BAB II

MATERI DASAR

2.1 PENGERTIAN GRAPH.

Definisi 1 :

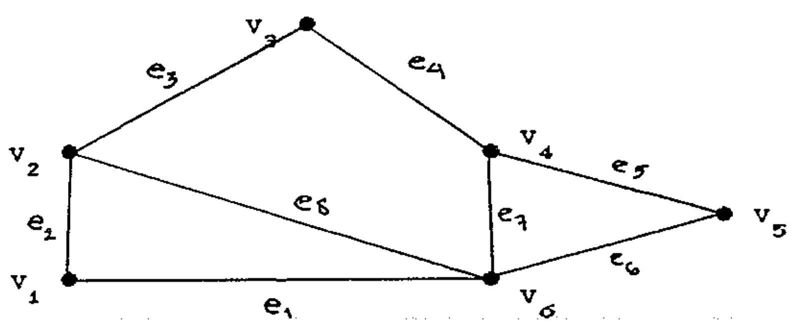
Suatu graph G (V,E) disingkat G terdiri dari himpunan V yang elemennya berupa titik - titik , dan himpunan yang elemennya berupa pasangan berurutan dengan bentuk (x,y) atau (y,x) yang disebut garis (edges) dimana x,y merupakan titik - titik pada V.

Definisi 2 :

Suatu graph G_s disebut subgraph dari graph G , jika setiap titik dari G_s merupakan titik dari graph G , demikian juga setiap garis,didalam graph G_s merupakan garis dari G.

Contoh 1 :

Diberikan suatu graph G :

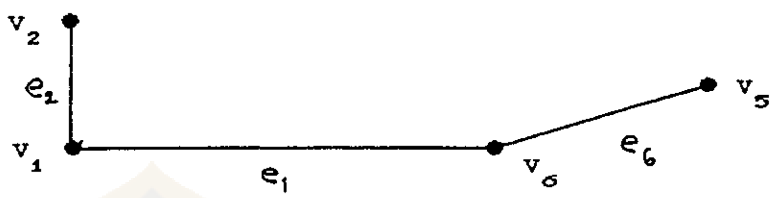


Gb 3 Graph G

Dengan $V = \{ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 \}$

$E = \{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8 \}$

Salah satu contoh subgraph dari graph G adalah :



Dimana :

$V_s = \{ v_1, v_2, v_5, v_6 \}$ yang merupakan sub set dari V.

$G_s = \{ e_1, e_2, e_6 \}$ yang merupakan sub set dari E.

Definisi 3 :

Suatu graph G dengan sifat tidak terdapat garis garis di dalam graph G tersebut dinamakan totally disconected, atau null graph.

Contoh 2 :

Diberikan suatu graph G :

Dengan : $V = \{ v_1, v_2, v_3, v_4 \}$

$E = \{ \emptyset \}$

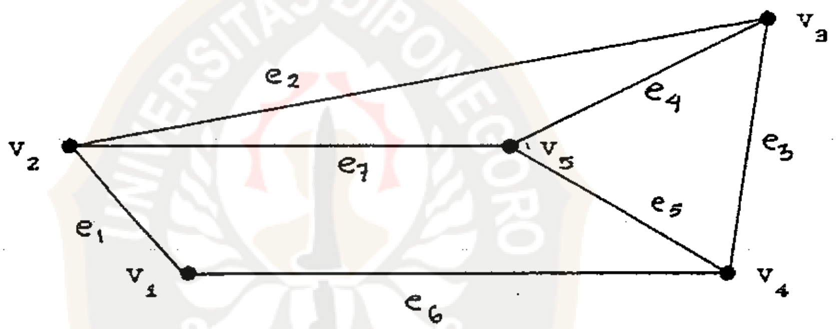
Graph G diatas merupakan contoh Null graph.

Definisi 4 :

Suatu graph G (V,E) disebut multi graph, jika garis - garis graph G tidak mempunyai arah, dan garis graph dengan sifat diatas disebut edge.

Contoh 3 :

Diberikan suatu Graph G :



Dengan $V = \{ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, \}$

$E = \{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7 \}$

Graph G diatas disebut multi graph.

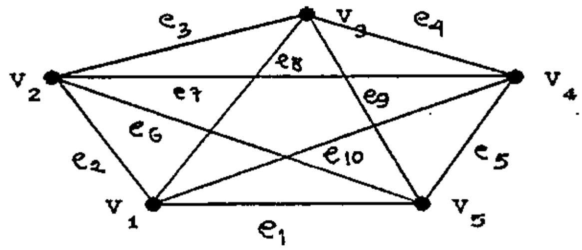
Definisi 5 :

Graph lengkap adalah suatu graph dimana setiap dua vertex yang berlainan bersisian, dengan kata lain setiap titiknya dihubungkan langsung dengan setiap titik lainnya.

Graph lengkap dengan n vertex ditulis (n).

Contoh 4 :

Diberikan suatu graph G :



Gb 6. Graph lengkap (5).

Dengan $V = \{ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$

$E = \{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10} \}$

Definisi 6 :

Degre/Derajat/valensi dari suatu titik (i) yang dinotasikan dengan $\partial(i)$ adalah banyaknya garis yang bertemu dititik i.

Apabila suatu titik terasing maka titik tersebut berdegre o.

Jumlah degre didalam graph G adalah :

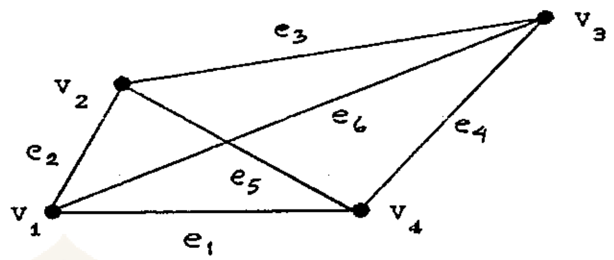
$$\sum_{i=1}^{m} \partial(i) = 2e \qquad e = \text{edge}$$

Definisi 7 :

Graph regular adalah graph dimana setiap titiknya mempunyai valensi yang sama.

Contoh 5 :

Diberikan suatu graph G :



Dengan $V = \{ v_1, v_2, v_3, v_4 \}$

$E = \{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 \}$

Setiap vertex dalam Graph G mempunyai valensi 3 , maka graph diatas merupakan graph regular.

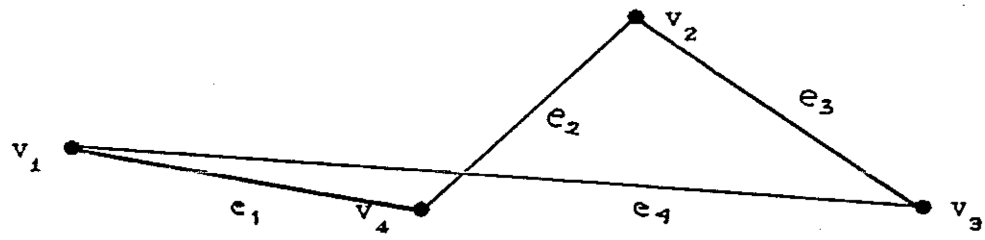
Setiap nullgraph merupakan graph regular, dan graph lengkap juga merupakan graph regular bervalensi n - 1

Definisi 8 :

Jika G adalah graph dengan himpunan vertex V(G) maka Komplemen dari graph G adalah Graph $\overline{G}$, dan himpunan vertexnya adalah $V(\overline{G})$, apabila terdapat dua vertex yang bersisian di G ,maka tidak akan bersisian di $\overline{G}$, sehingga komplemen dari graph lengkap adalah null graph dan sebaliknya komplemen dari graph regular adalah graph regular.

Contoh 6 :

Diberikan Graph G :

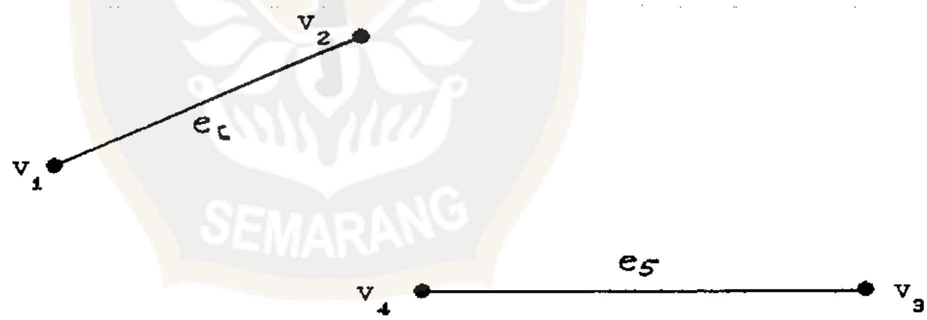


Gb 8.

Dengan $V = \{ v_1, v_2, v_3, v_4 \}$

$E = \{ e_1, e_2, e_3, e_4 \}$

Komplemen dari graph G adalah :



Komplemen Graph $\overline{G}$

Dengan $V = \{ v_1, v_2, v_3, v_4 \}$

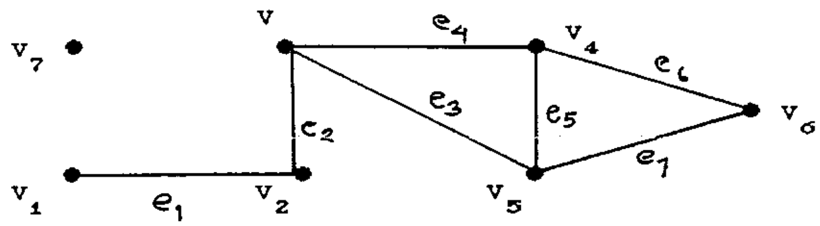
$E = \{ e_5, e_6 \}$

Definisi 9 :

Order suatu graph adalah banyaknya vertex yang terdapat dalam graph G.

Contoh 7 :

Diberikan suatu graph G.



Gb 9.

Dengan $V = \{ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7 \}$

$E = \{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, \}$

Graph G diatas merupakan graph berorde 6.

Definisi 10 :

Jika titik v_i adalah titik akhir dari garis graph e_j maka v_i dan e_j disebut incident satu dengan yang lainnya.

Contoh 8 :

Didalam graph G (gb 9) garis graph e_1 $e_2$incident dengan titik v_2

Definisi 11 :

Titik terisolasi (isolated vertex) adalah titik yang tidak memuat incident garis graph.

dengan kata lain titik terisolasi adalah titik dengan derajat noll.

Contoh 9 :

Didalam graph G (gb 9) vertex 7merupakan vertex terasing.

Definisi 12 :

Dua vertex dari graph G adjacentjika terdapat garis yang menghubungkan langsung antara kedua vertex .

Contoh 10 :

Didalam graph G (gb9) vertex - vertex yang adjacent adalah v_1v_2, v_2v_3, v_3v_5, v_3v_4, v_4v_5, v_5v_6,

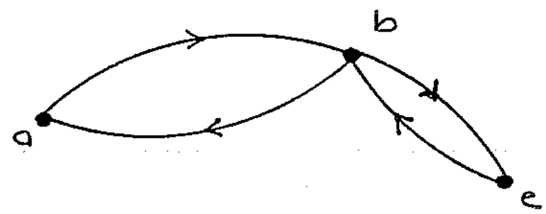
Definisi 13 :

Infinite graph (graph berhingga) adalah suatu graph yang mempunyai jumlah titik dan jumlah garis graph yang berhingga dan kebalikannya adalah infinite graph.

Definisi 14 :

Graph G disebut simetris apabila diketahui titik a adjacent ke b dan b adjacent ke a apabila tidak memenuhi itu maka disebut asimetris.

Contoh 11 :

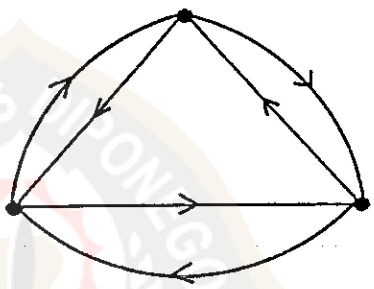


Gb 10 Graph Simetris.

Definisi 15 :

Suatu graph berarah G dikatakan simetris lengkap jika dari setiap titik di G ada garis graph ke setiap titik lainnya.

Contoh 12 :

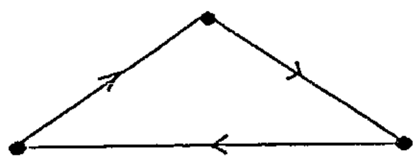


Gb 11. Graph Simetris lengkap.

Definisi 16 :

Suatu graph berarah G dikatakan asimetris lengkap, jika untuk setiap pasang titik dalam G terdapat garis graph yang menghubungkan setiap pasang titik tersebut.

Contoh 13 :



Gb 12. Graph asimetris lengkap.

Setiap graph berarah G yang simetris lengkap dengan n titik memiliki n(n - 1) garis graph.

Dan Graph G yang asimetris lengkap dengan n titik memiliki $\frac{n(n - 1)}{2}$ garis graph. Dapat ditulis$\left[{n \atop 2}\right]$

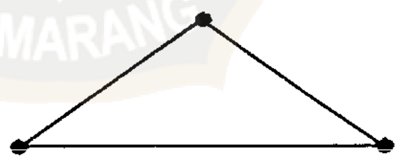
Contoh 14 :

Diberikan graph lengkap (n).

maka garis graphnya adalah : $\frac{n(n - 1)}{2} = \left[{n \atop 2} \right]$

Bila n = 2 $\left[{2 \atop 2} \right] = \frac{n(n - 1)}{2} = 1$ edge.

Bila n = 3 $\left[{3 \atop 2}\right] = \frac{n(n - 1)}{2} = 3$ edge.

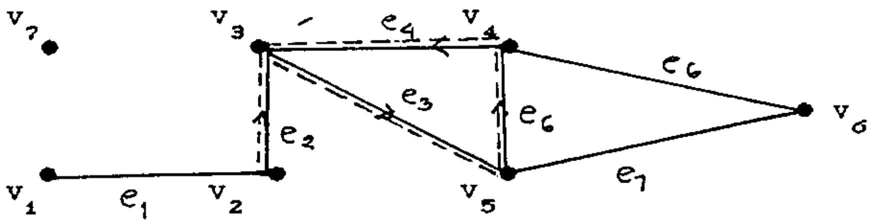


DEfinisi 17 :

Walk/ chain dalam graph G adalah suatu lintasan yang titik dan garisnya boleh diulang.Walk dengan lintasan tertutup (titik awal sama titik akhir) disebut sirkuit.

Contoh 15 :

Diberikan graph G :



Dengan $V = \{ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7 \}$

$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7 \}$

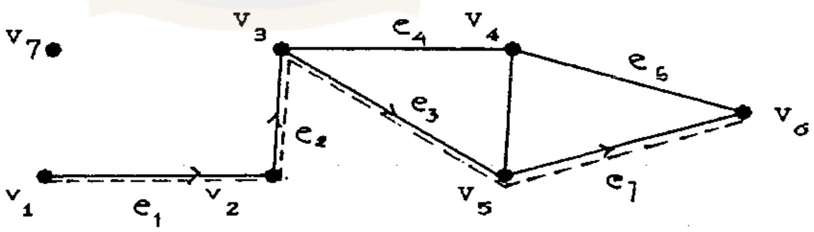
Terdapat lintasan $v_2, e_2, v_3, e_3, v_5, e_5, v_4, e_4, v_3$ di dalam graph G lintasan diatas merupakan Walk.

Definisi 18 :

Path dalam graph adalah suatu lintasan dimana titik maupun garisnya tidak boleh diulang .Jika barisan edge $i_1, i_2 \ldots\ldots i_n$ maka panjang pathnya adalah n - 1

Contoh 16 :

Diberikan graph G :



Dengan $V = \{ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7 \}$

$E = \{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7 \}$

Terdapat lintasan $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_5, e_7, v_6$ didalam graph G lintasan diatas merupakan path.

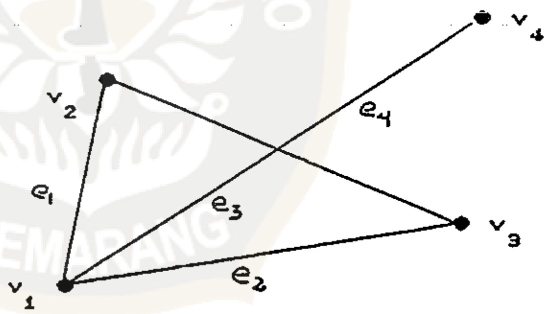
2.2 GRAPH TERHUBUNG DAN GRAPH TAK TERHUBUNG

Definisi 19 :

Suatu graph disebut graph terhubung (conected graph) jika setiap pasangan titiknya dihubungkan melalui path dan suatu graph disebut graph tak terhubung (disconected graph) jika terdapat pasangan titik yang tidak terhubung.

Contoh 17 :

Diberikan graph G :



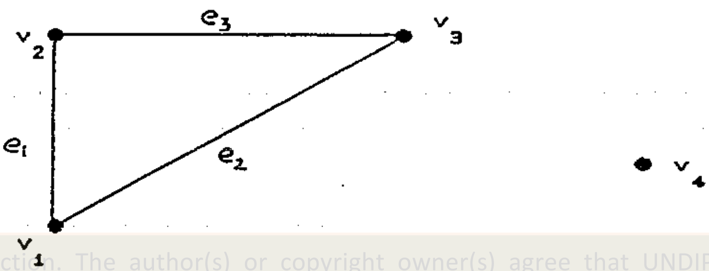
Gb 15.

Dengan $V = \{ v_1, v_2, v_3, v_4 \}$

$E = \{ e_1, e_2, e_3, e_4 \}$

Graph G diatas merupakan graph terhubung.

Diberikan graph G :



Dengan $V = \{ v_1, v_2, v_3, v_4 \}$

$E = \{ e_1, e_2, e_3 \}$

Graph diatas merupakan graph tak terhubung.

Theorema 1 :

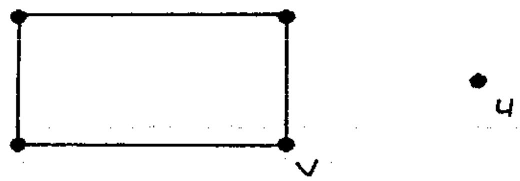
Komplemen graph tak tehubung adalah selalu graph terhubung.

Bukti :

Jika G adalah graph tak terhubung. Dimisalkan u dan v dua titik yang termuat dalam G , sehingga akan adjacent didalam $\overline{G}$ dan akan terdapat path dengan panjang 1 (gb 17).Jika u dan v termuat dalam G baik adjacent maupun tidak dan terdapat sebuah titik lagi mis w dimana tidak adjacent di u dan v dalam G ,maka w akan adjacent dengan u dan v dalam $\overline{G}$. Sehingga akan terdapat path dengan panjang 2 yang terhubung dalam $\overline{G}$ (Gb 18).

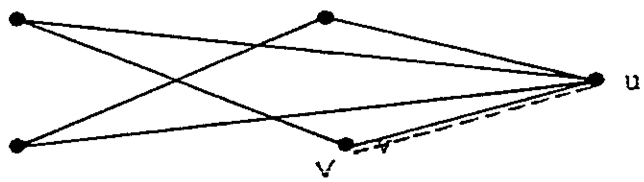
Contoh 18 :

Diberikan graph G tak terhubung :



Gb 17.

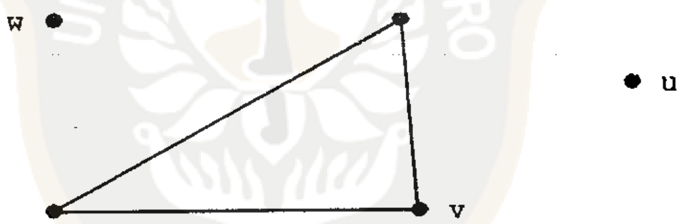
Komplemen graph $\overline{G}$ diatas adalah



Terdapat lintasan path uv dengan panjang 1.

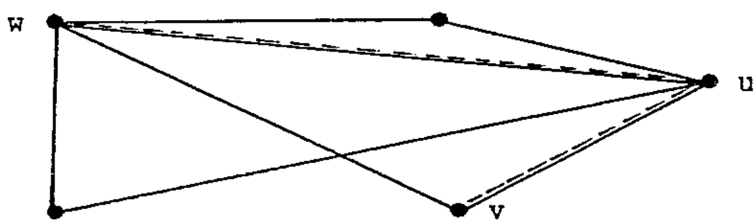
Contoh 19 :

Diberikan graph tak terhubung G :



Gb 18.

Komplemen graph $\overline{G}$ diatas adalah :



Terdapat lintasan path wuv dengan panjang 2.

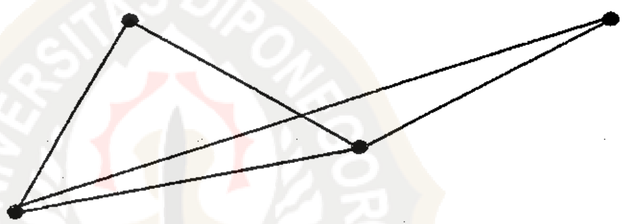
2.3. TREE DAN COTREE

Definisi 20 :

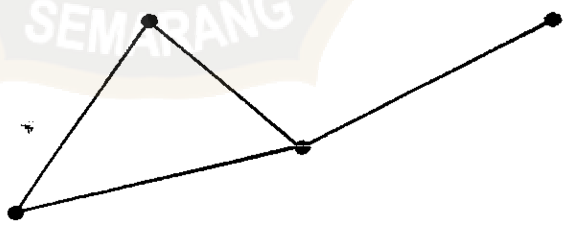
Suatu subgraph dalam G merupakan spaning jika memuat titik - titik dari graph G.

Contoh 20 :

Diberikan graph G :



salah satu contoh spaning subgraph dari G adalah

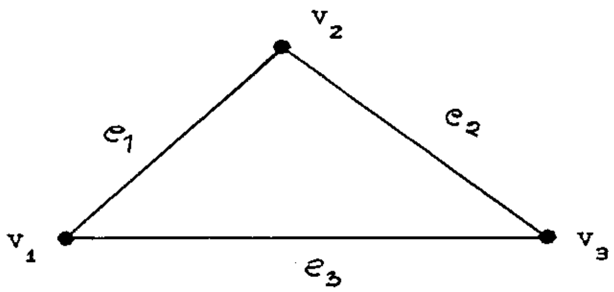


Definisi 21 :

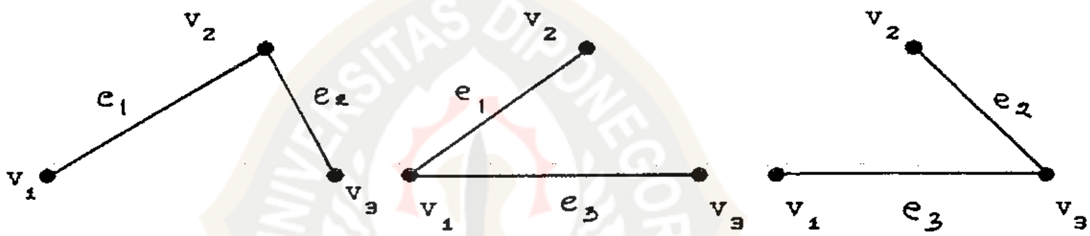
Suatu spaning subgraphdari graph G disebut tree jika conected dan tidak terdapat sirkuit.

Contoh 21 :

Diberikan graph G :



Contoh himpunan tree dari G adalah sebagai berikut :

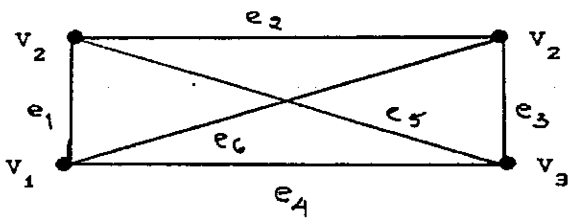


Definisi 22 :

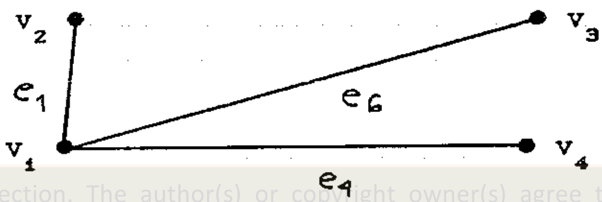
Komplemen dari tree pada graph G disebut cotree.

Contoh 22 :

diberikan graph G :

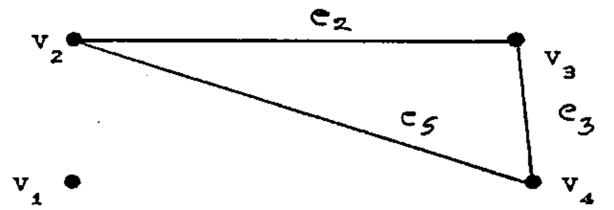


Misal diambil suatu tree t = e_1, e_4, e_6



Untuk cotreenya adalah komplemen dari t yaitu :

$\bar{t} = e_2, e_3, e_5$



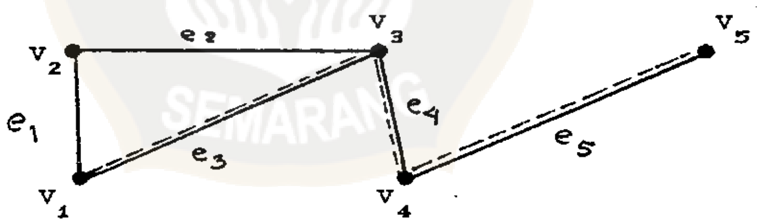
2.4 DIAMETER DALAM GRAPH

Definisi 23 :

Jarak $\delta_G(a,b)$ adalah lintasan terpendek yang menghubungkan titik a dan b dalam graph terhubung .

Contoh 23 :

Diberikan graph G



Dengan $V = \{ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$

$E = \{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 \}$

Jarak $\delta_G(v_1, v_5)$ adalah panjang lintasan yang melalui e_3, e_4, e_5 sebesar 3.

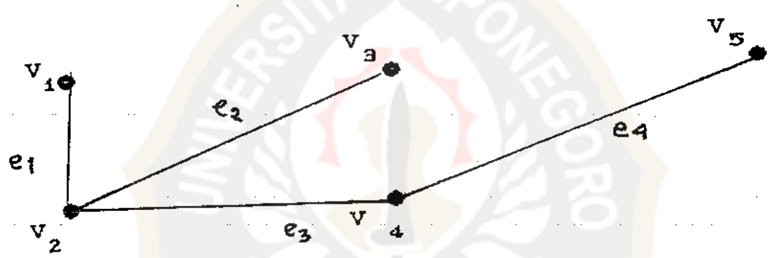
Definisi 24 :

Diameter d(G) pada graph berhingga G adalah maksimum jarak antara kedua vertex.

$$d(G) = \max_{x,y \in V} \mathscr{L}_G(x,y)$$

Contoh 24 :

Diberikan suatu graph G



Dengan $V = \{ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$

$E = \{ e_1, e_2, e_3, e_4 \}$

Jarak antara pasangan vertex (x,y) adalah :

$\mathscr{L}_G(v_1,v_2) = 1$ $\mathscr{L}_G(v_2,v_3) = 1$ $\mathscr{L}_G(v_3,v_5) = 3$

$\mathscr{L}_G(v_1,v_3) = 2$ $\mathscr{L}_G(v_2,v_4) = 1$ $\mathscr{L}_G(v_4,v_5) = 1$

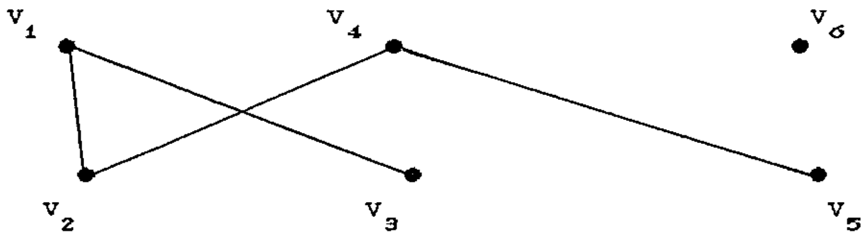
$\mathscr{L}_G(v_1,v_4) = 2$ $\mathscr{L}_G(v_2,v_5) = 2$

$\mathscr{L}_G(v_1,v_5) = 3$ $\mathscr{L}_G(v_3,v_4) = 2$

Maka diameter dari graph G diatas adalah 3,pada lintasan v_1,v_2,v_4,v_5 atau v_3,v_2,v_4,v_5 dan graph diatas merupakan graph yang terhubung

Contoh 25 :

Diberikan suatu graph G :



Jarak antara pasangan vertex (x,y) adalah :

$\mathscr{L}_G(v_1,v_2) = 1$ $\mathscr{L}_G(v_2,v_3) = 2$ $\mathscr{L}_G(v_3,v_5) = 1$

$\mathscr{L}_G(v_1,v_3) = 1$ $\mathscr{L}_G(v_2,v_4) = 1$ $\ell_G(v_3,v_6) = 2$

$\mathscr{L}_G(v_1,v_4) = 2$ $\mathscr{L}_G(v_2,v_5) = 2$ $\mathscr{L}_G(v_4,v_5) = \infty$

$\mathscr{L}_G(v_1,v_5) = 3$ $\mathscr{L}_G(v_2,v_6) = \infty$ $\mathscr{L}_G(v_4,v_6) = \infty$

$\mathscr{L}_G(v_1,v_6) = \infty$ $\mathscr{L}_G(v_3,v_4) = 1$ $\mathscr{L}_G(v_5,v_6) = \infty$

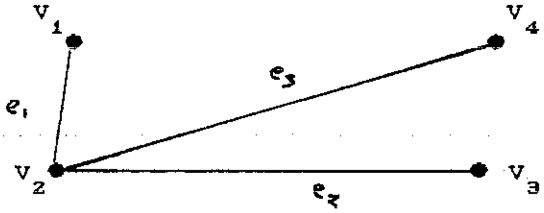
Maka diameter graph G diatas adalah ∞ / tak berhingga sehingga graph G diatas merupakan graph yang tak berhubung.

definisi 25 :

Jika graph G merupakan graph berhingga maka dipenuhi $d(G) < V$. V = vertex.

contoh 26 :

Diberikan suatu graph G :



$\mathcal{L}_G(1,2) = 1$ $\mathcal{L}_G(2,3) = 1$

$\mathcal{L}_G(1,3) = 2$ $\mathcal{L}_G(2,4) = 1$

$\mathcal{L}_G(1,4) = 2$ $\mathcal{L}_G(3,4) = 2$

Diameter graph G diatas = 2

maka dipenuhi $d(G) < V$

$2 < 4$.

theorema 2 :

Jika dari titik x_1 ke titik x_2 dari graph G dengan n titik terdapat suatu lintasan , maka terdapat lintasan yang panjangnya tidak lebih dari $n - 1$

Bukti :

Misal dalam graph ada lintasan $p = \{x_1, \ldots x_i\ x \ldots x_2\}$ yang panjangnya k , berarti terdapat k + 1 titik yang dilalui. Misal $k > n - 1$ berarti ada titik yang muncul lebih dari satu kali,misal x_j sehingga $p = \{x_1, \ldots x_i, x_j \ldots x_j, x_2\}$ .Dengan menghapus garis graph pada lintasan x_j kembali ke x_j maka panjang lintasan akan berkurang misal disebut k_1 sehingga $k - k_1 < n - 1$

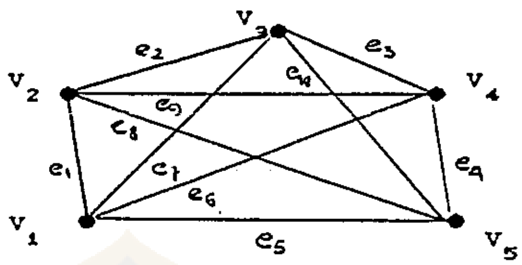
2.5. DEKOMPOSISI

Definisi 27 :

Faktor dalam G adalah suatu subgraph dari graph G yang memuat semua vertex - vertexnya.

Contoh 27 :

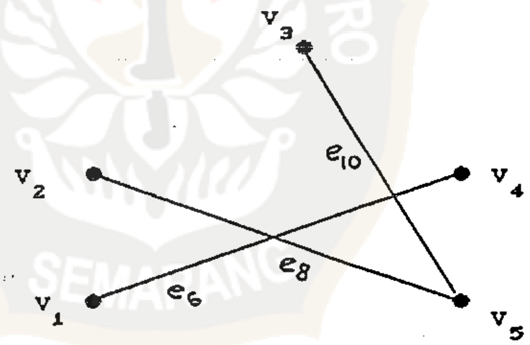
Diberikan graph G (5)



Dengan $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$

$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$

Salah satu contoh faktor dari graph diatas adalah :



Dengan $V = \{ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$

$E = \{e_6, e_8, e_{10}\}$

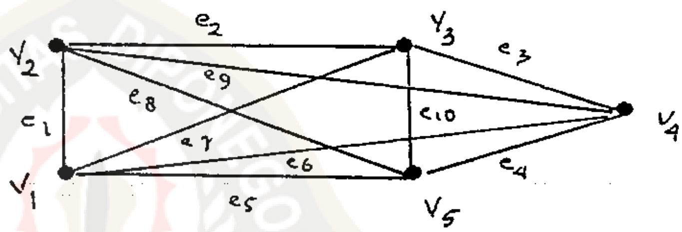
Definisi 28 :

Suatu graph lengkap G(n) dapat **dipisahkan** (dekomposable) ke dalam dua faktor atau lebih ($F_1, F_2 \ldots F_m$) jika memenuhi $F_1 \cup F_2 \ldots \cup F_m = G$ dan $F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_m = \{\emptyset\}$

Contoh 28 :

Disini akan diperlihatkan bahwa suatu graph (n) dapat dipisahkan ke dalam beberapa faktor ,jika dimenuhi :
$F_1 \cup F_2 \cup \ldots\ldots \cup \ldots F_m = G$ dan $F_1 \cap F_2 \cap \ldots\ldots \cap F_m = \emptyset$.
Disini diambil contoh pemisahan kedalam 2 faktor

Diberikan graph (5)

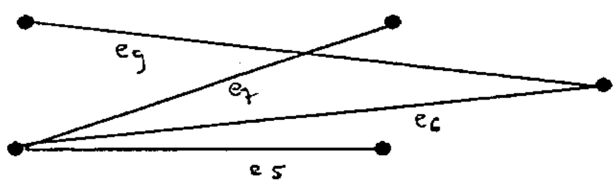


Dengan $V = \{ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$

$E = \{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10} \}$

Graph (5) dipisahkan ke dalam 2 faktor dengan diameter berhingga.

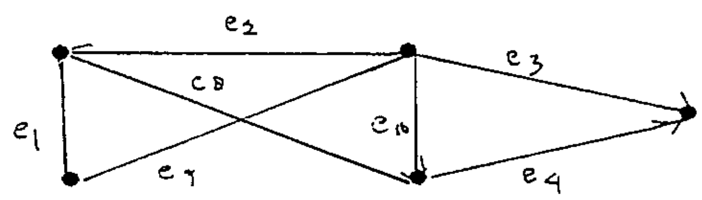
Salah satu contoh faktor F_1 adalah :



Dengan $V_{F_1} = \{ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$

$E_{F_1} = \{ e_5, e_6, e_7, e_9 \}$

Faktor F_2 adalah memuat garis graph yang tersisa



Dengan $V_{F_2} = \{ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$

$E_{F_2} = \{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_8, e_{10} \}$

Dimana $F_1 \cup F_2$

$= \{ e_5, e_6, e_7, e_9 \} \cup \{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_8, e_{10} \}$

$= \{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10} \}$

$= G$

$F_1 \cap F_2$

$= \{ e_5, e_6, e_7, e_9 \} \cap \{ e_1, e_2, e_3, e_4, e_8, e_{10} \}$

$= \{ \emptyset \}$

Jadi terbukti Graph G(5) dapat diuraikan kedalam dua faktor.