BAB II
PROBABILITAS

2.1 Probabilitas Bersyarat Dari Variabel Random Independen

Dalam membahas probabilitas dan variabel random (peubah acak) tidak bisa lepas dari Ruang Probabilitas, kejadian (event) dan Ruang Kejadian (Ruang Event). Berikut definisi dan theorema yang menunjang dalam bab ini.

Definisi 2.1.1.1

Ruang Sampel (S) merupakan kumpulan peristiwa yang mungkin terjadi, suatu Ruang Event dinotasikan dengan λ adalah merupakan himpunan dengan anggota-anggotanya semua event (peristiwa) yang mungkin dari suatu eksperimen.

Ruang Sampel dan Ruang Kejadian akan disajikan dalam suatu Ruang Probabilitas $(S, \lambda, P[.])$.

Definisi 2.1.1.2

Suatu fungsi Probabilitas P[.] adalah merupakan suatu fungsi hmpunan dengan Ruang Event sebagai domain (daerah asal) dan kodomainnya (daerah hasil) adalah [0,1] yang memenuhi aksioma-aksioma sebagai berikut :

(i) $P(A) >= 0$; $\forall A \in \lambda$

(ii) $P(S) = 1$

(iii) Jika $A_1, A_2, \ldots\ldots\ldots$ barisan peristiwa yang saling asing dalam λ maka

$A_i \cap A_j = \emptyset$ $i = 1,2,\ldots\ldots$

$j = 1,2,\ldots\ldots$

$P(A_i \cap A_j) = 0$

Jika $A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots\ldots\ldots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \lambda$

maka

$$P\left[\bigcup_{i=0}^{\infty} A\right] = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

(merupakan penjumlahan aljabar)

P(A) dibaca probabilitas peristiwa A.

Contoh soal :

Kesempatan untuk bisa membaca pada suatu perpustakaan dari setiap individu di asumsikan sama. Dimisalkan ada n individu pada saat yang sama dan ingin membaca buku yang sama pula, dinotasikan dengan $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Berapa Probabilitas bahwa buku bisa dibaca oleh x_1 atau x_2 atau ... atau x_n.

Penyelesaian :

S = n individu yang ingin membaca pada suatu perpustakaan.

λ = Dari n pembaca akan membaca satu buku yang sama.

Hitung $P(x_1 \cup x_2 \cup x_3 \cup \ldots \cup x_n)$

Jawab :

$s = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

masing-masing individu mempunyai kesempatan yang sama maka :

$P(x_1) = 1/n$

$P(x_2) = 1/n$

$P(x_3)$

$\vdots$

$P(x_4) = 1/n$

.

.

.

$P(x_n) = 1/n$

$$P(x_1 \cup x_2 \cup \ldots \cup x_n) = \sum_{i=1}^{\infty} P(x_i)$$

$i = 1,2,3,\ldots n$

$P(s) = 1/n + 1/n + \ldots + 1/n$

$= n/n$

$P(S) = 1$

Definisi 2.1.1.3

Peristiwa A dan B adalah saling asing (independen) jika hanya jika $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

Dalil 2.1.1.1

Jika A dan B peristiwa yang saling asing dan masing-masing probabilitas tidak sama dengan nol ($P(A) \neq 0$ dan $P(B) \neq 0$) maka $A \cap B \neq 0$

Bukti :

Andaikan $A \cap B = \emptyset$

maka $P(A \cap B) = 0$ Karena $P(A) \neq 0$ dan $P(B) \neq 0$ maka $P[A].P[B] \neq 0$ sehingga $P(A \cap B) \neq 0$. terjadi kontradiksi dengan pengandaian, sehingga pengandaian salah dan yang benar adalah bahwa $A \cap B \neq 0$ maka $P(A \cap B) \neq 0$

Contoh Soal :

Ada dua (2) buah laci yang masing-masing berisi bola yang berbeda. Masing-masing laci saling asing.Akan diadakan pengambilan bola secara random dari dua laci tersebut.Yang ditanyakan berapa prtobabilitas bahwa bola yang terambil dari laci1 dan laci2

Penyelesaian :

S = dua (2) buah laci yang masing-masing berisi bola yang berbeda.{misal laci1 = L_1 dan laci2 = L_2 }

$\mathcal{A} = \{L_1, L_2\}$

Hitung $P(L_1 \cap L_2)$

Jawab :

$P(L_1) = 1/2$

$P(L_2) = 1/2$

Maka

$P(L_1 \cap L_2) = P(L_1) \cdot P(L_2)$

$P(L_1 \cap L_2) = 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$

2.1.2 Probabilitas bersyarat yang independen

Dalam suatu ruang probabilitas $(S, \lambda, P[.])$ kejaadian A terjadi dengan probabilitas P(A). Adakalanya diketahui probabilitas peristiwa A bila B telah terjadi, yang dinotasikan P (A/B) dibaca probabilitas A disyaratkan B atau probabilitas terjadinya A bila B telah terjadi

Definisi 2.1.2.1

Probabilitas bersyarat peristiwa A bila peristiwa B diketahui dinotasikan dengan P(A/B) dan disajikan dengan :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A \cap B) = P(B).P(A/B)$$

Contoh Soal :

Dalam suatu kotak berisi 15 bola yang terdiri dari 6 merah dan 9 putih. Bola diambil satu pada pengambilan pertama dan dilihat warnanya kemudian tidak dikembalikan. pengambilan kedua bola juga diambil satu .
Bila pengambilan kedua putih (p) berapa probabilitas pengambilan pertama merah (m) atau P(Im/IIp).

Penyelesaian :

$$P(Im/IIp) = \frac{P(Im \cap IIp)}{P(IIp)}$$

$$= \frac{P(Im).P(IIp/Im)}{P(Im \cap IIp) + P(Ip \cap IIp)}$$

$$= \frac{P(Im).P(IIp/Im)}{P(Im).P(IIp/Im) + P(Ip).P(IIp/Ip)}$$

$$= \frac{6/15\ .9/14}{6/15.9/14\ +\ 9/15.8/14}$$

$$= 0{,}428$$

Definisi 2.1.2.2

Suatu peristiwa yang independen dalam ruang probalitas $(S,\lambda,P[.])$. Misal A dan B adalah dua peristiwa yang independen dalam A dan memenuhi :

(i) $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

(ii) $P(A/B) = P(A)$ jika $P(B) > 0$

(iii) $P(B/A) = P(B)$ jika $P(A) > 0$

Bukti :

(i) $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

(sudah ada didepan)

(ii) $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

karena A dan B independen maka

$$= \frac{P(A).P(B)}{P(B)} = P(A) \qquad ; P(B) \neq 0$$

(iii) $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

karena A dan B independan maka

$$= \frac{P(A).P(B)}{P(A)} = P(B) \qquad ; P(A) \neq 0$$

Contoh soal :

Suatu himpunan S = { 1,2,3,4...,12 } kejadian yang mungkin dari ruang sampel S adalah

A = { w/w adalah kelipatan 3 }

B = { W/W adalah kelipatan 2 }

Berapa probabilitas bahwa kejadian A terjadi bila kejadian B diketahui.

Penyelesaian :

$A = \{ 3,6,9,12 \}$

$B = \{ 2,4,6,8,10,12 \}$

Hitung P(A/B)

Jawab :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$\{A \cap B\} = \{6.12\}$; $P(A \cap B) = 2/12$

$P(B) = 6/12$; $P(\grave{A}) = 4/12$

$$P(A/B) = \frac{2/12}{6/12} = 4/12$$

jadi $P(A/B) = P(A) = 4/12$

2.1.3 Variabel Random Independen

Suatu variabel random akan didefinisikan pada suatu Ruang Probabilitas ($S,\lambda,P[.]$) sebagai berikut :

Definisi 2.1.3.1

Jika nilai yang mungkin dari suatu variabel random yang berhingga (finite) atau tak berhingga tapi terbilang disebut sebagai variabel random diskrit, dan memenuhi :

(i) $0 \leq P(X) \leq 1$

(ii) $\sum_i P(X_i) = 1$

Contoh Soal :

Ruang sampel S terdiri dari $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. yang saling asing (independen). Akan ditentukan probabilitas dari semua kejadian , masing-masing kejadian mempunyai kesempatan yang sama (seimbang).

Penyelesaian :

$S = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$

Akan ditentukan $P(x_1 \cup x_2 \cup \ldots \cup x_n)$

Jawab

$P(x_1) = 1/n$

$P(x_2) = 1/n$

$\vdots$

$P(x_n) = 1/n$

$$P(x_1 \cup x_2 \cup \ldots \cup x_n) = \sum_{i=1}^{n} P(x_i)$$

$$= P(x_1) + P(x_2) + \ldots + P(x_n)$$

$$= 1/n + 1/n + 1/n + \ldots + 1/n$$

$$= n \,.1/n = 1$$