BAB III

RANTAI MARKOV WAKTU DISKRIT

Dalam bab ini akan dibahas mengenai sifat Markov dan Rantai Markovnya. Rantai Markov disini akan disusun dalam suatu bentuk probabilitas transisi dan diasumsikan bahwa probabilitas transisinya tetap sepanjang masa. Untuk menunjang bab ini dengan menggunakan definisi dan theorema sebagai berikut :

3.1 Sifat Rantai Markov

Misalkan suatu sistem yang didalamnya terdapat suatu state (kondisi/keadaan) yang berhingga atau tak berhigga tetapi terbilang. Diberikan X menunjukkan suatu state dari himpunan. Himpunan ψ adalah subset dari himpunan bilangan bulat dan disebut sebagai ruang bagian.

Misal suatu mesin diamati pada n waktu diskrit dimana n = 0,1,2,...dan X_n menunjukkan sistem pada waktu n. Dimana X_n, $n \geq 0$ adalah suatu peubah acak (variabel random) yang independen. Dengan mengikuti definisi di bawah ini akan ditunjukkan sifat dari pada Rantai Markov.

Definisi 3.1.1

Proses Markov adalah suatu proses dimana masa lalu tidak berpengaruh pada masa yang akan datang bila masa sekarang diketahui, ini disebut sebagai sifat Markov dan dinotasikan dengan :

$$P\,(X_{n+1} = x_{n+1} \,/\, X_0 = x_0,\ X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n)$$

$= P\ (X_{n+1} = x_{n+1}\ /\ X_n = x_n)$....................(3.1.1)

Dimana n bilangan bulat positif dan $x_o, x_1, \ldots, x_{n+1} \in \psi$. Dan sistem yang mempunyai sifat Markov disebut Rantai Markov.

Dari keterangan di atas bisa diartikan sebagai berikut:

(i) Probabilitas peluang bersyarat dari x_{n+1} untuk harga-harga x_{n+1} dimana $x_o, x_1, \ldots, x_n$ sudah diketahui dan hanya tergantung pada harga x_n yaitu harga terdekat dari x_{n+1} dn tidak tergantung pada $x_o, x_1, \ldots x_{n-1}$.

(ii) Harga $P\ (X_{n+1} = x_{n+1}\ /\ X_n = x_n)$ disebut peluang peralihan satu langkah dari keadaan x_n pada langkah ke n menuju keadaan x_{n+1} pada langkah ke n+1.

(iii) Atau diketahui sistem pada saat sekarang, keadaan masa yang akan datang tidak tergantung pada masa lalu.

Contoh Soal :

Suatu distribusi bersama yang terdiri dari x_o, x_1, x_2 (dalam hal ini n = 2) Tentukan Probabilitas Transisi dari distribusi diatas $\{P[\ X_o = x_o\ ,\ X_1 = x_1$ dan $X_2 = x_2\ ]\}$

Penyelesaian :

Dengan menggunakan sifat Rantai Markov untuk menyelesaikan masalah ini yaitu :

$P(\ X_o = x_o\ , X_1 = x_1$ dan $X_2 = x_2\ ) = P(\ X_o = x_o$ dan $X_1 = x_1)$

$P(\ X_2 = x_2\ /\ X_o = x_o\ , X_1 = x_1)$

$= P(X_o = x_o)\ P(X_1 = x_1 / X_o = x_o)\ P(X_2 = x_2 / X_o = x_o \text{ dan } X_1 = x)$

Dengan sifat Markov maka :

$P(X_2 = x_2 / X_o = x_o \text{ dan } X_1 = x) = P(X_2 = x_2 / X_1 = x_1)$

sehingga

$= P(X_o = x_o)\ P(X_1 = x_1 / X_o = x_o)\ P(X_2 = x_2 / X_1 = x_i)$

Definisi 3.1.2

Probabilitass bersyarat $P(X_{n+1} = y / X_n = x)$ disebut sebagai probabilitas transisi dari keadaan x pada X_n ke keadaan y pada X_{n+1} dan diasumsikan bahwa probabilitas transisi tetap sepanjang masa.

Definisi 3.1.3

Probabilitas transisi $P(X_{n+1} = y / X_n = x)$ adalah probabilitas sistem yang bergerak dari keadaan x ke keadaan y dalam satu tingkatan atau satu interval dimana :

(i) $P(X_{n+1} = y / X_n = x) \geq 0$

(ii) $\sum_x P(X_{n+1} = y / X_n = x) = 1$

Contoh Soal :

Akan ditentukan bahwa probabilitas transisi selalu berharga positif dan jumlah totalnya adalah satu .

Penyelesaian :

Dari formula $P(X_{n+1} = y / X_n = x)$, dengan menggunakan definisi 2.1.2 1 yaitu bahwa :

$$P\,(X_{n+1}=y \,/\, X_n=x\,) = \frac{P(X_{n+1}=y\,).P(\,X_n=x\,)}{P(\,X_n=x\,)}$$

Dengan $P(X_n= x\,) \neq 0$

(i) $P\,(\,X_{n+1}= y \;/\; X_n= x\,) \geq 0$ dipenuhi.

(ii) $\sum_y P(x,y) = \sum_y P\,(X_1= y \,/\, X_0= x\,)$

$$= \sum_y \frac{P\,(X_1 = y\,.\,X_0 = x\,)}{P(X_0 = x\,)}$$

menghitung $P\,(X_0 = x\,)$ dulu .

Dari P(x,y) adalah Probabilitas bersyarat diskrit dimana dari formula

$P\,(X_1= y \,/\, X_0= x\,)$ maka

$$P\,(x\,) = \sum_y P\,(\,x,y\,) \quad \text{diskrit}$$

$$= \int_y P(x,y)\,dy \quad \text{kontinue}$$

$$P\,(y) = \sum_x P\,(\,x,y\,) \quad \text{diskrit}$$

$$= \int_x P(\,x,y\,)\,dx \quad \text{kontinue}$$

Sehingga :

$$\sum_y P(x,y) = \sum_y \frac{P\,(X_1= y\,.\,X_0= x\,)}{P(X_0 = x\,)}$$

$$= \frac{\sum_y P\,(X_1 = y\,.\,X_0 = x\,)}{\sum_y P\,(X =_1 y\,.\,X =_0 x\,)} = 1$$

Untuk suatu X_n, $n \geq 0$ mempunyai sifat Markov sehingga $X_n, n \geq 0$ merupakan Rantai Markov dimana $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ adalah peubah acak yang independen ke n.

3.2 Rantai Markov Dengan Dua State

Untuk memahami suatu Rantai Markov berikut ini gambaran atau ilustrasi sederhana mengenai Rantai Markov dengan dibatasi pada dua state. Kondisi sebuah mesin dalam suatu proses produksi mengalami kondisi baik dan pada suatu saat juga akan mengalami kondisi rusak. Diasumsikan bahwa :

1. Mesin mengalami kondisi rusak pada tahun ke n tetapi mesin dalam kondisi baik pada tahun ke n+1 dengan probabilitas p.
2. Mesin mengalami dalam kondisi baik pada tahun ke n tetapi mesin dalam kondisi rusak pada tahun ke n+1 dengan probabilitas q
3. Probabilitas $\Pi_o(0)$ adalah probabilitas dimana awal mesin mengalimi kondisi rusak pada tahun ke 0.

Penggambaran dapat dinotasikan sebagai berikut :

Kondisi 0 = kondisi dimana baahwa mesin itu dalam keadaan rusak.

Kondisi 1 = kondisi dimana bahwa mesin itu dalam keadaan baik.

Misalkan X_n adalah suatu peubah acak yang menunjukkan state dari mesin pada waktu n.Sehingga penggambaran diatas dapat diartikan sebagai berikut :

$$P (X_{n+1} = 1 / X_n = 0) = p$$

$$P (X_{n+1} = 0 / X_n = 1) = q$$

$$P (X_o = 0) = \Pi_o(0)$$

Dari tiga pernyataan diambil dua pernyataan yaitu :

$$P (X_{n+1} = 0 / X_n = 0) = 1-p$$

$$P (X_{n+1} = 1 / X_n = 1) = 1-q$$

Dan probabilitas awal mula mesin dalam kondisi baik yaitu

$$\Pi_o(1) = P (X_o = 1) = 1- \Pi(0)$$

Contoh Soal :

Akan dihitung Probabilitas bahwa mesin dalam kondisi baik pada tahun ke n+1 dan mesin dalam kondisi rusak pada tahun ke n+1 jika diketahui mesin dalam kondisi rusak pada tahun ke n dan mesin dalam kondisi baik pada tahun ke n dan tentukan Probabilitas awal mula mesin dalam kondisi baik dan mesin dalam kondisi rusak.

Penyelesaian :

1. Akan dihitung Probabilitas bahwa mesin dalam kondisi rusak pada tahun ke n+1 yaitu :

$$\begin{aligned} P (X_{n+1} = 0) &= P (X_n = 0 \text{ dan } X_{n+1} = 0) + P (X_n = 1 \text{ dan } X_{n+1} = 0). \\ &= P (X_n = 0)\, P (X_{n+1} = 0/X_n = 0) + P (X_n =1)\, P (X_{n+1} = 0/X_n = 1). \\ &= (1-p)\, P (X_n = 0) + q\, P (X_n =1) \\ &= (1-p)\, P (X_n = 0) + q\, (1- P (X_n = 0)). \end{aligned}$$

$$= (1-p-q)\ P\ (X_n = 0) + q$$

Untuk $n = 0$ maka

$$P\ (\ X_1 = 0\ ) = (1-p-q)\ P\ (X_o = 0) + q$$

dimana $P\ (X_o = 0) = \Pi_o(0)$ sehingga

$$P\ (\ X_1 = 0\ ) = (1-p-q)\ \Pi_o(0) + q$$

$$\begin{aligned} P\ (\ X_2 = 0\ ) &= (1-p-q)\ P\ (X_1 = 0) + q \\ &= (1-p-q)\ \{(1-p-q)\ \Pi_o(0) + q\ \} + q \\ &= (1-p-q)^2 \Pi_o(0) + q(1-p-q) + q \\ &= (1-p-q)\ \Pi_o(0) + q\ \{1 + (1-p-q)\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\ (\ X_3 = 0\ ) &= (1-p-q)\ P\ (X_2 = 0) + q \\ &= (1-p-q)\{(1-p-q)^2 \Pi_o(0) + q\{1+(1-p-q)\} + q \\ &= (1-p-q)^3 \Pi_o(0) + q\{1+(1-p-q)+(1-p-q)^2\ \} \end{aligned}$$

Untuk semua n maka berlaku

$$P\ (\ X_n = 0\ ) = (1-p-q)^n\ \Pi_o(0) + q \sum_{j=0}^{n-1} (1-p-q)^j.$$

Untuk $p = q = 0$ maka untuk semua n berlaku

$$P\ (\ X_n = 0\ ) = \Pi_o(0)$$

2. Sekarang akan dihitung probabilitas awal mula mesin dalam kondisi rusak ($\Pi_o(0)$)

   Dari formula :

$$\begin{aligned} P\ (\ X_n = 0\ ) &= (1-p-q)^n\ \Pi_o(0) + q \sum^{n-1} (1-p-q)^j \\ &= (1-p-q)^n\ \Pi_o(0) + q\{1+(1-p-q)+(1-p-q)^2 \ldots \\ &\quad \ldots (1-p-q)^{n-1}\ \} \qquad (***) \end{aligned}$$

akan dicari dulu jumlahan dari

$$\sum_{j=0}^{n-1} (1-p-q)^j = \{1+(1-p-q)+(1-p-q)^2....(1-p-q)^{n-1}\}$$

yang merupakan deret geometri

Jumlam deret geometri (s_n) = $\frac{1-r^n}{1-r}$

dimana r = (1-p-q) maka

$$\text{Jumlam deret geometri } (s_n) = \frac{1-(1-p-q)^n}{1-(1-p-q)}$$

$$= \frac{1-(1-p-q)^n}{p+q}$$

Jumlah deret geometri (s_n) dibstitusi ke (***) menjadi

$$P(X_n = 0) = (1-p-q)^n\, \Pi_o(0) + q\left\{\frac{1-(1-p-q)^n}{p+q}\right\}$$

$$= \frac{q}{p+q} + (1-p-q)^n \left\{\Pi_o(0) - \frac{q}{p+q}\right\}$$

Misalkan :

p dan q keduanya sama dengan nol (p=q=0) atau keduanya sama dengan satu (p=q=1) maka 0 < p+q < 2 atau | 1-p-q | < 1 .Maka untuk menghitung $\Pi_o(0)$dan $\Pi_o(1)$ dengan menggunakan pendekatan (lim n → ∞) sehingga :

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = 0)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{q}{p+q} + (1-p-q)^n\left\{\Pi_o(0) + \frac{q}{p+q}\right\}\right\}$$

$$= \frac{q}{p+q}$$

jika diambil n = 0 maka P $[X_o = 0] = \Pi_o(0)$ sehingga :

$$\Pi_o(0) = \frac{q}{p+q}$$

3. Akan dihitung probabilitas mesin dalam kondisi baik pada tahun ke n+1

$$P(X_{n+1} = 1) = P(X_n = 0 \text{ dan } X_{n+1} = 1) + P(X_n = 1 \text{ dan } X_{n+1} = 1).$$

$$= P(X_n = 0)\, P(X_{n+1} = 1/X_n = 0) + P(X_n = 1)\, P(X_{n+1} = 1/X_n = 1).$$

$$= (1-q)\, P(X_n = 0) + p\, P(X_n = 1)$$

$$= (1-p-q)\, P(X_n = 1) + p$$

$$P(X_1 = 1) = (1-p-q)\, P(X_o = 1) + p$$

dimana P $(X_o = 1) = \Pi_o(1)$ sehingga

$$P(X_1 = 1) = (1-p-q)\, \Pi_o(1) + p$$

$$P(X_2 = 1) = (1-p-q)\, P(X_1 = 1) + p$$

$$= (1-p-q)\, P(X_1 = 1) + p$$

$$= (1-p-q)\{(1-p-q)\, \Pi_o(1) + p\} + p$$

$$= (1-p-q)^2\, \Pi_o(1) + p\{1+(1-p-q)\}$$

$$P(X_3 = 0) = (1-p-q)\, P(X_2 = 1) + p$$

$$=(1-p-q)\{(1-p-q)^2\Pi_o(1) + p\{1+(1-p-q)\} + p$$

$$=(1-p-q)^3\Pi_o(1) + p\{1+(1-p-q)+(1-p-q)^2\}$$

Untuk semua n maka berlaku

$$P(X_n = 1) = (1-p-q)^n\, \Pi_o(1) + p\sum_{j=0}^{n-1} (1-p-q)^j$$

$$P(X_n = 1) = (1-p-q)^n \Pi_o(1) + p \frac{\{1-(1-p-q)^n\}}{p+q}$$

$$= \frac{p}{p+q} + (1-p-q)^n \left\{ \Pi_o(1) - \frac{p}{p+q} \right\}$$

4. Sekarang akan ditentukan probabilitas awal mula mesin dalam kondisi baik.

akan ditentukan dengan formula

$$P(X_n=1) = \frac{p}{p+q} + (1-p-q)^n \left\{\Pi_o(1) - \frac{p}{p+q}\right\}$$

Untuk suatu n yang besar menggunakan pendekatan(limit $n \to \infty$)

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n=1) = \frac{p}{p+q} + (1-p-q)^n \left\{\Pi_o(1) - \frac{p}{p+q}\right\}$$

$$= \frac{p}{p+q}$$

Untuk n = 0 maka $P(X_o) = \Pi_o(1)$, sehingga

$$\Pi_o(1) = \frac{p}{p+q}$$

3.3 Probabilitas Transisi Dan Distribusi Initial

Diberikan X_n, n ≥0 adalah suatu Rantai Markov yang mempunyai ruang bagian ψ (terbatas pada dua state) . Akan didefinisikan Fungsi Transisi dan Distibusi Initial sebagai berikut :

Definisi 3.3.1.

Fungsi P(x,y), $x \in \psi$ didefinisikan dengan

$P(x,y) = P(X_1=y/X_o=x)$ $x,y \in \psi$

disebut Fungsi Transisi dari Rantai Markov sedemikian sehingga :

i. $P(x,y) \geq 0$

ii. $\sum_y P(x,y) = 1$

Dari suatu X_n, $n \geq 0$ adalah Rantai Markov dengan probabilita transisi P(x,y) yang tetap yaitu :

$P(x,y) = P(X_{n+1} = y / X_n = x) \qquad n \geq 1$ .....(3.3.2)

Demikian juga untuk sifat Markovnya yaitu :

$P(X_{n+1} = y / X_o = x_o, X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n)$

$= P(X_{n+1} = y / X_n = x)$ mempunyai Fungsi Transisi p dan ditulis dengan

$P(X_{n+1} = y / X_n = x) = P(x,y)$ ....(3.3.3)

Definisi 3.3.2

Fungsi $\Pi_o(x)$, $x \in \psi$ didefinisikan dengan $\Pi_o(x) = P(X_o = x)$, $x \in \psi$ disebut Distribusi Initial dari Rantai Markov sedemikian sehingga berlaku :

1. $\Pi_o(x) \geq 0 \qquad , x \in \psi$ (3.3.4)
2. $\sum_x \Pi_o(x) = 1$ (3.3.5)

Contoh Soal 1 :

Distribusi bersama $x_o, x_1, x_2, \ldots, x_n$ akan ditentukan probabilitas transisi dalam syarat distribusi anitial. Dimana $\psi = \{0,1,\ldots,n\}$

Penyelesaian :

Untuk $\psi = \{0,1\}$ maka probabilitas transisinya adalah :

$P(X_o = x_o . X_1 = x_1) = P(X_o = x_o) P(X_1 = x_1 / X_o = x_o)$

dengan menggunakan *definisi 3.3.1 dan 3.3.2 maka :*

$$P\ (X_o = x_o . X_1 = x_1) = \Pi_o(x_o)\ P\ (x_o, x_1)$$

Untuk ψ = {0,1,2} maka probabilitas transisinya adalah :

$$P\ (X_o = x_o . X_1 = x_1 , X_2 = x_2)$$

$$= P\ (X_o = x_o)\ P\ (X_1 = x_1 / X_o = x_o)\ P\ (X_2 = x_2 / X_o = x_o . X_1 = x_1)$$

dengan menggunakan sifat markov maka menjadi :

$$= P\ (X_o = x_o)\ P\ (X_1 = x_1 / X_o = x_o)\ P\ (X_2 = x_2 / X_1 = x_1)$$

dengan mengikuti *definissi 3.3.1 dan 3.3.2 menjadi*

$$= \Pi_o(X_o)\ P\ (x_o, x_1)\ P\ (x_1, x_2)$$

untuk semua n maka berlaku :

$$P\ (x_o, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Pi_o(x_o)\ P\ (x_o, x_1) \ldots P\ (x_{n-1}, x_n)$$

Contoh Soal 2 :

Suatu Rantai Ehrrnfest . Misal ada dua buah box dan ada d bola yang diberi nama 1,2,3...d label atau nama. Pada mulanya beberapa bola berada pada box 1 dan sisanya pada box 2. Bola diseleksi secara random dari dan kemudian bola akan bergerak dari box 1 (box asal) ke baox 2 (box lawan). Seleksi ini dilakukan secara berulang-ulang untuk jangka waktu yang tak terbatas dengan seleksi yang independen dari percobaan ke percobaan. Misal X_n menunjukkan bola pada box 1 pada peercobaan ke-n maka X_n n ≥ 0 merupakan Rantai Markov dengan ψ = {1,,2,3,...,d}

Tunjukkan probabilitas transisi dari Rantai Markov ini.

Penyelesaian :

Misalkan jumlah seluruh bola ada d bola. Dan diimisalka jumlah bola dalam box 1 pada percobaan ke-n ada x bola($x < d$), dengan probabilitas x/d. Kemudian pada percobaan kea-n+1 bola akan bergerak dari box 1 ke box 2, sehingga pada percobaan ke-n+1 jumlah bola pada box 1 adalah X-1 dan jumlah bola pada box 2 ada X+1, sedangkan jumlah bola pada box 1 = X-1, dengan probabilitas bola pada box 2 $(d-x)/d$ lalu bola akan pindah ke box 1 dan berhenti . Dari penjelasan ini maka probabilitas transisinya adalah sebagai berikut :

Pada percobaan ke-n jumlah bola pada :

box 1 = x , $x \leq d$ dengan probabilitas $x/d \leq 1$

box 2 = d-x dengan probabilitas $(d-x)/d$

atau $(1-x/d) \geq 0$

≥ 0

karena $x/d \geq 1$ maka untuk $(1-x/d) \geq 0$ sehingga $x/d \geq 0$ jadi $0 \leq x/d \leq 1$. Sehingga probabilitas transisinya adalah

$$P(x,y) = \begin{cases} x/d & , y = x-1 \\ 1-x/d & , y = x+1 \\ 0 & , x,y \text{ yang lain} \end{cases}$$

dimana x = jumlah bola mula-mula ssebelum ada perpindahan

y = jumlah bola setelah ada perpindahan.

3.4 Perhitungan Dengan Fungsi transisi

Misalkan X_n, $n \geq 0$ suatu Rantai Markov dengan ruang bagian ψ dan fungsi transisi P. Akan diperlihatkan Probabilitas bersyarat yang bervariasi dalam syarat P dan akan didefinisikan n-langkah Fungsi Transisi dari Rantai

Lemma 3.4.1

Suatu probabilitas transisi bersyarat dari Variabel Random $x_o, x_1, \ldots, x_n$ yang didefinisikan m-langkah yang dinotasikan dengan :

$$P^m(x,y) = \sum_{y_1} \ldots \sum_{y_{m-1}} P(x,y_1)\, P(y_1,y_2) \ldots P(y_{m-1},y)$$

Untuk membuktikan lemma diatas diperlukan tiga (3) lemma diwah ini :

lemma 3.4.2

Suatu Ruang Probabilitas $(S,\lambda,P[.])$ dan diasumsikan bahwa λ tidak kosong (mempunyai himpunan anggota) Jika D_i disjoin dan $P(C/D_i)=p$ dan independen pada i maka berlaku :

$$P(C/\ U_i D_i) = p$$

Bukti :

Dari formula

$$P(C/\ U_i D_i) = \frac{P(C \cap U_i D_i)}{P(U_i D_i)}$$

$i = 1,2,3,\ldots,n$

karena D_i saling asing maka :

$$P(C/\ U_i D_i) = \frac{P(C \cap D_1)}{P(D_1)} + \frac{P(C \cap D_2)}{P(D_2)} + \ldots + \frac{P(C \cap D_n)}{P(D_n)}$$

$$\text{Dari } P(C/D_i) = \frac{P(C \cap D_i)}{P(D_i)}$$

$P(C \cap D_i) = P(C/D_i)\ P(D_i)$ maka untuk :

$$P\ (C\cap(D_1 U D_2 U \ldots U D_n) = p\ P(D_1 U D_2 U \ldots U D_n)$$

$$P((C\cap D_1)U(C\cap D_2)U\ldots U(C\cap D_n))=p\ \{P(D_1)+P(D_2)+\ldots+P(D_n)$$

karena disjoin maka :

$$P((C\cap D_1)+(C\cap D_2)+\ldots+[C\cap D_n))=p\ \{P[D_1]+P[D_2]+\ldots+P[D_n]\}$$

$$P\ (C/\ U_i D_i) = \frac{p\ \{P(D_1)+P(D_2)+\ldots+P(D_n)\}}{P\ (D\ )\ +\ P\ (D\ )\ +\ P\ (D\ )} = p$$

Lemma 3.4.3

Suatu Ruang Probabilitas (S,λ,P) dan diasumsikan bahwa λ punya himpunan anggota atau tidak kosang. Jika C_i disjoin maka berlaku :

$$P\ (U_i C_i/D) = \sum_i P(C_i/D)$$

Bukti :

$$P\ (U_i C_i/D) = \frac{P([U_i C_i]\cap D)}{P\ (D)}$$

$$= \frac{P\ ((C_1 U\ C_2 U\ \ldots\ U\ C_n)\cap D)}{P\ (D)}$$

$$= \frac{P((C_1\cap D)U(C_2\cap D)U\ldots U(C_n\cap D))}{P\ (D)}$$

karena C_i disjon akibatnya :

$$= \frac{P((C_1\cap D)+(C_2\cap D)+\ldots+(C_n\cap D))}{P\ (D)}$$

$$= \sum_i P\ (C_i/D)$$

Lemma 3.4.4

Suatu Ruang Probabilitas (S,λ,P) dan diasumsikan bahwa λ punya himpunan anggota atau tidak kosang. Jika E_i suatu himpunan dalam λ maka berlaku :

$$P\ (C/D) = \sum_i P\ (E_i\ /D)\ P\ (C/(E_i \cap D))$$

Bukti :

Dari formula

$$P\ (C/D) = \frac{P\ (C\cap D)}{P\ (D)} \qquad \text{dimana } D = (U_i E_i) \cap D$$

$$P\ (C\cap D) = P\ (C/D)\ P\ (D)$$

$$= P\ (C/D)\ P\ ((U_i E_i) \cap D\ )$$

$$= P\ (C/(U_i E_i)\cap D)\ P\ ((U_i E_i) \cap D\ )$$

maka untuk

$$P\ (C/D) = \frac{P\ (C/(U_i E_i)\cap D)\ P\ ((U_i E_i) \cap D\ )}{P\ (D\ )}$$

$$= \frac{P(D)\ P\ ((U_i E_i)/D)\ P\ (C/(U_i E_i)\cap D)}{P\ (D\ )}$$

$$= \quad P\ ((U_i E_i)/D)\ P\ (C/(U_i E_i)\cap D)$$

untuk $i = 1,2,\ldots,n$ maka

$$P(C./D)= P((E_1 U E_2 U \ldots U E_n)/D)\ P(C/(E_1 U E_2 U \ldots U E_n)\cap D)$$

$$= P((E_1/D U E_2/D U \ldots U E_n)\ P(C/(E_1\cap D)U\ldots U(E_n\cap D))$$

karena E_i disjoin akibatnya

$$=P((E_1/D)+P(E_2/D)+\ldots+P(E_n/D)\ P(C/(E_1\cap D))+P(E_2\cap D))$$
$$+\ldots+\ P(C/E_n\cap D)$$

$$= \sum_i P(E_i/D) \frac{P(C\cap\{(E_1\cap D)+\ldots+(E_n\cap D))}{P((E_i\cap D)+\ldots+(E_n\cap D))}$$

$$=\sum_i P(E_i/D)\frac{P(E\cap D)+\ldots+(E_n\cap D))\ P(C/\{(E_1\cap D)+\ldots+(E_n\cap D))}{P((E_1\cap D)+\ldots+(E_n\cap D))}$$

$$=\sum_i P(E_i/D]\ P[C/\{(E_1\cap D)+\ldots+(E_n\cap D))$$

$$=\sum_i P(E_i/D)\ \sum_i P\ (C/(E_i\cap D))$$

$$=\sum_i P(E_i/D)\ \cdot\ P\ (C/(E_i\cap D))$$

Sekarang akan dibuktikan lemma 3.4.1 dengan menggunakam tiga lemma diatas.Dari formula

$$P(X_{n+1}=x_{n+1},\ldots,X_{n+m}=x_{n+m}/\ X_o=x_o,\ldots,X_n=x_n)$$

$$P(X_n,X_{n+1}),\ldots,P(X_{n+m-1},X_{n+m})\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.4.1)$$

Dari ruas kiri *pers 3.4.1* bisa diubah menjadi

$$P(X_{n+1}=x_{n+1},\ldots,X_{n+m}=x_{n+m}\ /\ X_o=x_o,\ldots,X_n=x_n)$$

$$=\frac{P(X_{n+1}=x_{n+1},\ldots,X_{n+m}=x_{n+m}\cap X_o=x_o,\ldots,X_n=x_n)}{P(X_o=x_o,\ldots,X_n=x_n)}$$

karena variabel random x_1 ,x_2,..., x_n independen pada n

$$=\frac{P(X_{n+1}=x_{n+1},\ldots,X_{n+m}=x_{n+m})P(X_o=x_o,\ldots,X_n=x_n)}{P(X_o=x_o,\ldots,X_n=x_n)}$$

karena Probabilitas dari Variabel Random masing-masing mempunyai kesempatan yang sama maka berlaku pula :

$$=\frac{P(X_o=x_o,\ldots,X_n=x_n,\ X_{n+1}=x_{n+1},\ldots,X_{n+m}=x_{n+m})}{P(X_o=x_o,\ldots,X_n=x_n)}\quad *$$

Dari persamaan (3.3.5) bahwa :

$$P(X_o=x_o,\ldots,X_n=x_n) = \Pi_o(X_o)P(X_o,X_1),\ldots,P(X_{n-1},X_n)$$

sehingga * menjadi :

$$\frac{\Pi_o(X_o)P(X_o,X_1),\ldots,P(X_{n+m-1},X_{n+m})}{\Pi_o(X_o)P(X_o,X_1),\ldots,P(X_{n-1},X_n)} \qquad **$$

Reduksi sisi kanan *dari (3.4.1)* menjadi :

$$P(X_{n+1} = y_1 ,\ldots,X_{n+m} = y_m \;/\; X_o=x_o,\ldots,X_n=x_n)$$

$$= P(x_1,y\ ),\ldots,P(y_{m-1}\ ,y_m) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.4.2)$$

Dengan mengikuti lemma 3.4.2

Misal diambil $A_o,A_1,\ldots,A_{n-1}$ merupakan himpunana disjoin dana subset ψ maka *persamaan (3.4.2)* menjadi

$$P(X_{n+1} = y\ ,\ldots,X_n = y \;/\; X_1\in A_1,\ldots,X_{n-1}\in A_{n-1}\ X_n= x\ )$$

$$= P(x_1,y\ ),\ldots,P(y_{m-1}\ ,y_m) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.4.3)$$

Dengan lemma 3.4.3

Misal diambil $B_1,B_2,\ldots,B_m$ himpunan bagian yang disjoin dan subset ψ maka *persamaan (3.4.3)* menjadi :

$$P(X_{n+1}\in B_1,\ldots,X_{n+m}\in B_m \;/\; X_o\in A_o,\ldots,X_{n-1}\in A_{n-1} X_n= x\ )$$

$$= \sum_{y_1\in B_1} \ldots \sum_{y_m\in B_m} P(x_1,y\ ),\ldots,P(y_{m-1}\ ,y_m) \ \ldots\ldots(3.4.4)$$

Untuk m-langkah Fungsi Transisi P didefinisikan dengan $P^m(x,y)$ yaitu Probabilitas Transisi dari state y ke state y yaitu :

$$P^m\ (x,y) = \sum_{y_1\in B_1} \ldots \sum_{y_m\in B_m} P(x_1,y\ ),\ldots,P(y_{m-1}\ ,y_m)$$

(terbukti)

Sekarang akan diperlihatkan Fungsi Transisi pada m-langkah yang hanya terdiri dari dua (2) state.

Pandang formula :

$$\sum_{y_1 \in B_1} \cdots \sum_{y_m \in B_m} P(x_1, y\ ), \ldots, P(y_{m-1}\ , y_m)$$

untuk m $\geq$ 2 dengan P^1 (x,y) = P (x,,y) diberikan dengan :

$$P(x,y) = \begin{cases} 1 & x=y \\ 0 & x,y \text{ yang lain.} \end{cases}$$

Misal diambil $B_1 = B_2 = \ldots = \psi$ dan $B_m = \{y\}$ maka :

$$P\ (X_{n+m} = y\ /\ X_o \in A_o, \ldots, X_{n-1} \in A_{n-1}, X_n = x\ )\ \ldots\ldots(3.4.5)$$

Misal diambil $A_o = A_1 = \ldots = A_{n-1} = \psi$ maka :

$$P^m\ (x,y) = P\ (X_{n+m} = y\ /\ X_n = x\ )\ \ldots\ldots\ldots(3.4.6)$$

Untuk sembarang variabel random Z maka berlaku juga :

$$P^m\ (z,y) = P\ (X_{n+m} = y\ /\ X_o = x\ , X_n = z\ )\ \ .(3.4.7)$$

Dengan mengikuti *lemma 4.3.4* akan diperlihatkan Probabilitas Transisi pada n+m-langkah

$$P^{n+m}\ (x,y) = P\ (X_{n+m}=y\ /\ X_o=x)$$

$$= \sum_z P\ (X_n=z\ /\ X_o=x) P\ (X_{n+m}=y\ /\ X_o=x\ , X_n=z)$$

$$= \sum_z P^n\ (x,z)\ \ P\ (X_{n+m}=y\ /\ X_o=x\ , X_n=z)$$

$$= \sum_z P^n\ (x,z)\ \ P^m\ (z,y)\ \ \ldots\ldots\ldots\ldots(3.4\ 8)$$

Teorema 3.4.1

Suatu Ruang Probabilitas (S,λ,P)yang terbatas atau finite dan $x_1,x_2,\ldots,x_n$ variabel random independen yang gabungannya adalah S, $S = \bigcup_{i}^{n} X_i$, jika X adalah kejadian maka :

$$p(X) = \sum_{i=1}^{n} p(X_i)\, p(X / X_i)$$

Bukti :

$$X = X \cap S \quad \text{dimana } S = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$$

$$= X \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} X_i\right)$$

karena independen maka

$$= \bigcup_{i=1}^{n} (X \cap X_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (X \cap X_i)$$

$$p(X) = p\left[\sum_{i=1}^{n} (X \cap X_i)\right]$$

dengan definisi 2.2.1 maka

$$p(X \cap X_i) = p(X_i)\, p(X / X_i)$$

sehingga $p(X) = \sum_{i=1}^{n} p(X_i)\, p(X / X_i)$

Berdasarkan teorema 3.4.1 probabilitas transisi pada n-langkah untuk kejadian $X_n = y$ dalam syarat probabilitas initial Π_o yaitu :

$$P(X_n = y) = \sum_{x} P(X_o = x\ ,\ X_n = y\ )$$

$$= \sum_{x} P(X_o = x)\ P(X_n = y\ /\ X_o = x)$$

sesuai definisi 3.3.2 maka

$$= \sum_x \Pi_o P^n (x,y) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3.4.9)$$

$P(X_n=y)$ = Probabilitas kejadian pada $X_n = y$.

Dengan cara yang sama untuk kejadian $X_{n+1} = y$ juga berlaku :

$$P(X_{n+1}=y) = \sum_x P(X_n=x , X_{n+1}=y)$$

$$= \sum_x P(X_n=x) P(X_{n+1}=y / X_n=x)$$

$$= \sum_x P(X_n=x) P(x,y) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3.4.10)$$

$P(X_{n+1}=y)$ = Probabilitas kejadian pada $X_{n+1} = y$

Definisi 3.4.3

Notasi $P_x[.]$menunjukkan probabilitas dari berbagai kejadian didefinisikan menurut syarat Rantai Markov bermula dari x dan dinotasikan dengan $P_x(X_1 \neq a, X_2 \neq a, X_3 = a)$

Artinya bahwa probabilitas bahwa Rantai bermula dari x dalam state a pada langkah ke-3 bakan pada langkah ke-2 atau langkah ke-1.

Contoh Soal :

ψ adalah Ruang bagian dari Rantai dan misal diambil $A_o, A_2, \ldots, A_{n-1}$termuat dalam ψ maka Rantai Markov yang bermula dari x menuju y pada $B_1, B_2, \ldots, B_m$ adalah :

$$P(X_{n+1} \in B_1, \ldots, X_m \in B_m / X_o \in A_o, \ldots, X_{n-1} \in A_{n-1}, X_n=x)$$

$$= P_x(X_1 \in B_1, \ldots, X_m \in B_m) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3.4.11)$$

3.4.1 Matriks Transisi

Misal ψ Ruang Bagian berhingga (ψ = 1,2,...,n). Matriks Transisi P disajikan dalam d+1 baris dan d+1 kolom (ordo matriks d+1 X d+1)

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & \dots & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} P(0,0) & P(0,1) & \dots & P(0,d) \\ P(1,0) & P(1,1) & \dots & P(1,d) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P(d,0) & P(d,1) & \dots & P(d,d) \end{bmatrix} \end{array}.$$

Definisi 3.4.1.1

Matriks Transisi adalah suatu matriks yang jumlah semua elemen dalam baris sama dengan satu dan elemen-elemennya non negatif.

Sekarang akan diperlihatkan Matriks Transisi pada n-langkah yang akan diperjelas dengan menggunakan contoh dibawah ini

Contoh Soal :

Suatu Matriks Transisi dari Rantai Markov dari dua state ψ = {0,1}. Akan diperlihatkan Matriks Transisi pada n-langkah. Matriks Transisi disajikan dalam :

$$P = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix}$$

dengan p+g ≥ 1

Penyelesaian :

Dari formula $P^n(x,y) = P_x(X_n = y) \quad x,y \in \psi$

langkah 1

Mesin diasumsikan dalam kondisi rusak sehingga akan berlaku $\sum_x \Pi_o(x) = 1 \longrightarrow \Pi_o(0) + \Pi_o(1) = 1$

$$1 + \Pi_o(1) = 1$$

$$\Pi_o(1) = 0$$

dari persamaan 3.2.2 maka

$$P(X_n=0) = P^n(0,0)$$

$$P^n(0,0) = \frac{q}{p+q} + (1-p-q)^n \left\{ \Pi_o(0) - \frac{q}{p+q} \right\}$$

$$= \frac{q}{p+q} + (1-p-q)^n \left\{ 1 - \frac{q}{p+q} \right\}$$

$$= \frac{q}{p+q} + (1-p-q)^n \frac{p}{p+q}$$

$$P(X_n = 1) = P^n(0,1)$$

$$P(0,1) = \frac{p}{p+q} + (1-p-q)^n \left\{ \Pi_o(1) - \frac{q}{p+q} \right\}$$

$$= \frac{q}{p+q} + (1-p-q)^n \left\{ 0 - \frac{q}{p+q} \right\}$$

$$= \frac{q}{p+q} - (1-p-q)^n \frac{q}{p+q}$$

langkah 2

Mesin diasumsikan pada hari ini dalam kondisi baikmaka berlaku :

$\sum_x \Pi_o(1) = 1 \longrightarrow \Pi_o(0) + \Pi_o(1) = 1$

$$\Pi_o(0) + 1 = 1$$

$$\Pi_o(0) \qquad = 0$$

dari persamaan 3.2.3 maka

$$P(X_n=0) = \frac{p}{p+q} + (1-p-q)^n \left\{ \Pi_o(0) - \frac{p}{p+q} \right\}$$

$$P^n(1,0) = \frac{p}{p+q} + (1-p-q)^n \left\{ 0 - \frac{p}{p+q} \right\}$$

$$= \frac{p}{p+q} - (1-p-q)^n \frac{p}{p+q}$$

$$P^n(1,1) \quad \frac{p}{p+q} \quad (1-p-q)^n \left\{ \Pi_o(1) - \frac{p}{p+q} \right\}$$

$$= \frac{p}{p+q} + (1-p-q)^n \left\{ 1 - \frac{p}{p+q} \right\}$$

$$= \frac{p}{p+q} + (1-p-q)^n \frac{q}{p+q}$$

jadi :

$$P^n = \begin{bmatrix} P^n(0,0) & P^n(0,1) \\ P^n(1,0) & P^n(1,1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{q}{p+q} + p(1-p-q)^n & \frac{p}{p+q} - p(1-p-q)^n \\ \frac{q}{p+q} - q(1-p-q)^n & \frac{p}{p+q} + q(1-p-q)^n \end{bmatrix}$$

$$P^n = \frac{1}{p+q}\begin{bmatrix} q & p \\ q & p \end{bmatrix} + \frac{(1-p-q)}{p+q}\begin{bmatrix} q & -p \\ -q & p \end{bmatrix}$$

Jadi Matriks pada n-langkah juga merupakan Matriks Transisi.

Sekarang akan diperlihatkan bahwa $P^n = P^{(n-1)}P$

untuk n = 1 dengan p+q = 1 maka :

$$P^1 \quad \begin{bmatrix} q + p(1-p-q)^1 & p - p(1-p-q)^1 \\ q - q(1-p-q) & q + q(1-p-q) \end{bmatrix}$$

$$P^2 = P^1 . P^1$$

$$P^2 = \begin{bmatrix} q + p(1-p-q)^2 & p - p(1-p-q)^2 \\ q - q(1-p-q)^2 & q + q(1-p-q)^2 \end{bmatrix}$$

$$P^1 . P^1 = \begin{bmatrix} q + p(1-p-q)^1 & p - p(1-p-q)^1 \\ q - q(1-p-q)^1 & q + q(1-p-q)^1 \end{bmatrix} \quad X$$

$$\begin{bmatrix} q + p(1-p-q)^1 & p - p(1-p-q)^1 \\ q - q(1-p-q)^1 & q + q(1-p-q)^1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \begin{array}{l} q^2+2pq(1-p-q)+p^2(1-p-q) \\ \quad +pq-2pq(1-p-q) \\ \quad + pq(1-p-q)^2 \end{array} & \begin{array}{l} pq-pq(1-p-q)+p^2(1-p-q) \\ \quad +p^2-p^2(1-p-q)^2+pq(1-p-q) \\ \quad +p^2(1-p-q)+pq(1-p-q) \end{array} \\ \\ \begin{array}{l} q+{}^{2}pq+pq(1-p-q)\ -{}^{2}pq(1-p-q) \\ \quad -pq-q^2(1-p-q)^2 \\ \quad + pq(1-p-q)^2 \end{array} & \begin{array}{l} {}^{2}pq-2pq(1-p-q)+p^{\quad 2} \\ \quad +pq(1-p-q)^2+q^2(1-p-q)^2 \\ \quad +2pq(1-p-q) \end{array} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} q(p+q) + p(p+q)(1-p-q)^2 & p(p+q) - p(p+q)(1-p-q)^2 \\ q(p+q) - q(p+q)(1-p-q)^2 & p(p+q) + q(p+q)(1-p-q)^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} q + p(1-p-q)^2 & p - p(1-p-q)^2 \\ q - q(1-p-q)^2 & p + q(1-p-q)^2 \end{bmatrix}$$

jadi $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}^1.\mathbf{P}^1$

untuk n = 3 maka

$$\mathbf{P}^3 = \begin{bmatrix} q + p(1-p-q)^3 & p - p(1-p-q)^3 \\ q - q(1-p-q)^3 & p + q(1-p-q)^3 \end{bmatrix}$$

apakah $\mathbf{P}^3 = \mathbf{P}^1.\mathbf{P}^2$

$$\mathbf{P}^1.\mathbf{P}^2 = \begin{bmatrix} q + p(1-p-q)^1 & p - p(1-p-q)^1 \\ q - q(1-p-q)^1 & p + q(1-p-q)^1 \end{bmatrix} \quad \mathrm{X}$$

$$\begin{bmatrix} q + p(1-p-q)^2 & p - p(1-p-q)^2 \\ q - q(1-p-q)^2 & p + q(1-p-q)^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} q^2+pq(1-p-q)^2+pq(1-p-q) & pq-pq(1-p-q)^2+p^2(1-p-q) \\ p^2(1-p-q)^3+pq-pq(1-p-q)^2 & -p^2(1-p-q)^3+p^2+pq(1-p-q)^2 \\ -pq(1-p-q)+pq(1-p^2-q)^3 & -p^2(1-p-q)-pq(1-p-q)^3 \\ \\ q^2+pq(1-p-q)^2-q^2(1-p-q) & pq-pq(1-p-q)^2-pq(1-p-q) \\ -qp(1-p-q)^3+pq-pq(1-p-q)^2 & +pq(1-p-q)^3+q^2(1-p-q)^3 \\ +q^2(1-p-q)-q^2(1-p-q) & +p^2+pq(1-p-q)+pq(1-p-q)^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} q(p+q)+p(p+q)(1-p-q)^3 & p(p+q)-p(p+q)(1-p-q)^3 \\ q(p+q)-q(p+q)(1-p-q)^3 & p(p+q)+q(p+q)(1-p-q)^3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} q+p(1-p-q)^3 & p-p(1-p-q)^3 \\ q-q(1-p-q)^3 & p+q(1-p-q)^3 \end{bmatrix}$$

jadi $P^3 = P^1 . P^2$

Jadi untuk n-langkah berlaku $P^n = P^{(n-1)}P$ ....(3.4.1.1)

Dengan mengikuti *pers (3.4.9)* dan *pers (3.4.10)* akan ditentukan formula Π_n dan Π_{n+1}

dimulai *pers (3.4.9)*

$$P(X_n = y) = \sum_x \Pi_o(X)\, P^n(x,y)$$

$$P(X_1 = y) = (\Pi_o(0),\ldots,\Pi_o(d)) \begin{bmatrix} p(0,0) & \ldots & p(0,d) \\ p(1,0) & \ldots & p(1,d) \\ \vdots & & \vdots \\ p(d,0) & \ldots & p(d,d) \end{bmatrix}$$

dengan *pers 3.4.9 maka*

$P(X_1 = y) = \Pi_o\ \mathbf{P}$

$P(X_2 = y) = \sum_x \Pi_o\ (X)\ P^n(x,y)$

$$= P(X_1 = y) \begin{bmatrix} p(0,0) & \dots & p(0,d) \\ p(1,0) & \dots & p(1,d) \\ \vdots & & \vdots \\ p(d,0) & \dots & p(d,d) \end{bmatrix}$$

$= \Pi_o\ \mathbf{P}\ \mathbf{P} = \Pi_o\ \mathbf{P}^2$

induksi sampai n-langkah maka :

$P(X_n = y) = \sum_x \Pi_o\ (X)\ P^n(x,y)$

$= \Pi_o\ \mathbf{P}^n$

sesuai definisi 3.3.2 maka

$$P(X_n = y) = \Pi_n = \Pi_o\ \mathbf{P}^n \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots(3.4.1.2)$$

Untuk *persamaan (3.4.10)*

$P(X_{n+1} = y) = \sum_x P(X_n = x)\ P\ (x,y)$

$P(X_1 = y) = \sum_x P(X_o = x)\ P(x,y)$

$$= (P(X_o = 0),\dots,P(X_o = d)) \begin{bmatrix} p(0,0) & \dots & p(0,d) \\ p(1,0) & \dots & p(1,d) \\ \vdots & & \vdots \\ p(d,0) & \dots & p(d,d) \end{bmatrix}$$

sesuai pers 3.4.1.2 maka

$P(X_1 = y) \;=\; \Pi_0 \mathbf{P}$

$P(X_2 = y) \;=\; \sum_x P(X_1 = x)\, P(x,y)$

$$= (P(X_1 = 0), \ldots, P(X_1 = d)) \begin{bmatrix} p(0,0) & \ldots & p(0,d) \\ p(1,0) & \ldots & p(1,d) \\ \vdots & & \vdots \\ p(d,0) & \ldots & p(d,d) \end{bmatrix}$$

$$= \Pi_1 \mathbf{P}$$

induksi sampai n-langkah diperoleh

$P(X_{n+1} = y) = \Pi_n \mathbf{P}$

$\Pi_{n+1} \quad = \Pi_n \mathbf{P}$ ....(3.4.1.3)

3.4.2 Waktu Sampai

Misalkan A himpunan bagian termuat di ψ. Waktu sampai T_A dari A didefinisikan dengan :

$$T_A = \begin{cases} \min (n > 0 \;;\; X_n \in A \\ \infty \quad ;\; X_n \notin A \end{cases}$$

dimana T_A adalah waktu positif Rantai sampai di A. Waktu Sampai disini hanya terdiri dari satu titik saja, misal titik $a \in \psi$, selanjutnya Waktu Sampai dinotasikan dengan T_a

Lemma 3.4.2.1

Persamaan Waktu Sampai diberikan dengan :

$$P^n(x,y) = \sum_{m=1}^{n} P_x\,(T_y = m)\,P^{n-m}\,(y,y)\ ,\ n\geq 1 \quad \ldots(3.4.2.1)$$

Bukti :

Dari *persamaan (3.4.2.1)* bahwa kejadian $\{T_y=m,\ X_n=y\}$ $1\leq m\leq n$ adalah disjoin $\{\ X_n = y\ \} = \bigcup_{m=1}^{n}\{\ T_y = m,\ X_n = y\ \}$

$$P^n(x,y) = P_x\,(\ X_n = y\ )$$

$$= P_x\,(\ \bigcup_{m=1}^{n}\{\ T_y = m,\ X_n = y\ \}\ )$$

karena disjoin , *menurut definisi 2.1.1.2.(iii)* maka

$$= P_x\,(\ \sum_{m=1}^{n}\{\ T_y = m,\ X_n = y\ \}\ )$$

$$= \sum_{m=1}^{n} P_x\,\{\ T_y = m,\ X_n = y\ \}$$

$$= \sum_{m=1}^{n} P_x\,(\ T_y = m\ )\ P(X_n = y\ /\ X_o = x,\ T_y = m)$$

$$= \sum_{m=1}^{n} P_x\,(\ T_y = m\ )\ \frac{P(X_o = x,\ldots,X_n = y)}{P(X_o = x,\ldots,X_m = y)}$$

$$= \sum_{m=1}^{n} P_x\,(\ T_y = m\ )\ \frac{P^n\,(X,Y)}{P^m\,(X,Y)}$$

$$= \sum_{m=1}^{n} P_x\,(T_y = m)\ P^{n-m}\,(y,y)$$

terbukti.

Definisi 3.4.2.1

Suatu state $a \in \psi$ disebut state *absorbing* bila $P(a,a)=1$ atau $P(a,y) = 0$, untuk $y\neq a$.

Contoh Soal :

Tunjukkan jika a state absorbing maka

$P^n(x,a) = P_x(T_a \leq n)$, untuk $n \geq 1$

Penyelesaian :

Jika a state absorbing maka $P^{n-m}(a,a) = 1$, $1 \leq m \leq n$

Menuru lemma (3.4.2.1)

$$P^n(x,a) = \sum_{m=1}^{n} P_x(T_a = m)\, P^{n-m}(a,a), \quad n \geq 1 .$$

$$= \sum_{m=1}^{n} P_x(T_a = m)\, P^{n-m}(a,a)$$

$$= \sum_{m=1}^{n} P_x(T_a = m), \quad m \leq n$$

$$= \sum_{m=1}^{n} P_x(T_a \leq n)$$

terbukti.

3.5 State Rekuren Dan State Transien

Dalam sub bab ini akan dibahas tentang state Rekuren dan state Transien dari Rantai Markov dengan Fungsi Transisi P.

Definisi 3.5.1

Jika x state dalam Ruang Bagian ψ dan ρ_{xy} menunjukkan probabilitas Rantai Markov bermula dari state x menuju state y maka :

$$\rho_{xy} = P_x(T_y < \infty) \quad \ldots\ldots (3.5.1)$$

Jika y state dalam Ruang Bagian ψ dan ρ adalah probabilitas Rantai Markov bermula dari state y dan akan kembali ke y maka :

$\rho_{yy} = P_y\ (T_y < \infty)$ ....(3.5.2)

Definisi 3.5.2

State $y \in \psi$ disebut *Rekuren* jika $\rho_{yy} = 1$ dan disebut *Transien* jika $\rho_{yy} < 1$ dalam langkah tak hingga kali.

Jadi state *Absorbing* merupakan state *Rekuren*

Definisi 3.5.3

Misalkan fungsi Indikator untuk {Y} adalah :

$$I_y = \begin{cases} 1 & Z = Y \\ 0 & Z \neq Y \end{cases}$$

Misalkan N(y) adalah banyaknya kedatangan pada state y , n≥1 maka :

$$N(y) = \sum_{n=1}^{\infty} I_y\ (X_n) \quad \ldots\ldots(3.5.3)$$

Untuk kejadian N(y)≥1 sama dengan kejadian $T_y<\infty$ sehingga

$P_x\ (N(y)\geq 1) = P_x\ (T_y<\infty) = \rho_{xy}$ ....(3.5.4)

Misalkan ada m dan n bilangan bulat positif. Dengan menggunakan *pers(3.4.1.1)*, probabilitas Rantai Markov bermula dari x menuju y pada saat m dan terakhir menuju y pada n unit dari waktu selanjutnya adalah $P_x(T_y=m)P_y(T_y=n)$maka

$$\text{(i) } P_x(N(y)\geq 2) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} P_x(T_y=m)\ P_y(T_y=n)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} P_x(T_y=m) \sum_{n=1}^{\infty} P_y(T_y=n)$$

$$= \rho_{xy}\ \rho_{yy}$$

(ii) $P_x(N(y)\geq 2) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n=2}^{\infty} P_x(T_y=m)\ P_y(T_y=n)\ P_y(T_y=n)$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} P_x(T_y=m) \sum_{n=1}^{\infty} P_y(T_y=n) \sum_{n=1}^{\infty} P_y(T_y=n)$$

$$= \rho_{xy}\ \rho_{yy}\ \ \rho_{yy}$$

$$= \rho_{xy}\ \rho_{yy}^{2}$$

(iii) $P_x(N(y)\geq m) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \ldots \sum_{n=1}^{\infty} P_x(T_y=m)\ P_y(T_y=n) \ldots\ P_y(T_y=n)$

$$= \rho_{xy}\ \rho_{yy}^{m-1} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.5.5)$$

(iV) $P_x(N(y)=m) \ = \ P_x(N(y)\geq m) - P_x(N(y)\geq m+1)$

$$= \rho_{xy}\ \rho_{yy}^{m-1} - \rho_{xy}\ \rho_{yy}^{m}$$

$$= \rho_{xy}\ \rho_{yy}^{m-1}\ (1-\rho_{yy}) \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.5.6)$$

(V) $P_x(N(y)=0) \ = 1 - P_x(N(y)\geq 1)$

$$= 1 - \rho_{xy}$$

Definisi 3.5.3

Notasi $E_x(.)$adalah harga harapan (expektasi) Variabel Random dari Rantai Markov yang bermula dari x dan dirumuskan dengan $E(X) = \sum_{i} X_i P(x_i)$

Sebagai contoh :

i. $E_x\ (I_y(X_n)) = 0\ P_x(I_y(X_n=0)) + 1\ P_x(I_y(X_n=1))$

$$= 0\ P_x(I_y(X_n\neq y)) + 1\ P_x(I_y(X_n=y))$$

$$= P_x(I_y(X_n=y))$$

ii $E_x(N(y)) \ = E_x(\sum_{n=1}^{\infty} I_y\ (X_n)\ )$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} E_x \, I_y \, (X_n))$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P^n \, (x,y)$$

Untuk selanjutnya $E_x(N(y))$ dinotasikan dengan $G(X,Y)$.

Jadi $G(x,y) = E_x(N(y)) = \sum_{n=1}^{\infty} P^n \, (x,y)$ ....(3.5.7)

TEOREMA 3.5.1

i. Jika y state *Transien* dan $P_x \, (N(y))<\infty) = 1$ maka

$$G\,(x,y) = \frac{\rho_{xy}}{1-\rho_{yy}} \qquad x \in \psi$$

dengan $G\,(x,y)$ berhingga untuk semua $x \in \psi$

ii. Jika y state *Rekuren* $P_y\,(\,N(y))<\infty\,) = 1$ maka

$G\,(y,y) = \infty$

misal $P_x\,(N(y)) = \infty) = P_x\,(T_y < \infty) = \rho_{xy}$ $\quad x\in\psi$

Jika $\rho_{xy} = 0$ maka $G\,(x,y) = 0$. Jika $\rho_{xy} > 0$ maka $G(x,y) = \infty$.

Teorema 3.5.1. merupakan dasar untuk membedakan state *Transien* dan state *Rekuren*.

Bukti :

Y state *Transien*, $\rho_{yy}=0$ dan $P_y(N(\,y\,)<\infty) = 0$. Y state *Rekuren* , $\rho_{yy} = 1$ dan $P_y(N(y)<\infty) = 1$. Karena $0 \le \rho_{yy} \le 1$, maka :

$$P_x\,(N(y)=\infty) = \lim_{n\Rightarrow\infty} P_x\,(N(y)\ge m)$$

menurut pers (3.5.5)

$$= \lim_{n\Rightarrow\infty} \rho_{xy}\,\rho_{yy}^{m-1} = 0$$

Kedatangan rata-rata ke state y adalah

$$G\ (x,y) = E_x\ (N(y))$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} m\ P_x\ (N(y)=m)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} m\ \rho_{xy}\ \rho_{yy}^{m-1}\ (1 - \rho_{yy})$$

$$= \rho_{xy}\ (1 - \rho_{yy}) \sum_{m=1}^{\infty} m\ \rho_{yy}^{m-1}$$

substitusi ρ_{yy} = t maka

$$= \rho_{xy}\ (1 - t) \sum_{m=1}^{\infty} m\ t^{m-1}$$

$$= \rho_{xy}\ (1 - t)\ \frac{1}{(1-t)^2}$$

$$= \frac{\rho_{xy}}{(1-t)} = \frac{\rho_{xy}}{(1-\rho_{yy})}$$

Akan diperlihatkan bahwa $P_y(N(y)=\infty)=1$ dan $G(y,y)=\infty$. Dari *teorema 3.5.1.(ii)*, $\rho_{yy}=1$ maka $P_y(N(y)=\infty)=1$ dan $P_x(N(y)=\infty)=1$ Selanjutnya menentukan G(y,y) dengan *teorema 3.5.1.(i) yaitu :*

$$G(y,y) = \frac{\rho_{xy}}{(1-\rho_{yy})}$$

y state *Rekuren* maka $\rho_{yy}= 1$, maka :

$$G(y,y) = \frac{\rho_{xy}}{(1 - 1)} = \infty$$

Jika $\rho_{xy}=0$, maka $P_x(T_y=m)=0$untuk semua bilangan bulat positif m, dengan *pers (3.4.2.1)* maka $p^n(x,y)=0$, $n\geq 1$ maka $G(x,y)=0$.Jika $\rho_{xy}>0$ maka $P_x(N(y0=\infty)$ = $\rho_{xy}>0$, sehingga

$G(x,y) = \infty$.

Terbukti.

lemma 3.5.1

Jika y state *Transien* dan $\sum_{n=1}^{\infty} P(x,y)^n = G(x,y) < \infty, \quad x\in\psi$

maka $\lim_{n\to\infty} P^n(x,y) = 0 \quad , \quad x\in\psi$ ....(3.5.8).

Bukti :

Andaikan $\sum_{y\in\psi} \lim_{n\to\infty} P^n(x,y) = 1$. Dari formula

$$\sum_{y\in\psi} \lim_{n\to\infty} P^n(x,y) = \lim_{n\to\infty} \sum_{y\in\psi} P^n(x,y)$$

$$= \lim_{n\to\infty} P_x(X_n=y) = \lim_{n\to\infty} P_x(X_n\in\psi)$$

karena y state *Transien* maka $P_x(X_n\in\psi) = 0$, maka

$$= \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

Kontradiksi. jadi yang benar $\lim_{n\to\infty} P^n(x,y) = 0$.

Terbukti.

Definisi 3.5.4

Rantai Markov disebut *Transien* jika semua state *Transien* dan disebut *Rekuren* jika semua state *Rekuren*. Misalkan x dan y dua state yang berbeda . x dikatakan menuju y jika $\rho_{xy}>0$ atau $P^n(x,y)>0$, $\forall n$

Teorema 3.5.2

Jika x state *Rekuren* dan x menuju y maka y state *Rekuren* dan $\rho_{xy} = \rho_{yy}$.

Bukti :

Diasumsikan $x \neq y$ (untuk $x=y$ tidak ada yang perlu dibuktikan). Oleh karena $P_x(T_y<\infty) = \rho_{xy} > 0$, maka $P_x(T_y=n)>0$, $\forall n$. Misalkan n_o bilangan bulat positif terkecil yang memenuhi $P_x(T_y=n)>0$ dan n_o didefiniskan dengan :

$n_o = \min \{ n\geq 0,\ P_x(T_y=n)>0 \}$ ....(3.5.9)

Dengan *pers (3.5.9)* dan *(3.4.2.1)* maka $P^{n_o}(x,y)>0$, dan $P^m(x,y)=0$, sehingga $P_x(T_y=m)=0$, $1\leq m\leq n_o$. ....(3.5.10).

Oleh karena $P^{n_o}(x,y)>0$ maka dapat ditemukan $y_1, y_2, ..y_{n-1}$ sedemikian sehingga :

$P_x(X_1 = y_1, \ ...\ X_{n-1} = y,\ X_n = y)$

$= P(x,y_1), \ ...\ P(y_{n-1},y) > 0.$

Dimana state $y_1, y_2, ..y_{n_o-1}$ tidak ada yang sama dengan x atau y sebab jika ada maka kontradiksi dengan pers (3.5.10)

Akan diperlihatkan $\rho_{xy}=1$. Misalkan $\rho_{xy}\neq 1$ maka Rantai bermula dari y menuju ke x dengan probabilitas $(1-\rho_{yy})$. Sehingga Rantai bermula dari x menuju y adalah :

$P(x,y_1), \ ...\ P(y_{n_o-1},y)(1-\rho_{yy})$.

Jadi Rantai bermula dari x menuju $y_1, y_2, ..y_{n-1}, y_o$ pada n_o waktu pertama, dan tidak pernah kembali ke x setelah n_o unit. Jika terjadi untuk $n\geq 1$ Rantai tidak kembali ke y maka kontradiksi bahwa x state *Rekuren*. Yang benar $\rho_{xy}=1$. Karena $\rho_{xy}=1$ maka ada n_1 bilangan bulat positif sedemikia sehingga $P^{n_1}(y,x)>0$ dan

$P^{n_1+n+n_o}(y,y) = P_y(X_{n_1+n+n_o} = y)$

$$\geq P_y(X_{n_1}=x,\ X_{n_1+n}=x,\ X_{n_1+n+n_0}=y)$$

$$= P^{n_1}(y,x)\ P^{n_0}(x,y)\ P^n(x,x)$$

sehingga kedatangan rata-rata pada state y adalah :

$$G(y,y) \geq \sum_{n=n_1+n+n_0}^{\infty} P^n(Y,Y).$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P^{n_1+n+n_0}(Y,Y).$$

$$= P^{n_1}(y,x)\ P^{n_0}(x,y) \sum_{n=1}^{\infty} P^n(x,x)$$

menurut teorema 3.5.1 maka

$$= P^{n_1}(y,x)\ P^{n_0}(x,y)\ \infty\ = +\infty$$

karena $G(y,y) = \infty$ maka y state *Rekuren*, sehingga y menuju x maka $\rho_{xy}=1$.

Terbukti.

Definisi 3.5.5

Himpunan C disebut *tertutup* jika tidak ada state dalam C yang menuju state diluar C atau $\rho_{xy}=0$, $x\in C$ dan $y\notin C$.

Definisi 3.5.6

Himpunan tertutup C disebut *Irreducibel* jika x menuju y untuk semua $x.y\in C$.

Akibat 3.5.1

Misalkan C himpunan tertutup *Irreducibel* dari state *Rekuren* maka $\rho_{xy}=1$, $P_x(N(y)=\infty)=1$ dan $G(x,y)=\infty$, $x,y\in C$.

Jadi untuk state *Rekuren Irreducibel* mencapai state yang lain tak berhingga kali dengan probabilitas satu.

Teorema 3.5.3

Jika C himpunan berhingga *tertutup Irreducibel* maka setiap state dalam C adalah *Rekuren.*

Bukti :

Rantai Markov dengan state berhingga maka paling sedikit mempunyai satu state *rekuren.* Jadi untuk C himpunan *tertutup Irreducibel* maka setiap state dalam C *Rekuren.* Terbukti.

Definisi 3.5.7

Misalkan C himpunan *tertutup Irreducibel* dengan state *Rekuren* maka probabilitas terabsorbi dalam C adalah :

$$\rho_{xy} = \rho_C(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in C \\ 0 & , \quad x \notin C \\ \sum_{y \in C} P(x,y) + \sum_{y \in S_T} P(x,y)\rho_C(y), & x \in S_T \end{cases}$$