BAB II

MATERI PENUNJANG

2.1. Aljabar Boole

Aljabar Boole yang digunakan disini seperti yang diberikan oleh Huntington pada tahun 1904.

2.1.1. Pengenalan dan Pengertian Aljabar Boole

Oleh Huntington pengertian aljabar Boole didefinisikan melalui *postulat-postulat* sebagai berikut :

P1. Terdapat suatu himpunan B dari elemen-elemen suatu aljabar Boole, jika merupakan hubungan equivalensi akan dinotasikan "=" yang mana memenuhi prinsip-prinsip substitusi. Ini berarti jika a = b maka a boleh diganti dengan b.

P2a. Simbol "+" didefinisikan sedemikian sehingga a + b di dalam K dimana a dan b di B.

P2b. Simbol "." didefinisikan sedemikian sehingga a.b (boleh ab) di dalam B dimana a dan b di B.

P3a. Terdapat sebuah elemen 0 di B sedemikian sehingga untuk setiap a di B, a + 0 = a dan a.0 = 0.

P3b. Terdapat sebuah elemen 1 di B sedemikian sehingga untuk setiap a di B, a.1 = a dan a + 1 = 1

P4a. a+b = b+a

P4b. a.b = b.a

$\left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\}$ Hukum komutatif

P5a. $a + (b . c) = (a + b).(a + c)$
P5b. $a.(b + c) = (a . b) + (a . c)$ } Hukum distributif

P6. Untuk setiap elemen a di B terdapat sebuah elemen $\bar{a}$ sedemikian sehingga

$$a . \bar{a} = 0$$
dan
$$a + \bar{a} = 1$$

P7. Terdapat sedikitnya 2 elemen x dan y di B sedemikian sehingga $x \neq y$

P8. Untuk 3 elemen a,b,dan c di B, berlaku

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$
dan
$$a . (b . c) = (a . b) . c$$

Definisi 2.1.1.1

Aljabar Boolean berisi hanya 2 elemen,yaitu 1 dan 0 dimana $\bar{1} = 0$ dan $\bar{0} = 1$

Contoh 2.1.1.1

$1 . 1 = 1$	(P3b)	$1 + 1 = 1$	(P3a)
$0 . 0 = 0$	(P3b)	$1 + 0 = 1$	(P6)
$1 . 0 = 0$	(P6)	$0 + 1 = 1$	(P6)
$0 . 1 = 0$	(P6)	$0 + 0 = 0$	(P3a)

Contoh 2.1.1.2. P3b.

Jika $a = 1$, maka $a . 1 = 1 . 1 = 1$

Jika $a = 0$, maka $a . 1 = 0 . 1 = 0$

Dari P4, a diganti dengan harga 1 dan 0.

Ambil $a = 1$

$$a . \bar{a} = 1 . \bar{1} = 1 . 0 = 0$$

$$a + \bar{a} = 1 + \bar{1} = 1 + 0 = 1$$

Ambil $a = 0$

$$a \cdot \bar{a} = 0 \cdot \bar{0} = 0 \cdot 1 = 0$$

$$a + \bar{a} = 0 + \bar{0} = 0 + 1 = 1$$

2.1.2. Fungsi Kebenaran Kalkulus sebagai Aljabar Boolean

Terdapat korespondensi 1 - 1 diantara fungsi kebenaran kalkulus dengan aljabar Boolean, seperti tabel berikut :

Kebenaran Kalkulus		Aljabar Boolean
$\wedge$	<——>	.
$\vee$	<——>	+
F	<——>	0
T	<——>	1
$\bar{A}$	<——>	$\bar{A}$

Tabel 2.1.2.1

AB		ab	$A \wedge B$		a . b	$A \vee B$		a + b
FF	——>	00	F	——>	0	F	——>	0
FT	——>	01	F	——>	0	T	——>	1
TF	——>	10	F	——>	0	T	——>	1
TT	——>	11	T	——>	1	T	——>	1

Tabel 2.1.2.2

Dari Tabel 2.1.2.1 "." dinamakan sebagai AND sedangkan "+" sering disebut OR.

2.1.3. Duality

Oleh Huntington, postulat-postulat yang telah disajikan dibuat secara berpasangan. Dalam setiap kasus, duality ini dapat digunakan untuk mengganti sistem rangkaian dengan rangkaian yang lain melalui penggantian simbol logikanya. Jadi, cara duality disini hanya mengggantí/mengubah simbol 0 menjadi 1 dan "+" menjadi"." atau sebaliknya.

<u>Contoh 2.1.3.1</u> :

$$\begin{array}{lccccc} & a & + & 0 & = & a \\ & & \downarrow & \downarrow & & \\ \text{menjadi} & a & . & 1 & = & a \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccccccccccccc} & a & + & (b & . & c) & = & (a & + & b) & . & (a & + & c) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \text{menjadi} & a & . & (b & + & c) & = & (a & . & b) & + & (a & . & c) \end{array}$$

2.1.4. Theorema Dasar dari Aljabar Boolean

<u>Theorema 2.1.4.1</u>

Dalam suatu aljabar Boole, 0 dan 1 adalah elemen tunggal.

<u>Bukti</u> :

Diasumsikan bahwa terdapat 2 nol, 0_1 dan 0_2. Untuk setiap elemen a_1 dan a_2 di B didapatkan

$$a_1 + 0_1 = a_1 \quad \text{dan} \quad a_2 + 0_2 = a_2$$

Ambil $a_1 = 0_2$ dan $a_2 = 0_1$. menghasilkan (P3a)

$$0_2 + 0_1 = 0_2 \text{ dan } 0_1 + 0_2 = 0_1$$

Jadi, dengan menggunakan Hukum komutatif yang pertama (P4a), didapat :

$$0_1 = 0_2$$

Contoh dengan dualitas :

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & + & 0_1 & = & a_1 \\ & \downarrow & \downarrow & & \\ a_1 & . & 1_1 & = & a_1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} a_2 & + & 0_2 & = & a_2 \\ & \downarrow & \downarrow & & \\ a_2 & . & 1_2 & = & a_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} 0_2 & + & 0_1 & = & 0_2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ 1_2 & . & 1_1 & = & 1_2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 0_1 & + & 0_2 & = & 0_1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ 1_1 & . & 1_2 & = & 1_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 0_1 & = & 0_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 1_1 & = & 1_2 \end{array}$$

<u>Theorema 2.1.4.2</u>

Untuk setiap elemen a di B, $a + a = a$ dan $a \cdot a = a$.

<u>Bukti</u> :

$$\begin{aligned} a + a &= (a + a).1 && \text{(P3b)} \\ &= (a + a).(a + \bar{a}) && \text{(P6)} \\ &= a + a\bar{a} && \text{(P5a)} \\ &= a + 0 && \text{(P6)} \\ a + a &= a && \text{(P3a)} \\ a \cdot a &= a && \text{(Dualitas)} \end{aligned}$$

Keterangan : $a \cdot a$ cukup ditulis aa

<u>Theorema 2.1.4.3</u>

Untuk setiap a di B, $a + 1 = 1$ dan $a \cdot 0 = 0$

<u>Bukti</u>

$$\begin{aligned} a + 1 &= 1.(a + 1) && \text{(P3b)} \\ &= (a + \bar{a})(a + 1) && \text{(P6)} \\ &= a + \bar{a} \cdot 1 && \text{(P5a)} \\ &= a + \bar{a} && \text{(P3b)} \\ a + 1 &= 1 && \text{(P6)} \\ a \cdot 0 &= 0 && \text{(Dualitas)} \end{aligned}$$

<u>Theorema 2.1.4.4</u>

Elemen-elemen 1 dan 0 adalah berbeda dan $\bar{1} = 0$

<u>Bukti</u>

Ambil a dari beberapa elemen di B

$$a \cdot 1 = a \qquad \text{(P3b)}$$

$a \cdot 0 = 0$ (Th. 2.1.4.3)

$\bar{1} = \bar{1} \cdot 1$ (P3b)

$\bar{1} = 0$ (P6)

<u>Theorema 2.1.4.5</u>

Untuk setiap pasang elemen a dan b di B, $a + ab = a$ dan $a(a + b) = a$.

<u>Bukti</u>

$$\begin{aligned} a + ab &= a.1 + ab && \text{(P3b)} \\ &= a(1 + b) && \text{(P5b)} \\ &= a \cdot 1 && \text{(Th. 2.1.4.3)} \\ &= a && \text{(P3b)} \end{aligned}$$

$$a\,(a + b) = a \qquad \text{(Duality)}$$

<u>Theorema 2.1.4.6</u>

$\bar{a}$ pada P6 untuk setiap a di B adalah tunggal.

<u>Bukti</u>

Diasumsikan $\bar{a}_1$ dan $\bar{a}_2$ adalah 2 elemen yang berbeda.

$a + \bar{a}_1 = 1$, $a + \bar{a}_2 = 1$, $a\bar{a}_1 = 0$, $a\bar{a}_2 = 0$

$$\begin{aligned} \bar{a}_2 &= 1 \cdot \bar{a}_2 && \text{(P3b)} \\ &= (a + \bar{a}_1)\,\bar{a}_2 && \text{(asumsi)} \\ &= a\bar{a}_2 + \bar{a}_1\bar{a}_2 && \text{(P5b)} \\ &= 0 + \bar{a}_1\bar{a}_2 && \text{(asumsi)} \\ &= a\bar{a}_1 + \bar{a}_1\bar{a}_2 && \text{(asumsi)} \\ &= (a + \bar{a}_2) .\, \bar{a}_1 && \text{(P5b)} \\ &= 1.\bar{a}_1 && \text{(asumsi)} \\ &= \bar{a}_1 && \text{(P3b)} \end{aligned}$$

<u>Theorema 2.1.4.7</u>

Untuk setiap elemen a di B, $a = \bar{\bar{a}}$

<u>Bukti</u>

Ambil $\bar{\bar{a}} = x$, maka

$\bar{a}x = 0$ dan $\bar{a} + x = 1$ (P6)

tetapi $\bar{a}a = 0$ dan $\bar{a} + a = 1$ (P6)

Jadi, x dan a memenuhi P6 sebagai komplemen dari $\bar{a}$.

Untuk $\bar{a} . a = 0$ dan $\bar{a} . x = 0$

ambil $\bar{a} = 1$

maka $\bar{a} . a = 0$ $\bar{a} . x = 0$

$1 . a = 0$ $1 . x = 0$

sehingga a dan x hanya dapat diisi dengan 0.

Dengan kata lain $a = x = \bar{\bar{a}}$

Jika $\bar{a}$ diisi dengan 0, maka a dan x dapat bernilai 1 dan 0.

Untuk $\bar{a} + a = 1$ dan $\bar{a} + x = 1$

ambil $\bar{a} = 0$

maka $\bar{a} + a = 1$ $\bar{a} + x = 1$

$0 + a = 1$ $0 + x = 1$

sehingga a dan x hanya dapat diisi dengan 1.

Dengan kata lain $a = x = \bar{\bar{a}}$

Jika $\bar{a}$ diisi dengan 1, maka a dan x dapat bernilai 1 dan 0.

<u>Theorema 2.1.4.8</u>

$$a\,[(a + b) + c] = [(a + b) + c]\,a = a$$

<u>Bukti</u>

$$\begin{aligned} a\,[(a + b) + c] &= a(a + b) + ac && \text{(P5b)} \\ &= a + ac && \text{(Th.2.1.4.5)} \\ &= a && \text{(Th.2.1.4.5)} \\ &= [(a + b) + c]\,a && \text{(P4b)} \end{aligned}$$

<u>Theorema 2.1.4.9</u>

Untuk setiap pasang elemen a dan b di B, $a + \bar{a}b = a + b$;
$a\ (\bar{a} + b) = a\ .\ b$

<u>Bukti</u>

$$a + \bar{a}b = (a + \bar{a})(a + b) \qquad \text{(P5a)}$$

$$a + \bar{a}b = a + b \qquad \text{(P6,P3b)}$$

$$a(\bar{a} + b) = a \cdot b \qquad \text{(dualitas)}$$

<u>Theorema 2.1.4.10.</u> Hukum de Morgan

Untuk setiap pasang elemen a dan b di B, $\overline{a + b} = \bar{a}\ .\ \bar{b}$
dan $\overline{a\ .\ b} = \bar{a} + \bar{b}$

<u>Bukti</u>

$$\begin{aligned}
(a + b) + \bar{a}\ .\ \bar{b} &= [(a + b) + \bar{a}].[(a + b) + \bar{b}] && \text{(P5a)}\\
&= [\bar{a} + (a + b)].[\bar{b} + (b + a)] && \text{(P4a)}\\
&= [(\bar{a} + a) + b].[(\bar{b} + b) + a] && \text{(P8)}\\
&= (1 + b)\ .\ (1 + a) && \text{(P6)}\\
&= 1\ .\ 1 && \text{(Th. 2.1.4.3)}\\
&= 1 && \text{(Th. 2.1.4 2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(a + b).(\bar{a}\ .\ \bar{b}) &= a(\bar{a}\ .\ \bar{b}) + b(\bar{b}\ .\ \bar{a}) && \text{(P5b)}\\
&= (a\bar{a})\ .\ \bar{b} + (b\bar{b})\ .\ \bar{a} && \text{(P8)}\\
&= 0\ .\ \bar{b} + 0\ .\ \bar{a} && \text{(P6)}\\
&= 0 + 0 && \text{(Th. 2.1.4.3)}\\
&= 0 && \text{(Th. 2.1.4.2)}
\end{aligned}$$

Sehingga a + b adalah komplemen tunggal dari $\bar{a}\ .\ \bar{b}$. Dapat dituliskan :

$$a + b = \overline{\bar{a}\ .\ \bar{b}} \quad \text{atau} \quad \overline{a + b} = \bar{a}\ .\ \bar{b}$$

Dari hasil di atas serta dengan mengganti a dan b dengan $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ dapat ditulis :

$$\overline{\overline{a} + \overline{b}} = \overline{\overline{a}} \;.\; \overline{\overline{b}} = \overline{a} \;.\; \overline{b}$$

atau $\quad \overline{a} + \overline{b} = \overline{a \;.\; b}$

2.2. ALJABAR PENYAMBUNGAN DAN FUNGSI PENYAMBUNGAN (SWITCHING ALGEBRA AND SWITCHING FUNCTION)

2.2.1. Definisi Aljabar Boolean Untuk Teori Penyambungan

<u>Definisi 2.2.1.1</u>

Untuk Aljabar Boolean berlaku aksioma sebagai berikut :

A1. Idempoten : $x \;.\; x = x$

$x + x = x$

A2. Komutatif : $x \;.\; y = y \;.\; x$

$x + y = y + x$

A3. Asosiatif : $x \;.\; (y \;.\; z) = (x \;.\; y) \;.\; z$

$x + (y + z) = (x + y) + z$

A4. Absortif : $x \;.\; (x + y) = x$

$x + (x \;.\; y) = x$

A5. Distributif: $x.(y + z) = (x.y) + (x.z)$

$x + (y.z) = (x + y).(x + z)$

A6. Elemen nol dan satu

Terdapat elemen tunggal (elemen satu) $1 \in B$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in B$, $x \;.\; 1 = 1 \;.\; x = x$

Terdapat elemen tunggal (elemen nol) $0 \in B$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in B$, $x + 0 = 0 + x = x$

A7. Komplemen : Untuk setiap $x \in B$ terdapat suatu elemen tunggal $x' \in B$, yang disebut komplemen x, sedemikian rupa sehingga

$$x \;.\; x' = 0$$

Perlu diketahui bahwa operasi x.y dan x + y adalah bukan operasi aljabar biasa. Sedangkan tanda utama (′) dan batang (—) dapat dipertukarkan satu sama lain untuk menyatakan komplementasi dari suatu variabel Boolean.

Contoh 2.2.1.1

Aljabar Boolean dua elemen B_2 = ({0,1}; . ; + ; ' ; 0,1).

Tiga operasi ., + dan ' didefinisikan sebagai berikut :

.	0	1
0	0	0
1	0	1

+	0	1
0	0	1
1	1	1

'	
0	1
1	0

Selanjutnya, perhatikan set power P(S) dari suatu set S yang tunggal. Jelasnya P(S) terdiri hanya dua elemen, Ø dan S. Tiga tabel yang sama seperti diperlihatkan di atas untuk irisan, gabungan dan komplemen dari Ø dan S, menjadi

∩	Ø	S
Ø	Ø	Ø
S	Ø	S

∪	Ø	S
Ø	Ø	S
S	S	S

~	
Ø	S
S	Ø

Dua set tabel di atas menunjukkan bahwa aljabar Boolean tersebut adalah isomorfik satu sama lain.

Catatan :

Dua aljabar dikatakan isomorfik jika terdapat suatu pemetaan satu-satu antara keduanya.

Contoh 2.2.1.2

Aljabar Boolean empat elemen B_4 = ({0,a,b,1}; .;+;';0,1).

Tiga operasi diperlihatkan pada tabel sebagai berikut :

.	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	0	a
b	0	0	b	b
1	0	a	b	1

+	0	a	b	1
0	0	a	b	1
a	a	a	1	1
b	b	1	b	1
1	1	1	1	1

'	
0	1
a	b
b	a
1	0

Sekarang perhatikan *set power* (himpunan kuasa) P(I), dimana I = {a,b}. Tiga subset yang sesuai dari I adalah {a}, {b}, dan set kosong; bila berturut-turut dinyatakan dengan S_a, S_b, dan Ø, maka P(I) adalah suatu aljabar Boolean dengan tiga operasi yang diperlihatkan pada tabel sebagai berikut :

∩	Ø	S_a	S_b	I
Ø	Ø	Ø	Ø	Ø
S_a	Ø	S_a	Ø	S_a
S_b	Ø	Ø	S_b	S_b
I	Ø	S_a	S_b	I

∪	0	S_a	S_b	I
Ø	Ø	S_a	S_b	I
S_a	S_a	S_a	I	I
S_b	S_b	I	S_b	I
I	I	I	I	I

~	
Ø	I
S_a	S_b
S_b	S_a
I	Ø

Terlihat lagi bahwa B_4 adalah isomorfik pada P(I) dengan I = {a,b}. Pada Contoh 2.2.1.1 ditunjukkan bahwa setiap aljabar Boolean adalah isomorfik pada suatu set power P(A) dengan tiga operasi set ∩, ∪, dan ~ berturut-turut sebagai operasi AND, OR, dan NOT. Oleh karena set power P(A) dengan A = { a_1, a_2, ... , a_n } dan masing-masing elemen dalam A dapat termasuk atau tidak termasuk dalam suatu himpunan bagian tertentu ; jadi ada n pilihan biner yang tidak tergantung satu sama lain, sehingga set power P(A) mempunyai tepat 2^n elemen, maka jumlah elemen aljabar Boole adalah pangkat dari 2. Dengan kata lain, untuk setiap aljabar Boole B yang diberikan, terdapat suatu bilangan bulat positif n sedemikian rupa sehingga jumlah elemen dari B adalah 2^n.

Theorema 2.2.1.1

Jika suatu himpunan A mempunyai secara tepat n elemen, maka P(A) akan mempunyai secara tepat 2^n elemen.

Bukti

Dibuat tabel sabagai berikut :

Tabel 2.2.1.1. Banyaknya kemungkinan himpunan bagian dari A dengan n elemen

Banyaknya elemen yang terkandung dalam sebuah himpunan bagian dari A	Banyaknya himpunan bagian
0	C_0^n
1	C_1^n
⋮	⋮
n	C_n^n

$$C_i^n = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

Jadi, total semua himpunan bagian dari A adalah

$$C_0^n + C_1^n + \ldots + C_n^n$$

Dari deret Binomial, terdefinisi sebagai berikut :

$$(1+X)^n = C_0^n + C_1^n X + C_2^n X^2 + \ldots + C_n^n X^n$$

Misalkan x = 1, didapatkan bahwa :

$$2^n = C_0^n + C_1^n + C_2^n + \ldots + C_n^n$$

Maka Theorema tersebut terbukti.

Contoh 2.2.1.3

Misalkan A = {a, b, c}. Himpunan kuasa dari A adalah

P(A) = {∅,{a},{b},{c},{a,b},{a,c},{b,c},{a,b,c}}

Definisi 2.2.1.2

1. Elemen dari suatu Aljabar Boolean B disebut konstanta pada B.
2. Simbol yang dapat menyatakan setiap satu dari elemen - elemen B, disebut variabel (Boolean) pada B.

Fungsi Boolean dari suatu Aljabar Boolean didefinisikan sebagai berikut :

Definisi 2.2.1.3

Misal x_1, x_2, ... , x_n sebagai variabel pada suatu aljabar Boolean B. Pemetaan f dari B kepada dirinya sendiri adalah suatu fungsi Boolean n variabel, dinyatakan dengan $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, bila dapat disusun menurut aturan-aturan sebagai berikut :

1. Ambil a menyatakan suatu konstanta pada B, maka $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a$ dan $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_i$ melalui fungsi Boolean, yang pertama disebut fungsi konstan dan yang terakhir disebut fungsi proyeksi.
2. Bila $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ adalah suatu fungsi Boolean, maka $(f[x_1, x_2, \ldots, x_n])'$ adalah suatu fungsi Boolean.
3. Bila $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dan $f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ adalah fungsi Boolean, maka $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) + f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dan $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ adalah fungsi Boolean.
4. Setiap fungsi yang dapat disusun dengan sejumlah terhingga aplikasi dari aturan-aturan di atas, dan hanya fungsi yang demikian adalah suatu fungsi Boolean.

Jadi fungsi Boolean adalah setiap fungsi yang dapat disusun dari fungsi konstan dan fungsi proyeksi dengan sejumlah terhingga penggunaan dari operasi +, . dan '. Untuk fungsi satu variabel, fungsi proyeksi adalah fungsi identitas $f(x) = x$.

Contoh 2.2.1.4

Fungsi

$$f(x_1,x_2,x_3) = ax_1 + (bx_2x_3')'(x_2 + x_3')$$

Keterangan :

x_1,x_2,x_3 : variabel dari Aljabar Boolean

a, b : elemen Aljabar Boolean yang berbeda

$a' = b$ dan $b' = a$

. ,+ ,´ : operasi Aljabar Boolean

Fungsi di atas adalah fungsi Boolean dari tiga variabel x_1,x_2 dan x_3 yang terdefinisi dalam B_4.

Lemma 2.2.1.1

Setiap fungsi penyambungan dari satu variabel x, dapat ditulis dalam bentuk $f(x) = f(1).x + f(0).x'$

Bukti :

Dibuktikan untuk fungsi konstan $f(x) = a$ dan fungsi proyeksi $f(x) = x$ atau $f(x) = x'$.

Untuk $f(x) = a$

$a \in$ sembarang dari B, maka :

$a = a(x + x')$

$a = ax + ax'$, untuk setiap x unsur B

$f(x) = a$, maka

$f(x) = ax + ax'$, $f(0) = a$, $f(1) = a$

$f(x) = f(1).x + f(0).x'$

Untuk $f(x) = x$ dan $f(x) = x'$

$$\begin{aligned} f(x) &= x \\ &= 1.x + 0.x' \\ &= f(1).x + f(0).x' \\ f(x) &= x' \\ &= 0.x + 1.x' \\ &= f(1).x + f(0).x' \end{aligned}$$

Misalnya f dan g adalah dua fungsi penyambungan yang telah memenuhi Lemma di atas, maka

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= [(f(1).x\ )+(f(0).x')] + [(g(1).x)+(g(0).x')] \\ &= (f(1).x + g(1).x) + (f(0).x' + g(0).x') \\ &= (f(1) + g(1)).x + (f(0) + g(0)).x' \end{aligned}$$

Dengan demikian $f + g$ juga memenuhi sifat di atas.

Begitu pula

$$\begin{aligned} f(x).g(x) &= (f(1).x\ )+(f(0).x') \ .\ (g(1).x)+(g(0).x') \\ &= f(1)x.g(1)x+f(1)x.g(0)x'+f(0)x'.g(1)x+f(0)x'.g(0)x' \\ &= f(1)x\ .\ g(1)x + f(0)x\ .\ g(0)x' \\ &= (f(1)\ .\ g(1)).x + (f(0) + g(0)).x' \end{aligned}$$

Dengan demikian $f.g$ juga memenuhi sifat di atas.

Karena semua bentuk khusus serta sifat-sifat dari fungsi penyambungan telah dipenuhi oleh Lemma di atas, dan $f(x)$ merupakan suatu pemetaan dari aljabar penyambungan ke aljabar penyambungan, maka Lemma terbukti.

Dengan bukti yang sama, Lemma 2.2.1.1 dapat diperluas untuk fungsi n variabel.

Lemma 2.2.1.2

Setiap fungsi penyambungan $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dapat dinyatakan ke dalam bentuk

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(1, x_2, \ldots, x_n) \cdot x_1 + f(0, x_2, \ldots, x_n)\, x'$$

Bukti

Dari perluasan Lemma 2.2.1.1, untuk setiap fungsi penyambungan dapat dinyatakan

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(1,1,x_3, \ldots, x_n).x_1 x_2 + f(1,0,x_3, \ldots, x_n).x_1 x_2' + f(0,1,x_3, \ldots, x_n).x_1' x_2 + f(0,0,x_3, \ldots, x_n).x_1' x_2'$$

Jika proses ini terus dilakukan sampai semua variabel pada semua fungsi yang muncul tereliminasi, maka diperoleh 2^n suku.

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(1,1,\ldots,1) x_1 x_2 \ldots x_n + f(1,1,\ldots,0) x_1 x_2 \ldots x_{n-1} x_n' + \ldots + f(0,0, \ldots, 0) x_1' x_2' \ldots x_n' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Dari proses di atas dapat dilihat bahwa jika x_j (atau x_j') muncul pada suatu suku, maka nilai 1 (atau 0) akan muncul pula pada suku tersebut.

Definisi 2.2.1.4

Pangkat suatu elemen dalam aljabar Boole dapat disajikan

$x_j^c = x_j'$ $\qquad$ $x_j^1 = x_j$ $\qquad$ $e_j = 0$ atau 1

Dari definisi 2.2.1.1 ekspresi suku pada persamaan (1) dapat ditulis $f(e_1, e_2, \ldots, e_n)\; x_1^{e_1} x_2^{e_2} \ldots x_n^{e_n}$

Setiap fungsi Boolean mempunyai dua bentuk kanonik :

1. Bentuk jumlah-dari-perkalian kanonik :

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum f(e_1, e_2, \ldots, e_n) x_1^{e_1} x_2^{e_2} \ldots x_n^{e_n}$$

dengan banyaknya penjumlahan sama dengan banyaknya kombinasi dari $e_1, \ldots, e_n$ (e_j bernilai 0 atau 1, $1 \le j \le n$).

2. Bentuk perkalian-dari-jumlah kanonik :

$$f(x_1, x_2, \ \ldots \ , x_n) = \prod f(e_1, e_2, \ \ldots \ , e_n) + x_1^{e_1'} + x_2^{e_2'} + \ldots + x_n^{e_n'}$$

dengan banyaknya perkalian sama dengan banyaknya kombinasi dari $e_1, e_2, \ \ldots \ , e_n$ (e_j bernilai 0 atau 1, $1 \le j \le n$).

<u>Contoh 2.2.1.5</u>

Fungsi $f(x_1 \ , \ x_2)$ yang terdefinisi pada B_4 dengan tabel kebenaran sebagai berikut :

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	0	1
0	a	a
a	b	b
a	1	1
b	0	1
b	a	a
1	b	1
1	1	1
lainnya		0

Bentuk jumlah - dari - perkalian kanonik dari fungsi di atas adalah :

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= f(0,0)x_1'x_2' + f(0,a)x_1'x_2^a + f(a,b)x_1^a x_2^b + f(a,1)x_1^a x_2 \\ &\quad + f(b,0)x_1^b x_2' + f(b,a)x_1^b x_2^a + f(1,b)x_1 x_2^b + f(1,1)x_1 x_2 \\ &= 1.x_1^0 \ x_2^0 + a \ . \ x_1^0 \ x_2^a + b.x_1^a x_2^b + 1. \ x_1^a \ x_2^1 \\ &\quad + 1.x_1^b \ x_2^0 + a. \ x_1^b \ x_2^a + 1.x_1^1 \ x_2^b + 1.x_1^1 \ x_2^1 \end{aligned}$$

2.2.2. Aljabar Penyambungan

Diantara semua aljabar Boolean, Aljabar Boolean dua elemen B_2 yang dikenal sebagai aljabar penyambungan adalah yang paling bermanfaat. Aljabar Boolean dua elemen B_2 tersebut merupakan dasar matematis dari analisa dan rancangan rangkaian penyambungan yang menimbulkan sistem digital. Aljabar penyambungan terdiri dari dua elemen ekstrim, angka terbesar dinyatakan dengan 1 dan angka terkecil dinyatakan dengan 0. Fungsi Boolean yang terdefinisi pada Aljabar penyambungan disebut *fungsi penyambungan.*

Yang banyak digunakan pada aplikasi fungsi penyambungan adalah teori de Morgan.

Theorema 2.2.2.1. Teori De Morgan (umum)

(a). $(x_1 + x_2 + \dots + x_n)' = x_1'.x_2'. \dots .x_n'$

(b). $(x_1.x_2. \quad .x_n)' = x_1' + x_2' + \dots + x_n'$

Bukti

Akan dibuktikan Th. 2.2.2.1.(a) dengan induksi matematik.

Untuk n = 1 persamaan tersebut berlaku.

Dianggap bahwa persamaan tersebut berlaku untuk n = k.

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)' = x_1'.x_2'. \dots .x_k'$$

Akan dibuktikan bahwa persamaan tersebut berlaku untuk $n = k + 1$

$$\begin{aligned}(x_1+x_2+ \dots +x_k+x_{k+1})' &= [(x_1+x_2+ \dots +x_k)+x_{k+1}]' \\ &= (x_1+x_2+ \dots +x_k)'.x_{k+1}' && \text{(Th.2.1.4.10)} \\ &= (x_1+x_2+ \dots +x_{k-1})'.x_k'.x_{k+1}' && \text{(Th.2.1.4.10)} \\ &\vdots \\ &= x_1'.x_2'. \dots .x_{k-1}'.x_k'.x_{k+1}'\end{aligned}$$

Akan dibuktikan Th. 2.2.2.1.(b) dengan induksi matematik.

Untuk n = 1 jelas berlaku.

Dianggap bahwa persamaan tersebut berlaku untuk n = k

$$(x_1 . x_2 . \dots . x_k)' = x_1'+x_2'+ \dots +x_k'$$

Akan dibuktikan bahwa persamaan tersebut berlaku untuk

$n = k + 1$

$$(x_1.x_2. \ldots .x_k.x_{k+1})' = [(x_1.x_2. \ldots .x_k).x_{k+1}]'$$
$$= (x_1.x_2. \ldots .x_k)' + x'_{k+1} \quad \text{(Th.2.1.4.10)}$$
$$= (x_1.x_2. \ldots .x_{k-1})' + x'_k + x'_{k+1} \quad \text{(Th.2.1.4.10)}$$
$$\vdots$$
$$= x'_1 + x'_2 + \ldots + x'_{k-1} + x'_k + x'_{k+1}$$

<u>Theorema 2.2.2.2.</u> Teori Shannon

$$(f(x_1,x_2, \ldots ,x_n, +, .))' = f(x'_1,x'_2,\ldots,x'_n, ., +)$$

Teori Shannon ini menyatakan bahwa komplemen dari setiap fungsi dapat diperoleh dengan menggantikan masing-masing variabel dengan komplemennya dengan syarat operasi AND dan OR saling dipertukarkan.

<u>Bukti</u>

Oleh karena setiap $(f(x_1, \ldots, x_n, +, .))'$ dapat dinyatakan dengan :

$$(f(x_1,\ldots,x_n,+,.))' = (f_1(x_1,\ldots,x_n,+,.) + f_2(x_1,\ldots,x_n,+,.))'$$
$$= (f_1(x_1,\ldots,x_n,+,.))'.((f_2(x_1,\ldots,x_n,+,.))'$$

dan / atau

$$(f(x_1,\ldots,x_n,+,.))' = (f_1(x_1,\ldots,x_n,+,.).f_2(x_1,\ldots,x_n,+,.))'$$
$$= (f_1(x_1,\ldots,x_n,+,.))' + (f_2(x_1,\ldots,x_n,+,.))'$$

dimana f_1 dan f_2 menyatakan dua fungsi parsial dari f. Maka proses yang sama dapat diulang untuk f_1 dan f_2, dan seterusnya, sampai teori De Morgan terpakai untuk setiap variabel dari masing-masing unsur dari f. Setiap kali teori De Morgan dipakai pada f (atau fungsi parsialnya), komplemen f (atau fungsi parsialnya) diperoleh dengan menggantikan masing-masing fungsi parsial (fungsi subparsial) dengan komplemennya dan sekaligus mempertukarkan operasi AND dan OR satu sama lain. Sesudah teori De Morgan terpakai pada setiap variabel dari masing-masing unsur dari f, maka hasil akhir menjadi $f(x_1', x_2', \ldots, x_n', \cdot, +)$.

<u>Contoh 2.2.2.1</u>

Bila $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1.x_2)'.x_3 + x_1.(x_2 + x_3')$, maka komplemen dari fungsi tersebut adalah

$$f'(x_1,x_2,x_3) = ((x_1.x_2) + x_3').(x_1' + (x_2'.x_3))$$

2.2.3. Fungsi Penyambungan Yang Ditentukan Secara Lengkap Dan Tidak Lengkap

Oleh karena harga f $(e_1, e_2, \ldots, e_3)$ dari suatu fungsi penyambungan *hanya* dapat bernilai 0 atau 1, maka dua bentuk kanonik pada definisi 2.2.1.1 dapat dinyatakan dengan :

Bentuk jumlah-dari-perkalian kanonik dari suatu fungsi penyambungan :

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{\substack{\text{semua kombinasi} \\ \text{nilai } x_1,\ldots,x_n \text{ dimana} \\ f(e_1,\ldots,e_n) = 1}} x_1^{e_1} x_2^{e_2} \ldots x_n^{e_n}$$

Bentuk perkalian-dari-jumlah kanonik dari suatu fungsi penyambungan :

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{\substack{\text{semua kombinasi} \\ \text{nilai } x_1,\ldots,x_n \text{ dimana} \\ f(e_1,\ldots,e_n) = 0}} (x_1^{e_1'} + x_2^{e_2'} + \ldots + x_n^{e_n'})$$

Disini, $x_i^{e_i}(x_i^{e_i'})$ diartikan sebagai $x_i(x_i')$ atau $x_i'(x_i)$

sesuai harga e_i, yaitu 1 atau 0. Sebagai contoh untuk fungsi penyambungan pada persamaan :

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1'x_2 + x_1x_2'x_3' + x_2x_3$, bentuk kanoniknya adalah :

$$f(x_1,x_2,x_3) = x_1'x_2x_3' + x_1'x_2x_3 + x_1x_2'x_3' + x_1x_2x_3$$

dan

$$f(x_1,x_2,x_3) = (x_1+x_2+x_3)(x_1+x_2+x_3')(x_1'+x_2+x_3')(x_1'+x_2'+x_3)$$

Masing-masing unsur jumlah-dari-perkalian kanonik pada persamaan di atas disebut *minterm*, dan masing-masing unsur perkalian-dari-jumlah kanonik pada persamaan di atas disebut *maxterm*. Hal menarik yang perlu dikemukakan adalah, bahwa dari definisi bentuk jumlah-dari- perkalian kanonik dari suatu fungsi penyambungan, minterm dari bentuk jumlah-dari-perkalian kanonik dari fungsi penyambungan dapat langsung diperoleh dari baris-baris pada tabel kebenaran dari fungsi yang dipetakan ke 1, dan maxterm dari bentuk perkalian-dari-jumlah kanonik dari fungsi penyambungan dapat langsung diperoleh dari baris-baris pada tabel kebenaran dari fungsi yang dipetakan ke 0. Contoh sederhana diberikan pada Tabel 2.2.3.1.

Tabel 2.2.3.1

Nomor Baris r	Minterm dan Maxterm	x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$
0	$M_0 = x_1+x_2+x_3$	0	0	0	0
1	$M_1 = x_1+x_2+x_3'$	0	0	1	0
2	$m_2 = x_1'x_2x_3'$	0	1	0	1
3	$m_3 = x_1'x_2x_3$	0	1	1	1
4	$m_4 = x_1x_2'x_3'$	1	0	0	1
5	$M_5 = x_1'+x_2+x_3'$	1	0	1	0
6	$M_6 = x_1'+x_2'+x_3$	1	1	0	0
7	$m_7 = x_1x_2x_3$	1	1	1	1

Catatan : $f(x_1,x_2,x_3)=x_1'x_2 + x_1x_2'x_3' + x_2x_3$

m menyatakan minterm

M menyatakan maxterm

Alasan bahwa baris, katakanlah 010, berkaitan dan hanya berkaitan dengan minterm $x_1'x_2x_3'$ adalah karena $f(x_1,x_2,x_3') = 1$ jika hanya jika $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ dan $x_3 = 0$. Alasan bahwa tiga baris yang lain 011, 100 dan 111, menjelaskan minterm $x_1'x_2x_3$, $x_1x_2'x_3'$, dan $x_1x_2x_3$ adalah sama juga. Maka kita dapatkan aturan-aturan :

<u>Aturan 1</u>

Semua minterm dari bentuk jumlah-dari-perkalian kanonik dari suatu fungsi penyambungan dapat diperoleh dari baris-baris tabel kebenaran yang dipetakan ke 1. Masing-masing harga 0 dari suatu variabel menyatakan bentuk komplemen dari variabel tersebut, dan masing-masing harga 1 dari suatu variabel menyatakan bentuk non komplemen dari variabel tersebut.

Aturan 2.

Semua maxterm dari bentuk perkalian-dari-jumlah kanonik dari suatu fungsi penyambungan dapat diperoleh dari baris-baris tabel kebenaran yang dipetakan ke 0. Masing-masing harga 0 dari suatu variabel menyatakan bentuk non komplemen dari variabel tersebut, dan masing-masing harga 1 dari suatu variabel menyatakan bentuk komplemen dari variabel tersebut.

Contoh : (Lihat kolom 1 dan 2 pada tabel 2 2 3 1). Maka dua bentuk kanonik dapat dinyatakan berturut-turut dengan

$f(x_1,x_2,x_3) = m_2 + m_3 + m_4 + m_7$

dan

$f(x_1,x_2,x_3) = M_0 . M_1 . M_5 . M_6$

yang dapat disederhanakan lebih lanjut menjadi :

$$f(x_1,x_2,x_3) = \Sigma\ (2,3,4,7)$$

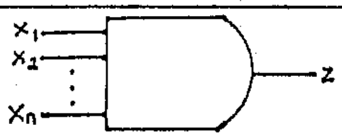
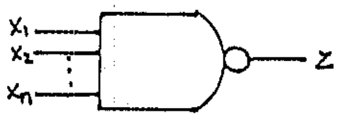
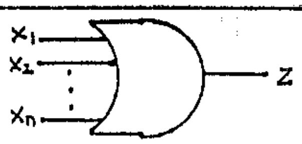
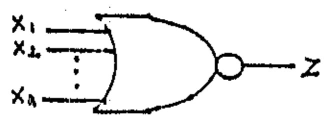
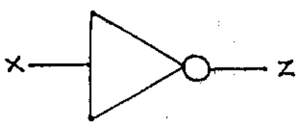
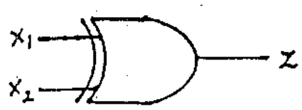
dan

$$f(x_1,x_2,x_3) = \Pi\ (0,1,5,6)$$

Perlu diketahui bahwa ekspresi Σ (2,3,4,7) menyatakan bahwa baris-baris yang nomornya tidak ada dalam ekspresi sumasi tersebut, yaitu baris 0,1,5, dan 6 dipetakan ke 0. Begitu pula ekspresi Π (0,1,5,6) menyatakan bahwa baris-baris yang nomornya tidak ada dalam ekspresi perkalian tersebut, yaitu baris 2,3,4,dan 7 dipetakan ke 1. Perlu diperhatikan, bahwa suatu baris, bila berhubungan dengan minterm (maxterm), tidak dapat berhubungan dengan maxterm (minterm). Dengan kata lain, set baris yang berhubungan dengan minterm dari fungsi penyambungan yang ditentukan secara lengkap adalah berdiri sendiri terhadap set baris yang berhubungan dengan maxterm. Dua set tersebut adalah komplementer. Sehingga, bila bentuk jumlah-dari-perkalian (perkalian-dari-jumlah) kanonik dari fungsi penyambungan diketahui, maka bentuk perkalian-dari-jumlah (jumlah-dari-perkalian) kanonik dari fungsi tersebut dapat diperoleh dari semua baris yang tidak terdapat dalam set baris yang berhubungan dengan minterm (maxterm).

Ada enam gerbang elektronik dasar yang digunakan yaitu: AND, OR, NOT, NAND (NOT AND), NOR (NOT OR), dan XOR (Exclusive OR), yang perwakilan simbolnya diberikan pada Tabel 2.2.3.2. Perlu diketahui bahwa gerbang XOR dengan dua variabel masukan x dan y adalah perwujudan dari operasi $xy' + x'y$.

Tabel 2.2.3.2

Gerbang	Simbol	Gerbang	Simbol
AND		NAND	
OR		NOR	
NOT		XOR	

Sampai disini, fungsi penyambungan yang telah dibahas adalah yang ditentukan secara lengkap. Dalam rancangan sistem digital biasa digunakan fungsi yang ditentukan secara tidak lengkap. Sebagai contoh, anggap bahwa masukan pada rangkaian penyambungan menyatakan angka desimal yang dikodekan dalam bentuk " binary - coded - decimal"(BCD). Kemudian hanya 10 dari empat tupel (x_1, x_2, x_3, x_4) akan ditentukan dan 6 lainnya berhubungan dengan keadaan *jangan - perhatikan* yang dinyatakan dengan *d (don't care)*, yaitu singkatan dari *jangan perhatikan*, yang berarti bahwa kita jangan memperhatikan apakah 6 empat - tupel tersebut dipetakan ke 0 atau 1. Andaikan kita ingin merancang rangkaian untuk menyatakan apakah masukan adalah angka genap atau ganjil dengan menghasilkan, katakan, keluaran 0 bila masukan adalah genap, dan keluaran adalah 1 bila masukan adalah ganjil. Bila 10 angka desimal 0,1,..., dan 9 dikodekan dalam bentuk BCD-nya, tabel kebenaran yang melukiskan fungsi penyambungan ini diperlihatkan dalam tabel 2.2.3.3.

Tabel 2.2.3.3

Angka Desimal r	Bentuk BCD x_1	x_2	x_3	x_4	$f(x_1,x_2,x_3,x_4)$
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	1
4	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	1
6	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	d
11	1	0	1	1	d
12	1	1	0	0	d
13	1	1	0	1	d
14	1	1	1	0	d
15	1	1	1	1	d

Oleh karena fungsi penyambungan ini mempunyai 6 baris yang pemetaannya tidak ditentukan, maka merupakan fungsi penyambungan yang ditentukan secara tidak lengkap. Dua bentuk kanonik dari fungsi tersebut adalah :

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \sum (1,3,5,7,9) + \sum_d (10,11,12,13,14,15)$$

dan

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \prod (0,2,4,6,8) \cdot \prod_d (10,11,12,13,14,15)$$

Perlu diketahui bahwa minterm jangan-perhatikan dari, katakan $13_{10} = 1101_2$, dalam bentuk jumlah-dari-perkalian kanonik adalah $d.x_1x_2x_3'x_4$, dan maxterm jangan-perhatikan dari 13 dalam bentuk perkalian-dari-jumlah adalah $d + x_1' + x_2' + x_3 + x_4'$, dimana d dapat bernilai 0 atau 1.