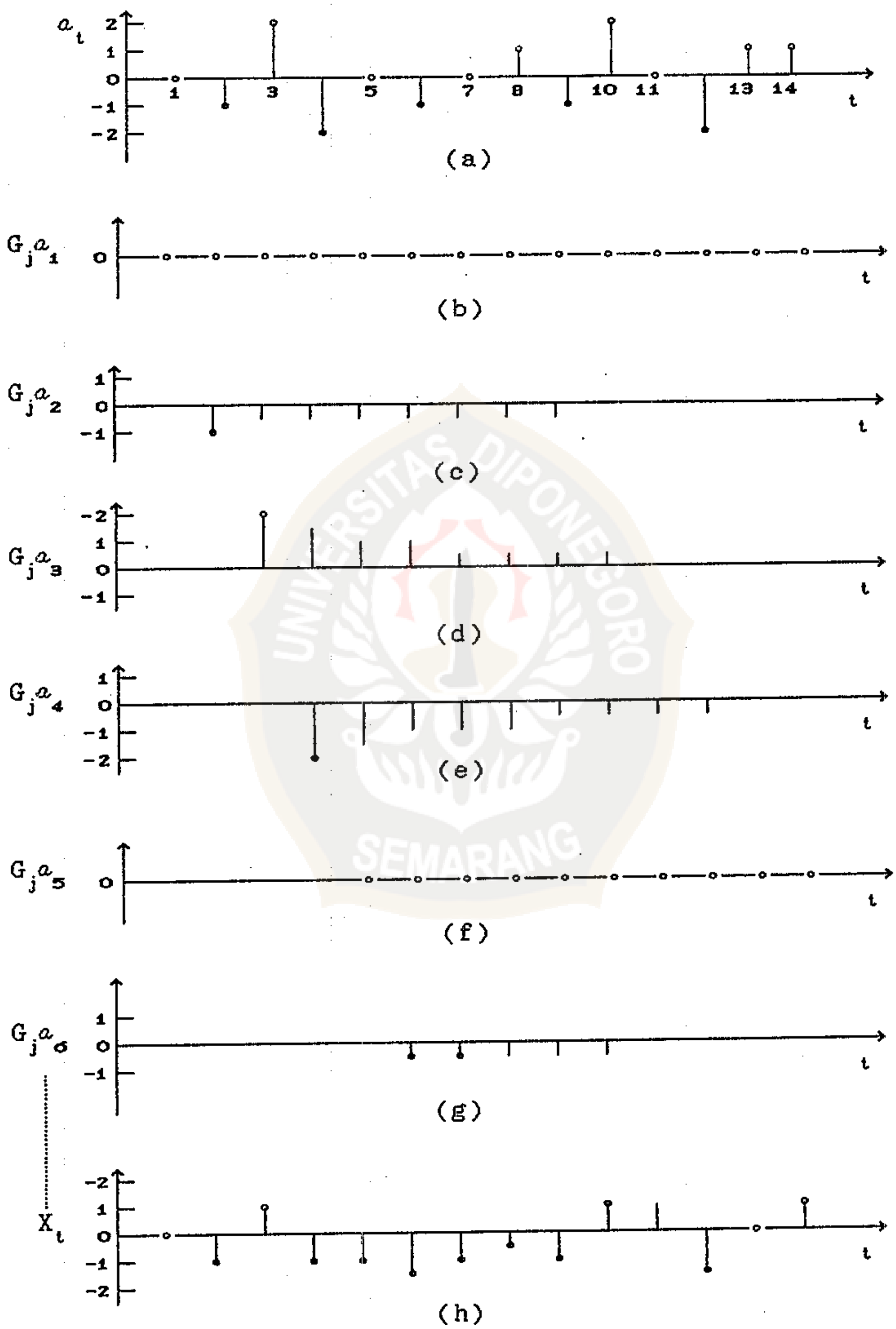
$$X_4 = 0,5\ X_3 + a_4 = 0,5\ (1,5) + (-2) = -1,25$$

Sedang dengan persamaan (2.1.4) yang pertama respon dari generasi X_t dapat juga dinyatakan dengan (karena $a_t = 0$ untuk $t \leq 0$)

$$X_t = \sum_{j=0}^{t} G_j a_{t-j}$$

$$= G_0a_{t-0} + G_1a_{t-1} + G_2a_{t-2} + \ldots + G_ta_0$$

Untuk perbandingan dengan gambar 2.1 akan ditunjukkan dalam gambar 2.2 dimana dimisalkan besarnya ϕ_1 lebih besar dibanding dengan 0,5 , yaitu misal $\phi_1 = 0,9$ dan dengan nilai a_t yang sama.



Gambar 2.3 Grafik dari respon generasi dengan fungsi Green sistem AR (1) dengan ϕ_1 = 0,9

Dapat dilihat diatas bahwa dengan nilai ϕ_1 yang besar, maka semakin banyak shock a_{t-j} yang digunakan dan juga menunjukkan semakin lambatnya nilai a_t tersebut menuju ke equilibriumnya atau posisi rata-ratanya.

2.2 FUNGSI GREEN PADA MODEL ARMA (2.1)

Metode implisit

Model ARMA (2,1) adalah sebagai berikut :

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} = a_t - \theta_1 a_{t-1} \quad \text{....(2.2.1)}$$

atau

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)X_t = (1 - \theta_1 B)a_t \quad \text{...(2.2.1a)}$$

Untuk menentukan nilai G_j pada model ARMA (2,1) ini akan digunakan metode *membandingkan koefisien - koefisien* .

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} G_j a_{t-j} = \left[\sum_{j=0}^{\infty} G_j B^j\right] a_t$$

Mensubstitusikan persamaan diatas kedalam persamaan (2.2.1a) maka akan didapatkan

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)\left[\sum_{j=0}^{\infty} G_j B^j\right] a_t = (1 - \theta_1 B) a_t$$

Karena a_t adalah orthogonal maka akan diberikan pemakaian operator identitas

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)(G_0 + G_1 B + G_2 B^2 + G_3 B^3 + \ldots) \equiv (1 - \theta_1 B)$$

Apabila dibuat persamaan-persamaan dari koefisien -

koefisien yang berderajad sama dari B, maka akan didapatkan :

$$0 : G_0 = 1$$

$$1 : G_1 - \phi_1 G_0 = -\theta_1 \longrightarrow G_1 = \phi_1 - \theta_1$$

$$2 : G_2 - \phi_1 G_1 - \phi_2 G_0 = 0 \longrightarrow G_2 = \phi_1^2 - \phi_1\theta_1 + \phi_2$$

.....(2.2.2)

dan

$$G_j = \phi_1 G_{j-1} + \phi_2 G_{j-2} , \qquad j \geq 3$$

Hasilnya yaitu :

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)G_j = 0 \qquad j \geq 2 \qquad ....(2.2.3)$$

Persamaan (2.2.2) dan (2.2.3) dengan tepat digunakan apabila hanya beberapa G_j yang pertama yang akan dibutuhkan. Misalnya seseorang memerlukan, katakanlah empat langkah ramalan kedepan maka pendekatan probabilitas tergantung pada G_1, G_2 dan G_3 yang akan dihitung dengan persamaan (2.2.2) dan (2.2.3). Akan tetapi apabila dibutuhkan G_j untuk peramalan sejauh j yang lebih besar dari di atas dapat digunakan metode eksplisit yang akan diuraikan lebih lanjut nantinya.

Sebagai contoh penggunaan metode implisit di atas , misalkan ϕ_1 = 1,3 , ϕ_2 = -0,4 dan θ_1= 0,4 , maka :

$$G_0 = 1$$

$$G_1 = \phi_1 - \theta_1 = 1,3 - 0,4 = 0,9$$

$$G_2 = \phi_1 G_1 + \phi_2 G_0$$

$$= 1,3 \cdot 0,9 - 0,4 \cdot 1 = 0,77$$

$$G_3 = \phi_1 G_2 + \phi_2 G_1$$

$$= 1,3 \cdot 0,77 + (-0,4) \cdot 0,9 = 0,64$$

dan seterusnya.

Metode eksplisit

Untuk mendapatkan satu gambaran eksplisit untuk G_j, dapat digunakan metode pembalikan operator pada autoregressive sebagaimana dalam kasus AR (1). Misal difaktorkannya bagian autoregressive pada model ARMA (2,1) sebagai

$$\left(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2\right) = \left(1 - \lambda_1 B\right)\left(1 - \lambda_2 B\right) \quad .....(2.2.4)$$

yaitu :

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= \phi_1 \\ \lambda_1 \lambda_2 &= -\phi_2 \end{aligned}\right\} \quad ....(2.2.4a)$$

Dimana λ_1 dan λ_2 adalah akar-akar karakteristik yang diberikan dengan

$$\lambda^2 - \phi_1 \lambda - \phi_2 = 0$$

Sehingga

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{1}{2}\left[\phi_1 \pm \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}\right] \quad ....(2.2.4b)$$

Penguraian dari X_t pada sistem ARMA (2,1) diberikan dengan :

$$X_t = \frac{(1 - \theta_1 B)\ a_t}{(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)}$$

$$= \frac{(1 - \theta_1 B)\ a_t}{(1 - \lambda_1 B)(1 - \lambda_2 B)}$$

Apabila digunakan pecahan terbagi, perluasannya dapat dilakukan sebagaimana dalam kasus AR (1). Jika diassumsikan bahwa λ_1, λ_2 adalah berbeda, maka:

$$X_t = \frac{(1 - \theta_1 B)}{(1 - \lambda_1 B)(1 - \lambda_2 B)}\ a_t$$

$$= \left[\frac{(\lambda_1 - \theta_1)}{(\lambda_1 - \lambda_2)} \frac{1}{(1 - \lambda_1 B)} + \frac{(\lambda_2 - \theta_1)}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \frac{1}{(1 - \lambda_2 B)} \right] a_t$$

$$= \sum_{j=o}^{\infty} \left[\left(\frac{\lambda_1 - \theta_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) \lambda_1^j + \left(\frac{\lambda_2 - \theta_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) \lambda_2^j \right] a_{t-j}$$

Yang mana fungsi Green diberikan dengan

$$G_j = \left(\frac{\lambda_1 - \theta_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) \lambda_1^j + \left(\frac{\lambda_2 - \theta_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) \lambda_2^j \quad .....(2.2.5)$$

G_j tersebut dapat juga berlaku sebagai penyelesaian dari persamaan diferensi homogen (2.2.3) dengan kondisi awal (2.2.2). Penyelesaian dari persamaan diferensi order ke-n adalah kombinasi linier dari λ^j, di mana λ adalah akar karakteristik. Karena akar- akar karakteristik dari persamaan (2.2.3) adalah λ_1 dan λ_2 maka akan didapatkan :

$$G_j = g_1\lambda_1^j + g_2\lambda_2^j \qquad \text{...............(2.2.5a)}$$

Yang mana g_1 dan g_2 ditentukan dari kondisi awal (2.2.2). Sehingga :

$$G_o = g_1 + g_2 = 1$$

$$G_1 = g_1\lambda_1 + g_2\lambda_2 = \phi_1 - \theta_1$$

$$= \lambda_1 + \lambda_2 - \theta_1$$

Dari persamaan di atas g_1 dan g_2 dapat ditentukan sebagai berikut :

$$g_1 = \frac{\lambda_1 - \theta_1}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

$$\text{..........(2.2.6)}$$

$$g_2 = \frac{\lambda_2 - \theta_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

Yang mana juga diberikan dalam persamaan (2.2.5).

Sebagai contoh, untuk suatu permasalahan misalnya telah ditentukan $\phi_1 = 1{,}3$, $\phi_2 = -0{,}4$ dan $\theta_1 = 0{,}4$, maka akar-akar karakteristiknya dengan menggunakan persamaan (2.2.4b) adalah sebagai berikut :

$$\lambda_1,\lambda_2 = \frac{1}{2}\left[\,1{,}3 \pm \sqrt{(1{,}3)^2 + 4(-0{,}4)}\,\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\,1{,}3 \pm \sqrt{1{,}69 - 1{,}6}\,\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\,1{,}3 \pm 0{,}3\,\right]$$

$$\lambda_1 = 0{,}8 \quad \text{dan} \quad \lambda_2 = 0{,}5$$

Selanjutnya dengan persamaan (2.2.5) fungsi Green diperoleh dalam bentuk

$$G_j = \left[\frac{0{,}8 - 0{,}4}{0{,}8 - 0{,}5}\right](0{,}8)^j + \left[\frac{0{,}5 - 0{,}4}{0{,}5 - 0{,}8}\right](0{,}5)^j$$

$$= \frac{1}{0{,}3}\left[0{,}4(0{,}8)^j - 0{,}1(0{,}5)^j\right]$$

$$G_0 = 1$$

$$G_1 = \frac{1}{0{,}3}\left[0{,}32 - 0{,}05\right] = 0{,}9$$

$$G_2 = \frac{1}{0{,}3}\left[0{,}256 - 0{,}025\right] = 0{,}77$$

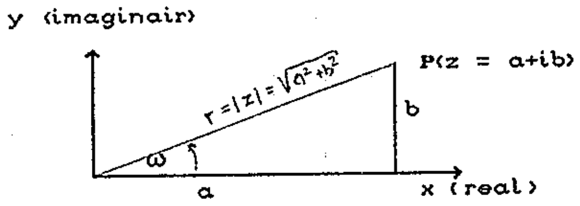
$$G_3 = \frac{1}{0{,}3}\left[0{,}2048 - 0{,}0125\right] = 0{,}64$$

Untuk contoh tersebut diatas $\phi_1^2 + 4\phi_2 = 0{,}09$ yang mana lebih besar dari pada nol (0) sedemikian hingga akar-akar λ_1 dan λ_2 adalah riil. Hal ini terlihat jelas dari persamaan (2.2.4b) bahwa kapanpun $\phi_1^2 + 4\phi_2 \geq 0$, maka akar-akarnya adalah riil dan fungsi Green G_j yang diberikan oleh persamaan (2.2.5) adalah jumlah dari eksponensial seperti contoh di atas.

Ketika $\phi_1^2 + 4\phi_2 \leq 0$, akar-akar dari $\lambda_1$dan λ_2 adalah merupakan akar-akar yang komplek dan begitu juga $g_1$dan g_2. Dimisalkan bilangan komplek z

$$z = a+ib$$

$$i = \text{bagian imaginair}$$



Sehingga $r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$

dan $\omega = \arg z = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

Maka bilangan komplek z dalam bentuk trigonometri :

$$z = a+ib$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i\,\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]$$

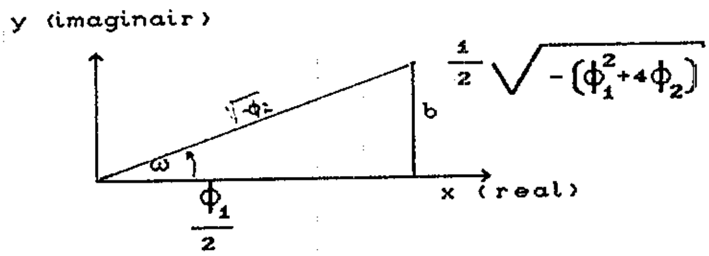
$$= r\,(\cos\omega + i\sin\omega)$$

$$= re^{i\omega}$$

Dengan cara yang sama nilai $z^* = a-ib$ adalah sebagai berikut :

$$z^* = a+ib = re^{-i\omega}$$

Sedemikian hingga untuk akar-akar λ_1, λ_2 dari model ARMA(2,1) :



$$\lambda_1, \lambda_2 = a \pm ib = \frac{1}{2}\left[\phi_1 \pm \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}\right]$$

$$= r\{\cos\ \omega \pm i\ \sin\ \omega\}$$

$$= re^{\pm i\omega} \quad , \ i = \sqrt{-1}$$

di mana

$$r = |\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{-\phi_2} \qquad ....(2.2.4c)$$

$$\omega = \cos^{-1} \frac{\phi_1}{2\sqrt{-\phi_2}} = \cos^{-1} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{2\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \qquad ....(2.2.4d)$$

dan fungsi Geen G_j :

$$G_j = \left[\frac{\lambda_1 - \Theta_1}{\lambda_1 - \lambda_2}\right] \left[r e^{i\omega}\right]^j + \left[\frac{\lambda_2 - \Theta_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\right] \left[r e^{-i\omega}\right]^j$$

$$= \frac{r^j}{(\lambda_1 - \lambda_2)} \left[(\lambda_1 - \Theta_1) e^{i(j\omega)} - (\lambda_2 - \Theta_1) e^{-i(j\omega)} \right]$$

$$= \frac{r^j}{(\lambda_1 - \lambda_2)} \left[(\lambda_1 - \Theta_1)(\cos\ j\omega + i\ \sin\ j\omega) \right.$$

$$\left. - (\lambda_2 - \Theta_1)(\cos\ j\omega - i\ \sin\ j\omega) \right]$$

$$= \frac{r^j}{(\lambda_1 - \lambda_2)} \left[(\lambda_1 - \lambda_2)\cos\ j\omega + (\lambda_1 + \lambda_2 - 2\Theta_1) i\ \sin\ j\omega \right]$$

$$= r^j \left[\cos\ j\omega + i \frac{\phi_1 - 2\Theta_1}{(\lambda_1 - \lambda_2)} \sin\ j\omega \right]$$

$$= r^j\left[\cos j\omega + i\,\frac{(\phi_1-2\theta_1)}{i\sqrt{-(\phi_1^2+4\phi_2)}}\sin j\omega\right]$$

$$= r^j\left[\cos j\omega + \frac{\phi_1-2\theta_1}{\sqrt{-(\phi_1^2+4\phi_2)}}\sin j\omega\right]$$

misal :

$$-B = \frac{\phi_1-2\theta_1}{\sqrt{-(\phi_1^2+4\phi_2)}}$$

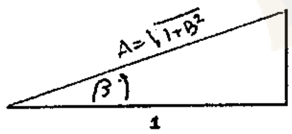
maka

$$G_j = r^j[\cos j\omega - B\sin j\omega]$$

Jika ditetapkan

$$A = \sqrt{1+B^2}$$

maka $G_j = r^jA\left[\frac{1}{A}\cos j\omega - \frac{B}{A}\sin j\omega\right]$



$$B = \frac{-\phi_1+2\theta_1}{\sqrt{-(\phi_1^2+4\phi_2)}}$$

$$G_j = r^jA[\cos\beta\cos j\omega - \sin\beta\sin j\omega]$$

$$= r^jA\cos(\beta+j\omega)$$

$$= r^j\,2g\cos(\beta+j\omega)$$

atau dengan cara sebagai berikut :

$$g_1, g_2 = ge^{\pm i\beta} \qquad \text{.............(2.2.6a)}$$

dimana

$$g = |g_1| = |g_2|$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{1 + \left[\frac{\phi_1 - 2\theta_1}{\sqrt{-(\phi_1^2 + 4\phi_2)}}\right]^2} = \frac{A}{2} \quad ..(2.2.6b)$$

$$\beta = \tan^{-1}\left[\frac{-\phi_1 + 2\theta_1}{\sqrt{-(\phi_1^2 + 4\phi_2)}}\right] \quad ....(2.2.6c)$$

kemudian menambahkan ke dalam persamaan (2.2.5a) akan didapatkan :

$$G_j = ge^{i\beta}(re^{i\omega})^j + ge^{-i\beta}(re^{-i\omega})^j$$

$$= gr^j\left[e^{i(j\omega+\beta)} + e^{-i(j\omega+\beta)}\right]$$

$$= 2gr^j \cos(j\omega + \beta)$$

$$= r^j A \cos(j\omega + \beta) \quad ....(2.2.5b)$$

Untuk contoh misalkan model ARMA (2,1) yang mempunyai parameter ϕ_1 = 1,43 , ϕ_2 = -0,61 dan θ_1 = -0,54 sehingga

$$\phi_1^2 + 4\phi_2 = -0,4 \leq 0$$

$$r = \sqrt{-\phi_2} = \sqrt{0,61} = 0,78$$

$$\omega = \cos^{-1}\left(\frac{1,43}{2 * 0,77}\right) = 23,56^\circ = 0,41 \text{ radian}$$

$$g = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{[1,43 - 2(-0,54)]^2}{0,4}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{2{,}51^2}{0{,}4}} = 2{,}05$$

$$\beta = \tan^{-1} \frac{-2{,}51}{\sqrt{0{,}4}} = -75{,}9^\circ = -1{,}32 \text{ radian}$$

jadi fungsi Greennya adalah

$$G_j = (0{,}77)^j \; 4{,}08 \cos(0{,}42j - 1{,}32)$$

Kasus Khusus dari ARMA (2,1) : AR (2) dan ARMA (1,1)

Sistem ARMA (2,1) akan menjadi AR (2) apabila ditentukan $e_1 = 0$ dan disubstitusikan kedalam persamaan (2.2.5) sehingga :

$$G_j = \frac{\lambda_1}{(\lambda_1 - \lambda_2)} \lambda_1^j + \frac{\lambda_2}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \lambda_2^j$$

$$= \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)} \left[\lambda_1^{j+1} - \lambda_2^{j+1} \right] \qquad \text{............(2.2.7)}$$

Sedang misal $\phi_2 = 0$ atau terlalu kecil nilainya, bentuk model ARMA (2,1) akan menjadi ARMA (1,1). Pernyataan untuk fungsi Green pada model ARMA (1,1) dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan (2.2.5). Karena model ARMA (1,1) sama seperti ARMA (2,1) dengan :

$$\phi_2 = -\lambda_1\lambda_2 = 0$$

dan

$$\phi_1 = \lambda_1 + \lambda_2$$

dengan mengambil $\lambda_2 = 0$ maka $\lambda_1 = \phi_1$ dan disubstitusikan kedalam persamaan (2.2.5) akan didapatkan :

$$G_j = \frac{\lambda_1 - \theta_1}{\lambda_1 - 0} \left(\lambda_1^j\right) + \frac{0 - \theta_1}{0 - \lambda_1} \left(0^j\right)$$

$$= \frac{\lambda_1 - \theta_1}{\lambda_1} \left(\lambda_1^j\right) + \frac{\theta_1}{\lambda_1} \left(0^j\right) \qquad \text{..........(2.2.8a)}$$

Pernyataan $\left(0^j\right)$ adalah sama dengan nol (0) untuk $j \geq 1$, tetapi untuk $j = 0$ harus dinyatakan dengan $0^o = 1$ untuk mendapatkan

$$G_o = \frac{\lambda_1 - \theta_1}{\lambda_1} + \frac{\theta_1}{\lambda_1} = 1$$

Karena selalu didapatkan $G_o = 1$. fungsi Green pada model ARMA (1,1) akan lebih tepat apabila dituliskan seperti berikut ini :

$$G_j = \frac{\lambda_1 - \theta_1}{\lambda_1} \left(\lambda_1^j\right)$$

$$= \left(\lambda_1 - \theta_1\right) \lambda_1^{j-1}$$

$$= \left(\phi_1 - \theta_1\right) \phi_1^{j-1} \qquad j \geq 1 \qquad \text{.......(2.2.8)}$$

Dengan catatan bahwa (2.2.8) hanya berlaku untuk $j \geq 1$, sebab jika diberikan $j = 0$ maka akan didapatkan hasil yang tidak benar.

Pada waktu ϕ_2 dan θ_1 nol (yaitu, $\lambda_1 = \theta_1 = 0$), fungsi Green (2.2.5) akan menjadi model AR (1) dengan

$\lambda_1 = \phi_1$. Perpindahan dari model AR (1) ke ARMA (2,1) itu adalah perpindahan dari karakteristik dengan eksponensial tunggal λ_1^j ke karakteristik dua eksponensial λ_1^j dan λ_2^j. Dari sini dapat dilihat bahwa perpindahan dari model AR (1) ke ARMA (2,1) dengan koefisien yang sesuai untuk fungsi Green dari sistem AR (1), yaitu :

$$\text{AR (1)} \quad : G_j = \lambda_1^j$$

$$\text{ARMA (2,1)} : G_j = g_1\lambda_1^j + g_2\lambda_2^j$$

Dua koefisien g_1 dan g_2 selalu dibatasi dengan

$$G_0 = g_1 + g_2 = 1$$

Misalkan g_2 adalah koefisien bebas maka g_1 dapat ditentukan dengan

$$g_1 = 1 - g_2$$

Apabila koefisien g_2 yang bebas mempunyai nilai yang memenuhi [lihat persamaan 2.2.2]

$$G_1 = g_1\lambda_1 + g_2\lambda_2 = \lambda_1 + \lambda_2 = \phi_1$$

maka

$$(1 - g_2)\, \lambda_1 + g_2\lambda_2 = \lambda_1 + \lambda_2$$

atau

$$g_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

Sehingga akan didapatkan model AR (2). Akan tetapi jika koefisien yang bebas tidak memenuhi kondisi tersebut dan mempunyai nilai yang lain, maka akan didapatkan model ARMA (2,1) dengan

$$(1 - g_2)\,\lambda_1 + g_2\lambda_2 = \phi_1 - \theta_1 = \lambda_1 + \lambda_2 - \theta_1$$

atau

$$\theta_1 = \lambda_2 + g_2\,(\lambda_1 - \lambda_2)$$

Hal ini merupakan alasan mengapa diberlakukan model AR (2) sebagai satu kasus khusus dari model ARMA (2,1). Dan itu juga sebagai alasan mengapa setelah AR (1) diberlakukan model ARMA (2,1). Sedemikian hingga dapatlah dikatakan koefisien yang bebaslah yang menentukan parameter moving average θ_1.

2.3 FUNGSI GREEN PADA MODEL ARMA (n, n-1)

Model ARMA (n,n-1) adalah :

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} - \ldots - \phi_n X_{t-n} = a_t - \theta_1 a_{t-1}$$
$$- \theta_2 a_{t-2} - \ldots - \theta_{n-1} a_{t-n+1}$$

Mengikuti metode implisit pada sistem ARMA (2,1)

$$(1-\phi_1 B-\phi_2 B^2-\ldots-\phi_n B^n)\,(G_0+G_1 B+G_2 B^2+\ldots)$$
$$= (1-\theta_1 B-\theta_2 B^2-\ldots-\theta_{n-1} B^{n-1}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.3.1)$$

Dengan jalan yang sama juga bisa didapatkan

$0 : G_0 = 1$

$1 : G_1 - \phi_1 G_0 = -\theta_1$

$2 : G_2 - \phi_1 G_1 - \phi_2 G_0 = -\theta_2$

$$3 : G_3 - \phi_1 G_2 - \phi_2 G_1 - \phi_3 G_o = -\theta_3$$

$$\vdots$$

$$n - 1 : G_{n-1} - \phi_1 G_{n-2} - \ldots - \phi_{n-1} G_o = -\theta_{n-1}$$

$$n : G_n - \phi_1 G_{n-1} - \ldots - \phi_n G_o = 0$$

Jadi

$$(1-\phi_1 B-\phi_2 B^2-\ldots-\phi_n B^n)G_j = 0 \quad , \; j \geq n \qquad \ldots\ldots(2.3.2)$$

Untuk bentuk eksplisit fungsi Green mempunyai bentuk

$$G_j = g_1\lambda_1^j + g_2\lambda_2^j + \ldots + g_n\lambda_n^j \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.3.3)$$

dimana $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ adalah akar-akar dari

$$\lambda^n - \phi_1\lambda^{n-1} - \phi_2\lambda^{n-2} - \ldots - \phi_n = 0 \qquad \ldots\ldots(2.3.4)$$

dan

$$g_i = \frac{(\lambda_i^{n-1} - \theta_1\lambda_i^{n-2} - \ldots - \theta_{n-1})}{(\lambda_i-\lambda_1)(\lambda_i-\lambda_2)\ldots(\lambda_i-\lambda_{i-1})(\lambda_i-\lambda_{i+1})\ldots(\lambda_i-\lambda_n)} \qquad \ldots(2.3.5)$$

dimana pembaginya adalah hasil dari semua bentuk $(\lambda_i-\lambda_j)$ untuk $j = 1, 2, \ldots, n$ kecuali untuk $j = i$ yaitu $(\lambda_i-\lambda_i)$.

2.4 KESTABILAN FUNGSI GREEN PADA SISTEM ARMA

2.4.1 Kestabilan pada Sistem AR (1)

Sistem AR (1) disebut stabil asymtotik apabila

$$|\phi_1| < 1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.4.1)$$

Ini menunjukkan bagaimana nilai-nilai G_j secara asymtotik menuju ke-nol. Dan juga sistem tersebut secara asymtotik akan kembali ke posisi equilibriumnya / rata-rata, jika hanya satu a_t yang dimasukkan.

Untuk model "random walk"

$$X_t = X_{t-1} + a_t$$

karena $\phi_1 = 1$ akan didapatkan

$$G_j \equiv 1$$

Untuk sistem AR (1) di atas, jika dimasukkan satu a_t, sistem tetap berada pada posisi a_t secara tak terbatas dan oleh karena itu sistem tidak stabil asymtotik. Tetapi responnya tetap terbatas yaitu nilai pada waktu yang lalu tidak akan melampaui a_t. Jadi sistem adalah stabil. Maka syarat kestabilan pada sistem AR (1) menjadi

$$|\phi_1| \leq 1 \qquad \text{........................(2.4.2)}$$

Sebaliknya apabila $|\phi_1| > 1$ yaitu jika syarat kestabilan (2.4.2) tidak terpenuhi, maka

$$G_j \longrightarrow \infty \quad \text{untuk} \quad j \longrightarrow \infty$$

dan ini menjadikan sistem tidak stabil.

Jika sistem adalah stabil maka sistem akan stabil asymtotik. Tetapi tidak sebaliknya yaitu sistem belum tentu stabil asymtotik walaupun sistem tersebut stabil. Ini dapat dilihat pada contoh "random walk" di atas. Sedang syarat kestabilan itu sendiri ditentukan oleh bagian autoregresinya.

2.4.2 Kestabilan pada Sistem ARMA (2,1)

Untuk ARMA (2,1) dikatakan stabil asymtotik apabila :

$$|\lambda_1| < 1 \quad , \quad |\lambda_2| < 1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.4.3)$$

Dengan menggunakan persamaan (2.4.3) dan persamaan (2.2.4a), syarat kestabilan secara asymtotik dapat dinyatakan dalam bentuk- bentuk parameter autoregresi seperti berikut ini :

Karena $\phi_2 = -\lambda_1\lambda_2$

$$|\phi_2| < 1$$

$$-1 < \phi_2 < 1$$

Juga $\lambda_1(1 - \lambda_2) < (1 - \lambda_2)$

$$\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1\lambda_2 < 1$$

$$\phi_1 + \phi_2 < 1$$

dan $-(1 + \lambda_2) < \lambda_1(1 + \lambda_2)$

$$-\lambda_1\lambda_2 - (\lambda_1 + \lambda_2) < 1$$

$$\phi_2 - \phi_1 < 1$$

Maka syarat kestabilan asymtotik untuk sistem ARMA (2,1) adalah :

$$\left.\begin{array}{l}\phi_1 + \phi_2 < 1 \\ \phi_2 - \phi_1 < 1 \\ |\phi_2| < 1\end{array}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.4.4)$$

Untuk contoh model ARMA (2,1) seperti pada bagian 2.2 didepan dimana $\phi_1 = 1,3$ $\phi_2 = -0,4$ maka

$$\phi_1 + \phi_2 = 1,3 - 0,4 = 0,9 < 1$$

$$\phi_2 - \phi_1 = -0,4 - 1,3 = -1,7 < 1$$

$$|\phi_2| = |-0,4| < 1$$

Ini menunjukkan bahwa syarat pada persamaan (2.4.4) dipenuhi. Untuk permasalahan tersebut diatas akar-akarnya adalah $\lambda_1 = 0,8$ dan $\lambda_2 = 0,5$, sehingga persamaan (2.4.3) dipenuhi.

Seperti dalam permasalahan sistem AR (1), kestabilan secara asymtotik menyatakan bahwa apabila diberikan waktu yang cukup, pengaruh a_t yang dimasukkan kedalam sistem akan mengakibatkan sistem tersebut menurun secara berangsur-angsur dan sistem akan kembali keposisi equilibriumnya atau posisi rata - ratanya. Besar dan macam penurunannya akan tergantung pada nilai-nilai dari akar λ_1 dan λ_2.

Sekarang dimisalkan sistem ARMA (2,1) dengan $\phi_1 = 1,5$, $\phi_2 = -0,5$ dan $\theta_1 = 0,3$ maka persamaan ARMA (2,1) adalah sebagai berikut :

$$(1 - 1,5B + 0,5B^2)\ X_t = (1 - 0,3B)\ a_t$$

yaitu

$$(1 - B)(1 - 0{,}5B)\ X_t = (1 - 0{,}3B)\ a_t$$

Karena salah satu dari akar-akarnya adalah satu, maka sistem ini tidak stabil asymtotik. Tetapi sistem ini adalah stabil. Dan karena kedua akar tersebut $\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 = 0{,}5$ adalah berbeda, maka dapat digunakan persamaan (2.2.5) untuk mendapatkan

$$G_j = \left[\frac{0{,}7}{0{,}5}\right](\ 1\ )^j - \left[\frac{0{,}2}{0{,}5}\right](\ 0{,}5\ )^j$$

Dari bentuk tersebut terlihat bahwa

$$G_j \longrightarrow \frac{0{,}7}{0{,}5}\quad , \text{ untuk } j \longrightarrow \infty$$

Ini menunjukkan G_j tetap terikat dan sistem tersebut adalah stabil seperti dikatakan di atas.

Apabila kedua akar tersebut yaitu :

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$$

dan jika saja kedua akar tersebut mempunyai tanda yang berlawanan maka sistem tersebut masih stabil karena dengan persamaan (2.2.5) fungsi Green dengan $\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 = -1$ akan menjadi

$$G_j = \left[\frac{1 - \theta_1}{2}\right](\ 1\ )^j + \left[\frac{1 + \theta_1}{2}\right](\ -1\ )^j$$

Sehingga $G_j \longrightarrow 1$ atau $-\theta_1$ untuk $j \longrightarrow \infty$

Ini menunjukkan bahwa sistem tersebut adalah stabil tetapi tidak stabil asymtotik.

Sedangkan apabila akar-akarnya mempunyai nilai dengan tanda yang sama, maka sistem tersebut adalah tidak stabil. Misalkan saja $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ persamaan (2.2.5) tidak dapat digunakan karena persamaan tersebut berdasarkan akar akar yang berbeda. Maka G_j dapat diperoleh dengan menggunakan cara sebagai berikut :

$$X_t = \frac{(1 - \theta_1 B)}{(1 - B)(1 - B)}\, a_t$$

$$= (1 + B + B^2 + \ldots)(1 + B + B^2 + \ldots)(1 - \theta_1 B)a_t$$

$$= (1 + 2B + 3B^2 + 4B^3 + \ldots)(1 - \theta_1 B)a_t$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} [(j + 1) - \theta_1 j]a_{t-j}$$

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} [(1 - \theta_1)j + 1]a_{t-j}$$

Maka $G_j = (1 - \theta_1)j + 1 \longrightarrow +\infty$ untuk $j \longrightarrow \infty$

Dari uraian di atas syarat-syarat kestabilan untuk ARMA (2,1) dapat dituliskan sebagai berikut :

- Apabila $|\lambda_1| < 1$ dan $|\lambda_2| < 1$ maka sistem akan stabil asymtotik.
- Sistem akan stabil apabila $|\lambda_1| \le 1$ dan $|\lambda_2| \le 1$. Tetapi untuk λ_1 dan λ_2 jika sama dengan satu (1) dan tandanya sama maka sistem akan tidak stabil.

2.4.3 Kestabilan dari Sistem ARMA (n,n-1)

Dengan melihat bahwa persyaratan kestabilan asymtotik dari ARMA (2,1), persyaratan kestabilan asymtotik dari ARMA (n,n-1) dapat dituliskan sebagai berikut :

$$|\lambda_k| < 1 \quad , \ k = 1,2,\ldots,n \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.4.5)$$

Sehingga kestabilan asymtotik dapat juga dinyatakan dengan

i. $\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \ldots + \phi_n < 1$

ii. $-\phi_1 + \phi_2 - \phi_3 + \ldots + (-1)^n\phi_n < 1$

iii. $|\phi_n| < 1$

Sementara itu persyaratan kestabilan adalah

$$|\lambda_k| \leq 1 \qquad k = 1,2,\ldots,n \qquad \ldots\ldots.(2.4.6)$$

dan apabila $\lambda_i = \lambda_j$ untuk $i \neq j$ maka $|\lambda_i| = |\lambda_j|$ haruslah lebih kecil daripada satu (1) untuk $i,j = 1,2,\ldots,n$, sehingga sistem akan stabil. Jika tidak maka sistem tidak stabil.