BAB II
MATERI DASAR

Sebelum menginjak materi inti, pada Bab ini akan diuraikan dahulu tentang teori - teori dasar yang ada dalam Aljabar Linear, Teori Fungsi Real, Ukur Differensial dan Kalkulus sebagai materi penunjang untuk pembahasan Bab selanjutnya :

2.1. MATRIKS

Definisi 1

Matriks adalah himpunan skalar (bilangan riil atau kompleks) yang disusun sejajar / dijajarkan secara empat persegi panjang (menurut baris - baris dan kolom - kolom).

Skalar - skalar itu disebut elemen matriks, dan matriks - diberikan nama dengan huruf besar A, B, C dan sebagainya. Secara lengkap ditulis matriks $A = (a_{ij})$ artinya suatu matriks A yang elemen - elemennya a_{ij} di mana indeks i menyatakan baris ke-i dan indeks j menyatakan kolom ke-j dari elemen tersebut.

2 buah matriks $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij})$ dikatakan sama $A = B$, bila ukurannya sama (m x n) dan berlaku $a_{ij} = b_{ij}$ untuk setiap i dan j ($i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$).

2.1.1. Operasi Pada Matriks

(a). Penjumlahan matriks (berlaku untuk matriks - matriks berukuran sama).

Jika $A = (a_{ij})$ dan $B = (b_{ij})$, matriks berukuran sama, maka $A + B$ adalah suatu matriks $C = (c_{ij})$ di mana: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, untuk setiap i dan j.

Atau $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$, mengurangi matriks A dengan matriks B, yaitu $A - B$, adalah menjumlahkan matriks A dengan matriks $-B$.

(b). Perkalian skalar terhadap matriks

Kalau λ suatu skalar (bilangan) dan $A = (a_{ij})$ maka matriks $\lambda A = (\lambda a_{ij})$; dengan perkataan lain, matriks λA diperoleh dengan mengalikan semua elemen matriks A dengan λ.

(c). Perkalian matriks

Pada umumnya matriks tidak komutatif terhadap operasi perkalian: $AB \neq BA$. Pada perkalian matriks AB, matriks A kita sebut matriks pertama dan B matriks kedua.

Syarat perkalian matriks :

Jumlah banyaknya *kolom* matriks pertama = jumlah banyaknya *baris* matriks kedua.

Definisi 2

Pandang $A = (a_{ij})$ berukuran $(p \times q)$ dan $B = (b_{ij})$ berukuran $(q \times r)$. Maka perkalian AB adalah suatu matriks $C = (c_{ij})$ berukuran $(p \times r)$ di mana:

$$c_{ij} = a_{i1}\ b_{1j} + a_{i2}\ b_{2j} + \dots + a_{iq}\ b_{qj}$$

Untuk setiap i = 1, 2, ..., p dan j = 1, 2, ..., r.

2.1.2. Matriks Invers

Definisi 3

Sebuah matriks bujur sangkar A berordo n:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

disebut mempunyai invers bila ada suatu matriks B, sehingga $AB = BA = I_n$. Matriks B disebut invers matriks A, ditulis A^{-1}, merupakan matriks bujur sangkar berordo n.

Matriks - matriks yang mempunyai invers adalah matriks - matriks yang nonsingular (determinannya ≠ 0 atau ranknya r = n). Invers bila ada, tunggal (hanya satu).

Berlaku sifat :

(1). $(A^{-1})^{-1} = A$

(2). $(AB)^{-1} = B^{-1}\ A^{-1}$

2.1.3. Matriks Adjoin

Pandang matriks $A = (a_{ij})$ diatas. Kita sebut kofaktor dari elemen a_{ij} sebagai A_{ij}, maka transpose dari matriks (A_{ij}) disebut matriks adjoin dari A.

$$\text{adj. } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Dengan pertolongan matriks adjoin kita dapat mencari invers suatu matriks, menggunakan rumus:

$$A^{-1} = \frac{\text{adj. } A}{\det(A)}, \text{ dengan syarat } \det(A) \neq 0.$$

2.2. DETERMINAN

Setiap matriks bujur sangkar selalu dikaitkan dengan suatu skalar yang disebut *determinan* matriks tersebut, dan kita tulis sebagai det(A) atau $|A|$.

2.2.1. Minor dan kofaktor

Pandang matriks berukuran (n x n): $A = (A_{ij})$, dan M_{ij} suatu submatriks dari A dengan ukuran: (n - 1) x (n - 1) di mana baris ke-i dan kolom ke-j (dari A) dihilangkan.

Definisi 4

Minor dari elemen a_{ij} suatu matriks $A = (a_{ij})$ adalah $|M_{ij}|$ dan kofaktor dari a_{ij} adalah $(-1)^{i+j}|M_{ij}|$ adalah suatu skalar.

Teorema 1 (Laplace)

Determinan dari suatu matriks = jumlah perkalian elemen

- elemen dari sebarang baris/kolom dengan kofaktor - kofaktornya. Dengan perkataan lain:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} \ldots + a_{in} A_{in}$$

dengan i sebarang, disebut *uraian baris ke-i*.

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} \ldots + a_{nj} A_{nj}$$

dengan j sebarang disebut, disebut *uraian kolom ke-j*.

2.3. VEKTOR PRODUCT

Misal u, $v \in R^3$. Vektor product dari u dan v adalah satu - satunya vektor $u \wedge v \in R^3$ yang tercirikan oleh

$(u \wedge v) \circ w = \det(u,v,w)$ untuk semua $w \in R^3$. Disini det (u,v,w) berarti bahwa jika kita mengekpresikan u, v dan w dalam basis vektor $\{f_i\}$,

$$u = \sum u_i\ f_i\ , \qquad v = \sum v_i\ f_i\ ,$$

$$w = \sum w_i\ f_i\ , \qquad i = 1,2,3.$$

maka,

$$\det(u,v,w) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

dimana $|a_{ij}|$ menunjukan determinan dari matrix (a_{ij}). Dengan pengertian dari *cross product* kita bisa mendapatkan harga dari vektor product:

$$u \wedge v = f_1 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - f_2 \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + f_3 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

Hal berikut dapat dengan mudah dicek (menyatakan expressi secara umum dari determinan) :

(1). $u \wedge v = - v \wedge u$ (anti komutatif)

(2). $u \wedge v$ bergantung linear di u dan v, seperti untuk suatu bilangan real b, c, kita mendapatkan :

$(bu + cw) \wedge v = bu \wedge v + cw \wedge v$

(3). $u \wedge v = 0$ jika dan hanya jika u dan v adalah bergantung linear

(4). $(u \wedge v) \circ u = 0$, $(u \wedge v) \circ v = 0$

Vektor Product adalah tidak assosiative.

Dalam kenyataan, kita mempunyai pengertian sebagai berikut :

$$(u \wedge v) \wedge u = \langle u , u \rangle v - \langle u , v \rangle u$$

dimana dapat dibuktikan seperti berikut.

Pertama kita menyelidiki bahwa kedua sisi adalah linear dalam u , v ; selanjutnya pengertian diatas benar jika hal ini diterima untuk semua basis vektor .

Contoh 1

$$(f_1 \wedge f_2) \wedge f_1 = f_2 = \langle f_1 \circ f_1 \rangle\, e_2 - \langle f_1 \circ f_2 \rangle\, f_1$$

$f_1 = (1,0,0)$

$f_2 = (0,1,0)$

maka, ruas kiri:

$$f_1 \wedge f_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= i \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (0,0,1).$$

$$(f_1 \wedge f_2) \wedge f_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= i \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (0,1,0)$$

$$= f_2 .$$

Ruas kanan:

$$\langle f_1 \circ f_1 \rangle\, f_2 - \langle f_1 \circ f_2 \rangle\, f_1 = 1 \,.\, f_2 - 0 \,.\, f_1$$

$$= f_2 .$$

2.4. RUANG METRIK

Definisi 5

Diberikan himpunan X yang tidak kosong, yang elemen - elemennya disebut titik. Didefinisikan fungsi bernilai real non negatif d pada XxX (jadi d fungsi dua variabel dengan variabel - variabel pada pada X) sebagai berikut. Untuk sebarang titik x dan y didalam X harus dipenuhi:

(a). $d(x,y) \geq 0$; $d(x,y) = 0$ jika hanya jika $x = y$;

(b). $d(x,y) = d(y,x)$;

(c). $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ untuk sebarang titik $z \in X$.

Fungsi yang dipenuhi ketiga sifat di atas dinamakan fungsi jarak atau metrik pada X. Nilai d(x,y) dinamakan jarak dari x ke y. Himpunan Z yang dilengkapi dengan fungsi jarak disebut ruang metrik. Ketidaksamaan (c) dinamakan ketidaksamaan segitiga.

Contoh 2

(a). Garis real R dengan metrik biasa, yaitu jarak antara x dan y didefinisikan sebagai nilai mutlak $|x - y|$

adalah suatu ruang metrik.

(b). Ruang Euclides R^k adalah suatu ruang metrik dengan metrik yang didefinisikan oleh norma.

(c). Diberikan himpunan takberhingga X. Didefinisikan fungsi d pada XxX dengan

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ jika } x \neq y, \\ 0 \text{ jika } x = y. \end{cases}$$

Sifat (a) dan (b) jelas dipenuhi oleh d, akan dibuktikan bahwa sifat (c) juga dipenuhi. Jika $x \neq y$, maka untuk sebarang titik $z \in X$, paling sedikit satu dari hubungan $x \neq z$ dan $y \neq z$ adalah benar. Jadi $d(x,z) + d(z,y)$ bernilai 1 atau 2, sehingga (c) berlaku. Jika $x = y$, maka untuk sebarang $z \in X$ berlaku $x = y = z$ atau $x = y \neq z$, jadi $d(x,z) + d(z,y)$ sama dengan 0 atau 2, sehingga syarat (c) juga dipenuhi. Jadi d adalah suatu fungsi jarak pada X, dan X menjadi suatu ruang metrik dengan metrik d. Ruang metrik ini disebut ruang metrik diskrit.

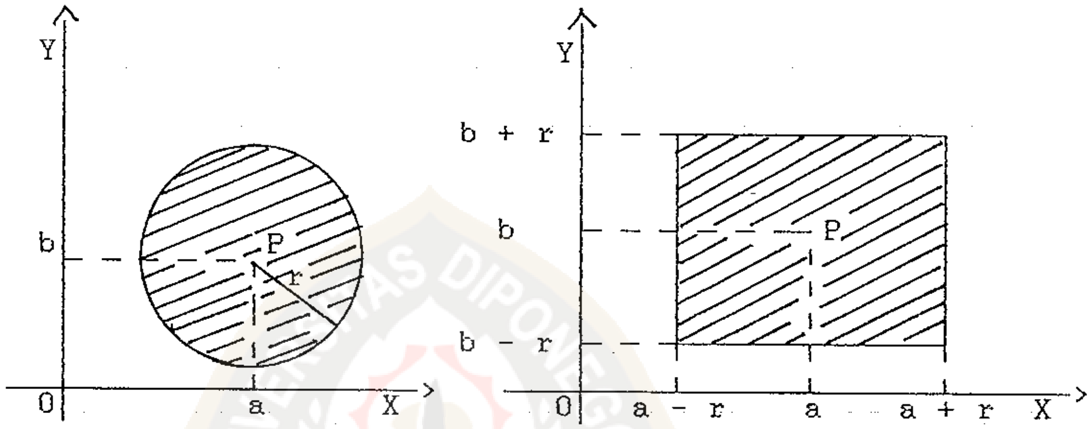
2.5. SEKITAR DAN TITIK LIMIT

Definisi 6

Jika p sembarang titik di dalam ruang metrik X, dan $r > 0$. Maka himpunan

$$N_r(p) = \{x \in X: d(p,x) < r\}$$

bujur sangkar, yang merupakan himpunan titik - titik (x,y) dengan sifat $a - r < x < a + r$. Di bawah ini penyajian geometris sekitar titik p = (a,b) dalam ruang Euclides R^2 dan sekitar P(a,b) dalam (R^2,d).



Ruang Euclides R^2 Ruang Metrik (R^2,d)

Gambar 1

Definisi 7

Titik $p \in X$ disebut titik limit himpunan A subset X, bila setiap sekitar titik p memuat paling sedikit satu titik $q \in A$ dan $q \neq p$.

Contoh 5

Didalam R ditinjau himpunan A yakni selang terbuka (a,b). Jelas bahwa titik a, titik b, dan semua titik p diantara a dan b merupakan titik limit A. Tetapi titik c diluar A bukan titik limit A, sebab jika $r > 0$ diambil nilai yang terkecil diantar nilai $|c - a|$ dan $|c - b|$ maka $N_r(c) = (c - r, c + r)$ tidak memuat satu titik pun anggota A.

2.6. HIMPUNAN TERBUKA DAN TERTUTUP

Definisi 8

Diberikan suatu ruang metrik X. Semua titik dan himpunan yang disebut dalam definisi berikut adalah titik di dalam X dan subset dari X.

(a). Titik p disebut suatu titik interior himpunan A jika terdapat suatu sekitar dari p yang merupakan subset dari A.

(b). Himpunan A disebut himpunan terbuka jika setiap anggotanya merupakan titik interior himpunan A.

(c). Himpunan A disebut tertutup jika semua titik limitnya termuat didalam A.

Jadi

(p titik interior A) $\Leftrightarrow (\exists\ r > 0)(N_r(p) \subset A)$

(A himpunan terbuka) $\Leftrightarrow$ ($p \in A \Rightarrow$ p titik interior A)

(A himpunan tertutup) $\Leftrightarrow$ (p titik limit A $\Rightarrow p \in A$).

Contoh 6

(a). Himpunan $A = (a,b)$ adalah terbuka. Sebab jika $x \in A$, dan $r = \min |x - a|, |x - b|$, maka $N_r(x) = (x - r, x + r)$ adalah subset dari A, jadi x titik interior A. Jadi semua anggota A adalah titik interior A, sehingga A merupakan himpunan terbuka. A tidak tertutup sebab ada titik limit A yang bukan anggota A, yakni a dan b.

(b). Himpunan $B = [a,b]$ adalah tertutup, sebab menurut contoh 5, setiap titik $c \notin B$ bukan titik limit B, jadi B pasti memuat titik limitnya. B tidak terbuka sebab ada anggota B misalnya a, yang bukan titik interior B. Titik a bukan titik interior B, karena $N_r(a) = (a - r, a + r)$ bukan subset dari B untuk semua $r > 0$.

(c). $C = [a,b)$ adalah tidak terbuka, sebab $a \in C$ dan a bukan titik interior C. C tidak tertutup sebab b titik limit C namun $b \notin C$.

2.7. HIMPUNAN KOMPAK

Definisi 9

Himpunan A dalam ruang metrik X disebut terbatas jika terdapat titik $p \in X$ dan bilangan $M > 0$ sehingga untuk setiap $x \in A$ maka jarak $d(p,x) \leq M$.

Jadi A terbatas jika A merupakan himpunan-bagian dari sekitar suatu titik di dalam ruang metriknya dan yang radiusnya cukup besar. Di dalam R dengan mudah dimengerti bahwa suatu himpunan adalah terbatas jika himpunan itu merupakan sub-himpunan suatu selang tetutup. Di dalam R^2 himpunan A terbatas bila A terletak dalam suatu lingkaran yang berpusat di O, dan A pasti merupakan himpunan-bagian (sub-himpunan) suatu daerah persegi panjang $\{(x,y) : a \le x \le b, c \le y \le d\}$ untuk bilangan - bilangan tertentu a, b, c, dan d.

Definisi 10

Dengan selimut terbuka (open cover) suatu himpunan A di dalam ruang metrik X dimaksudkan suatu keluarga himpunan - himpunan terbuka $\{D_\alpha\}$ yang merupakan himpunan-bagian X sedemikian sehingga $A \subset \bigcup_\alpha D_\alpha$.

Definisi diatas menunjukan bahwa untuk setiap $x \in A$ terdapat suatu x sehingga $x \in D_\alpha$.

Definisi 11

Suatu himpunan-bagian T dalam ruang metrik X disebut kompak jika setiap selimut terbuka untuk T memuat sub-selimut berhingga yang masih menyelimuti T.

Jelasnya, apabila keluarga himpunan terbuka $\{D_\alpha\}$ suatu selimut terbuka untuk himpunan kompak T, maka dapat dicari indeks $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ yang cacahnya berhingga sehingga $T \subset D_{\alpha_1} \cup D_{\alpha_2} \ldots \cup D_{\alpha_n}$.

Teorema 2

Didalam sebarang ruang metrik himpunan berhingga adalah kompak. Jadi himpunan kosong adalah kompak.

Bukti

Dimisalkan T : $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ dan $\{D_\alpha\}$ sebarang selimut terbuka untuk T. Karena $\{D_\alpha\}$ selimut terbuka untuk T, maka setiap anggota T merupakan anggota D_α untuk paling sedikit satu α. Untuk setiap anggota x_j ($1 \le j \le n$) dipilih satu D_α saja yang memuat x_j, kita sebut saja D_{α_j}. Jadi D_{α_1}, D_{α_2}, ..., D_{α_n} merupakan sub-selimut berhingga untuk T. Jadi kita telah membuktikan bahwa sebarang selimut terbuka untuk T memuat sub-selimut berhingga untuk T. Jadi T kompak (sesuai dengan **definisi** 11). $\square$.

Mungkin timbul pertanyaan dalam diri kita, bagaimana suatu himpunan tidak kompak. Dengan membuat lingkaran untuk definisi yang menyatakan bahwa himpunan A adalah kompak, kita peroleh pernyataan berikut.

Himpunan A dalam ruang metrik X adalah tidak kompak bila terdapat suatu selimut terbuka untuk A yang tidak memuat sub-selimut yang berhingga yang menyelimuti A. Jadi A tidak kompak apabila kita dapat membuat suatu selimut terbuka untuk A tetapi yang tidak memuat sub selimut berhingga.

Contoh 7

Buktikan bahwa selang terbuka (a,b) tidak kompak dalam R.

Bukti

Dibentuk keluarga selang terbuka $\{(a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n})\}$ dengan n bilangan asli sehingga $\frac{1}{n} < \frac{1}{2}(b - a)$. Dibuktikan bahwa keluarga selang ini selimut-terbuka untuk (a,b). Jika $x \in (a,b)$ maka tentu dapat dicari m sehingga $a + \frac{1}{m} < x < b - \frac{1}{m}$. Jadi $x \in (a + \frac{1}{m}, b - \frac{1}{m}) \subset \bigcup_n (a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n})$.
Terbukti $(a,b) \subset \bigcup_n (a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n})$ atau keluarga selang tersebut selimut terbuka untuk (a,b). Setiap keluarga -bagian berhingga selimut diatas, memuat selang $(a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n})$ dengan n yang terbesar, misalkan n = p. Maka bilangan y dengan $a < y < a + \frac{1}{p}$ adalah anggota (a,b) tetapi bukan anggota interval yang mana pun dalam keluarga-bagian tersebut. Jadi (a,b) tidak kompak. □

2.8. PEMETAAN KONTINU

Jika diberikan himpunan A dan B yang tidak kosong maka perkawanan dari setiap elemen $a \in A$ dengan elemen $b \in B$ sedemikian hingga setiap elemen $a \in A$ mempunyai kawan yang tunggal di B, hal ini disebut pemetaan atau mapping yang ditulis dengan

$$\psi : A \longrightarrow B$$

dimana elemen $b \in B$ disebut image (bayangan) a terhadap ψ, ditulis dengan $\psi(a)$ atau $\overline{a}$.

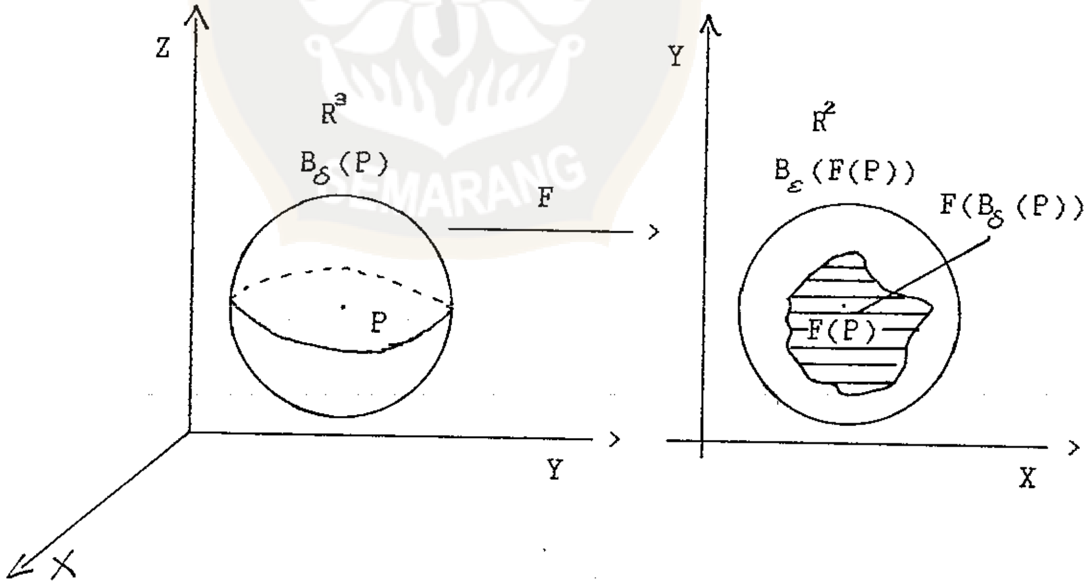
Apabila diberikan suatu pemetaan F dengan

$$F : U \subset R^n \longrightarrow R^m.$$

jika untuk $p \in U$ diberikan $\varepsilon > 0$ sehingga terdapat $\delta > 0$ sedemikian hingga

$$F(B_\delta(P)) \subset B_\varepsilon(F(P))$$

dimana B_δ dan B_ε adalah open ball (bola terbuka) dengan jari - jari masing - masing δ dan ε, maka pemetaan diatas disebut pemetaan kontinu (gambar 2).



gambar 2

Definisi 12 (fungsi differentiable)

Misal $f : V \subset S \longrightarrow R$ merupakan suatu fungsi didefinisikan dalam himpunan terbuka subset V dari permukaan regular S. Fungsi f dikatakan differentiable di $p \in V$ jika, untuk beberapa parametrisasi $x : U \subset R^2 \longrightarrow S$ dengan $p \in x(U) \subset V$, komposisi $f \circ x : U \subset R^2 \longrightarrow R$ adalah differentiable di $x^{-1}(p)$. f adalah differentiable di V jika jika hal ini adalah differentiable di semua titik dari V.

Definisi 13 (diffeomorphisma)

Dua permukaan regular S_1 dan S_2 adalah diffeomorphisma jika disini ada pemetaan differentiable $\varphi : S_1 \longrightarrow S_2$ dengan invers differentiable $\varphi^{-1} : S_2 \longrightarrow S_1$. Sehingga φ dikatakan diffeomorphis dari S_1 ke S_2.

Definisi 14 (homeomorphisma)

Pemetaan F adalah homeomorphisma jika F adalah kontinu dan mempunyai invers F^{-1} yang kontinu yang disefinisikan pada hinpunan terbuka.

2.9. PERMUKAAN

Permukaan didefinisikan sebagi : tempat kedudukan titik - titik yang koordinatnya merupakan fungsi dari dua parameter bebas u, v. Sehingga persamaannya dapat ditulis

$$x = f_1(u,v), \quad y = f_2(u,v), \quad z = f_3(u,v) \qquad \ldots (1)$$

$$\text{dengan } u_1 \le u \le u_2, \quad v_1 \le v \le v_2.$$

Persamaan diatas lazim disebut sebagai persamaan parameter suatu permukaan.

Akan tetapi, tidak selamanya fungsi f harus memuat dua parameter. Paling sedikit fungsi f memuat satu parameter : kondisi dimana tidak semua fungsi f memuat dua parameter, dapat kita temukan misalnya pada bola, yang persamaannya dapat kita tulis :

$$x = b \cos u \cos v, \quad y = b \cos u \sin v, \quad z = b \sin u,$$

Sedang kondisi dimana semua fungsi f memuat satu parameter merupakan suatu kurva.

Dalam R^3, suatu kurva didefinisikan sebagai tempat kedudukan titik - titik yang koordinatnya merupakan fungsi dari sebuah parameter tunggal, sehingga persamaannya :

$$x = x(u), \quad y = y(u), \quad z = z(u).$$

Apabila kita menggantikan u dan v dalam persamaan (1) dengan fungsi fungsi - fungsi dari dua parameter bebas yang lain u_1, v_1, sehingga :

$$u = F_1(u_1, v_1), \quad v = F_2(u_1, v_1) \quad \ldots(2)$$

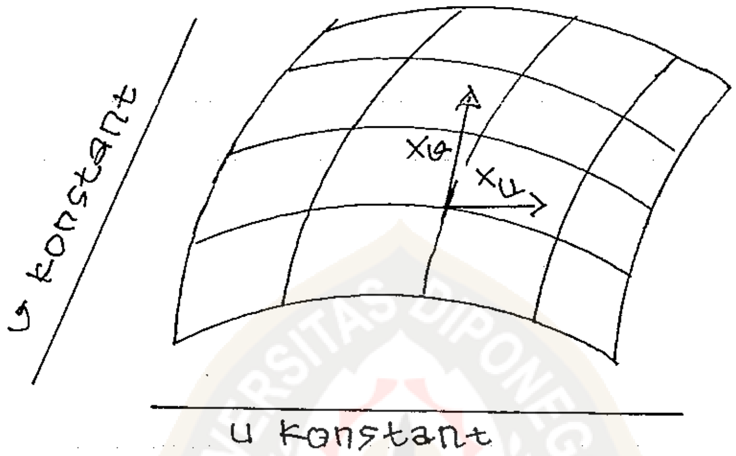
Maka persamaannya akan dapat ditulis :

$$x = \phi_1(u_1, v_1), \quad y = \phi_2(u_1, v_1), \quad z = \phi_3(u_1, v_1) \quad \ldots (3)$$

untuk nilai - nilai tertentu dari u_1 dan v_1 dan nilai - nilai dari u dan v dari (2) kita substitusikan ke (1), kita akan mendapatkan harga - harga dari x, y, z yang diberikan oleh (3). Oleh sebab itu, persamaan (3) dan (1) mendefinisikan permukaan yang sama, asal saja F_1 dan F_2 adalah sedemikian sehingga ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 memenuhi kondisi umum pada F. Maka dapat dikatakan, bahwa persamaan dari suatu permukaan dapat ditulis dalam bentuk parametrisasi dari dua fungsi yang berubah - ubah, dalam banyak cara.

Pada permukaan S yang diberikan dalam bentuk persamaan (1), suatu hubungan $\phi(u,v) = 0$ antara koordinat - koordinat kurva linear u, v pada suatu permukaan menentukan sebuah garis lengkung pada permukaan tersebut. Yang dimaksud koordinat - koordinat kurva linear ialah pasangan (u,v) suatu titik pada permukaan.

Garis - garis parameter ialah garis lengkung pada bidang lengkung atau permukaan dimana v = konstan atau u = konstan. Jika konstanta - konstanta tersebut berubah, permukaaan akan ditutup oleh suatu kumpulana garis - garis parameter. Untuk titik P pada permukaan atau bidang lengkung maka vektor x_u akan menyinggung garis parameter v = konstan dititik tersebut, demikiaan pula vektor x_v akan menyinggung garis parameter u = kønstan dititik P.



Gambar 3

Vektor -vektor x_u dan x_v ditik P memiliki arah - arah yang berlainan. Garis - garis parameter juga sering disebut garis - garis koordinat. Jika v merupakan fungsi dari u atau $v = \varphi(u)$ maka $x(u,v)$ akan merupakan fungsi dari satu parameter saja, jadi merupakaan garis lengkung pada permukaan bidang lengkung.

Vektor $x' = \frac{dx}{ds}$ dapat disajikan oleh persamaan :

$$x' = x_u\, u' + x_v\, v'$$

dan vektor diatas akan menyinggung garis lengkung, yang berarti pula menyinggung permukaan. Persamaan dapat pula disajikan oleh :

$$dx = x_u\, du + x_v\, dv$$

Definisi 15 (permukaan regular)

Suatu himpunan bagian $S \subset R^3$ adalah permukaan regular jika, untuk setiap $p \in S$, disini ada persekitaran V dalam R^3 dan pemetaan $x : U \longrightarrow V \cap S \subset R^3$ sedemikian sehingga :

(1). x adalah differentiable. Ini berarti bahwa jika kita menulis

$x(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, $(u,v) \in U$,

fungsi - fungsi $(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ mempunyai derivative parsial kontinu dari semua bagian di U.

(2). x adalah homeomorphisma. Bila x adalah kontinu oleh kondisi 1, ini berarti bahwa x mempunyai invers $x^{-1} = V \cap S \longrightarrow U$ dimana adalah kontinu; bahwa, x^{-1} adalah pembatasan dari pemetaan kontinu $F : W \subset R^3 \longrightarrow R^2$ didefinisikan pada himpunan terbuka W yang memuat $V \cap S$.

(3). (kondisi khusus). Untuk setiap $q \in U$, differensial $d\,x_q : R^2 \longrightarrow R^3$ adalah korespondensi satu - satu

Definisi 16 (permukaan lengkap)

Suatu permukaan regular S dikatakan lengkap bila untuk setiap titik $p \in S$, ada geodesic terparameter $\gamma : [0,\varepsilon) \longrightarrow S$ dari S, yang dimulai dari $p = \gamma(0)$, dapat ditambahkan kedalam geodesic terparameter $\overline{\gamma} : R \longrightarrow S$, didefinisikan pada semua garis R.

Dengan kata lain, S adalah lengkap bila untuk setiap titik $p \in S$ pemetaan $\exp_p : T_p(S) \longrightarrow S$ adalah didefinisikan untuk setiap $V \in T_p(S)$.

Teorema 3 (Teorema Hopf - Rinow)

Misal S merupakan permukaan lengkap. Pandang dua titik $p, q \in S$, disini ada geodesic minimal yang menghubungkan p ke q.

Bukti

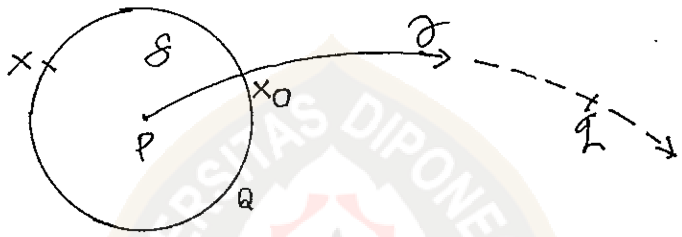
Misal $r = d(p,q)$ merupakan jarak antara titik p dan q. Misal $B_\delta(0) \in T_p(S)$ merupakan lempengan dengan jari - jari δ, terpusat dititik pusat 0 dari bidang singgung $T_p(S)$ dan termuat dalam persekitaran $U \subset T_p(S)$ dari 0, dimana $\exp_p$ adalah diffeomorphisma. Misal $B_\delta(p) = \exp_p(B_\delta(0))$. Penyelidikan bahwa batas Bd $B_\delta(p) = Q$ adalah kompak bila hal ini bayangan kontinu dari himpunan kompak Bd $B_\delta(0) \subset T_p(S)$.

Jika $x \in Q$, fungsi kontinu $d(x,q)$ mencapai minimum dititik x_o dari himpunan kompak Q. Titik x_o dapat ditulis sebagai berikut

$$x_o = \exp_p(\delta v), \qquad |v| = 1, \qquad v \in T_p(S).$$

Misal γ geodesic terparameter oleh panjang busur, ditunjukan dengan (gambar 4)

$$\gamma(s) = \exp_p(sv).$$



gambar 4

bila S lengkap, γ adalah didefinisikan untuk setiap $s \in R$. Terutama, γ adalah didefinisikan dalam interval $[0,r]$. Jika kita menunjukan bahwa $\gamma(r) = q$, maka γ harus merupakan geodesic yang menghubungkan p ke q yang minimal, bila $\ell(\gamma) = r = d(p,q)$, dan hal ini akan menyimpulkan bukti.

Untuk membuktikan ini, kita akan menunjukan bahwa jika $s \in [\delta, r]$, maka

$$d(\gamma(s),q) = r - s \qquad \dots (4)$$

Persamaan (4) menunjukan, untuk $s = r$, bahwa $\gamma(r) = q$, seperti yang dimaksud.

Untuk membuktikan persamaan (4), kita akan menunjukan bahwa hal ini disetujui untuk $s = \delta$. Sekarang himpunan A = $\{ s \in [\delta, r]$; diamana persamaan (4) disetujui $\}$ adalah benar tertututp dalam $[0, r]$.

akan ditunjukan bahwa persamaan (4) disetujui untuk $s = \delta$. Dalam kenyataan, bila setiap kurva yang menghubungkan p ke q mengiris Q, kita mempunyai, yang menunjukan x suatu titik bebas dari Q,

$$d(p,q) = \inf_{\alpha} \ell(\alpha_{p,q}) = \inf_{x \in Q} \left[\inf_{\alpha} \ell(\alpha_{p,x}) + \inf_{\alpha} \ell(\alpha_{x,q})\right]$$

$$= \inf_{x \in Q} (d(p,x) + d(x,q)) = \inf_{x \in Q} (\delta + d(x,q))$$

$$= \delta + d(x_0, q).$$

Dari sini,

$$d(\gamma(\delta), q) = r - \delta,$$

dimana adalah persamaan (4) untuk $s = \delta$.

2.10. BESARAN FUNDAMENTAL ORDE PERTAMA DAN KEDUA

Elemen garis (ds) adalah jarak antara dua titik sebarang pada bidang lengkung atau permukaan yaang saling berdekatan. Hal ini dapat disajikan oleh persamaan sebagai berikut :

$$ds^2 = |dx|^2 = \langle dx \; , \; dx \rangle$$

$$= \langle x_u \, du + x_v \, dv \; , \; x_u \, du + x_v \, dv \rangle$$

$$= \langle x_u \; , \; x_u \rangle \, du^2 + 2 \, \langle x_u \; , \; x_v \rangle \, du \, dv + \langle x_v \; , \; x_v \rangle \, dv^2$$

$$= E \, du^2 + 2 \, F \, du \, dv + G \, dv^2 \qquad \dots (5)$$

dengan $E = \langle x_u \; , \; x_u \rangle$, $F = \langle x_u \; , \; x_v \rangle$, $G = \langle x_v \; , \; x_v \rangle$

$$H^2 = E \, G - F^2$$

yang disebut besaran fundamental orde pertama.

Karena ds merupakan jarak antara dua titik yang berdekatan, maka :

$$E \, du^2 + 2 \, F \, du \, dv + G \, dv^2 > 0$$

atau nol untuk du = dv = 0. Kita selidiki selalu permukaan - permukaan yang real.

Harga $E \, G - F^2 > 0$ dapat diperlihatkan sebagai berikut :

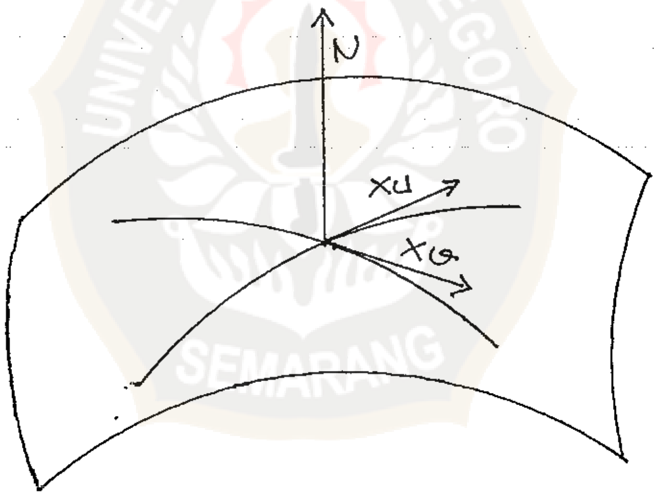
$$\langle x_u \wedge x_v \rangle \langle x_u \wedge x_v \rangle = \langle x_u \; , \; x_u \rangle \langle x_v \; , \; x_v \rangle - \langle x_u \; , \; x_v \rangle^2$$

$$= E\,G - F^2$$

oleh karena $x_u \wedge x_v \neq 0$ maka terbuktilah bahwa :

$$E\,G - F^2 > 0$$

Selanjutnya kita akan membahas tentang besaran fundamental orde dua. Garis normal permukaan dititik P pada bidang lengkung ialah garis melalui titik P dan tegak lurus pada bidang singgung permukaan.



Gambar 5

N = normal satuan, merupakan vektor tegak lurus bidang singgung permukaan.

$$N \perp x_u,\ N \perp x_v \longrightarrow N = \lambda\, x_u \wedge x_v$$

$$x_u \wedge x_v = H \text{ maka } |N| = \lambda \, |x_u \wedge x_v|$$

$$\text{atau } 1 = \lambda \, H \longrightarrow \lambda = 1/H$$

sehingga diperoleh normal satuan pada permukaan sebagai berikut :

$$N = \frac{x_u \wedge x_v}{|x_u \wedge x_v|} \quad , \text{ dengan } H^2 = E\,G - F^2$$

bila

$$x_{uu} = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \quad , \quad x_{uv} = \frac{\partial^2 x}{\partial u \, \partial v} \quad , \quad x_{vv} = \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}$$

maka besaran orde dua dapat disajikan sebagai berikut :

$$e = \langle N , x_{uu} \rangle \quad , \quad f = \langle N , x_{uv} \rangle \quad , \quad g = \langle N , x_{vv} \rangle$$

$$\text{dan } \quad h^2 = e\,g - f^2$$

Jika $\langle N , x_u \rangle = 0$ didefferensialkan masing - masing terhadap u dan v berlaku :

a. $\langle N_u , x_u \rangle + \langle N , x_{uu} \rangle = 0$

$\langle N_u , x_u \rangle + e = 0$

$\langle N_u , x_u \rangle = -e$ ... (6)

b. $\langle N_v , x_u \rangle + \langle N , x_{uv} \rangle = 0$

$\langle N_v , x_u \rangle + f = 0$

$\langle N_v , x_u \rangle = -f$ ... (7)

Demikian pula bila $\langle N, x_v \rangle = 0$ didefferensialkan terhadap u dan v berlaku

a. $\langle N_u , x_v \rangle + \langle N , x_{uv} \rangle = 0$

$\langle N_u , x_v \rangle + f = 0$

$\langle N_u , x_v \rangle = -f$ ... (8)

b. $\langle N_v , x_v \rangle + \langle N , x_{vv} \rangle = 0$

$\langle N_v , x_v \rangle + g = 0$

$\langle N_v , x_v \rangle = -g$ ... (9)

$$\langle N_u , x_u \rangle = -e \qquad \ldots (6)$$

b. $\langle N_v , x_v \rangle + \langle N , x_{uv} \rangle = 0$

$$\langle N_v , x_u \rangle + f = 0$$

$$\langle N_v , x_u \rangle = -f \qquad \ldots (7)$$

Demikian pula bila $\langle N, x_v \rangle = 0$ didefferensialkan terhadap u dan v berlaku

a. $\langle N_u , x_v \rangle + \langle N , x_{uv} \rangle = 0$

$$\langle N_u , x_v \rangle + f = 0$$

$$\langle N_u , x_v \rangle = -f \qquad \ldots (8)$$

b. $\langle N_v , x_v \rangle + \langle N , x_{vv} \rangle = 0$

$$\langle N_v , x_v \rangle + g = 0$$

$$\langle N_v , x_v \rangle = -g \qquad \ldots (9)$$

2.11. PEMETAAN GAUSS PADA KOORDINAT LOKAL

Semua parametrisasi $x : U \subset R^2 \longrightarrow S$ dianggap sesuai dengan orientasi N dari S ; bahwa, dalam x(U),

$$N = \frac{x_u \wedge x_v}{|x_u \wedge x_v|}$$

Misal x(u,v) merupakan parametrisasi dititik $p \in S$ dari suatu permukaan S, dan misal $\alpha(t) = x(u(t)\ ,\ v(t))$ merupakan kurva terparameter di S, dengan $\alpha(0) = p$. Untuk lebih sederhananya, kita akan membuat perjanjian bahwa semua fungsi untuk tampilan dibawah mendapatkan harga - harganya dititik p.

Vektor singgung untuk $\alpha(t)$ di p adalah

$$\alpha' = x_u\, u' + x_v\, v'$$

dan

$$dN(\alpha') = N'(u(t)\ ,\ v(t)) = N_u\, u' + N_v\, v'.$$

Bila N_u dan N_v termasuk dalam $T_p(S)$, kita dapat menulis

$$N_u = a_{11}\, x_u + a_{21}\, x_v\ ,$$

$$N_v = a_{12}\, x_u + a_{22}\, x_v\ , \qquad \ldots (10)$$

dan selanjutnya,

$$dN(\alpha') = (a_{11}\, u' + a_{12}\, v')\, x_u + (a_{21}\, u' + a_{22}\, v')\, x_v$$

dari sini,

$$dN \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix}$$

Ini menunjukan bahwa dalam basis $\{x_u , x_v\}$, dN diberikan dengan matrix (a_{ij}), i, j = 1, 2. Perhatian bahwa matrix ini tidak perlu simetris, $\{x_u , x_v\}$ lengkap adalah basis ortonormal.

Dalam bagian lain, expresi dari bentuk fundamental kedua dalam basis $\{x_u , x_v\}$ diberikan dengan

$$II_p(\alpha') = - \langle dN(\alpha') , \alpha' \rangle$$

$$= - \langle N_u\, u' + N_v\, v' , x_u\, u' + x_v\, v' \rangle$$

$$= - \Big\{ \langle N_u , x_u \rangle (u')^2 + 2 \langle N_v , x_u \rangle u'\, v'$$

$$+ \langle N_v , x_v \rangle (v')^2 \Big\}$$

$$= e\, (u')^2 + 2\, f\, u'\, v' + g\, (v')^2$$

dimana, bila $\langle N , x_u \rangle = \langle N , x_v \rangle = 0$,

$$e = - \langle N_u , x_u \rangle = \langle N , x_{uu} \rangle,$$

$$f = - \langle N_v , x_u \rangle = \langle N , x_{uv} \rangle = \langle N , x_{vu} \rangle = - \langle N_u , x_u \rangle$$

$$g = - \langle N_v , x_v \rangle = \langle N , x_{vv} \rangle$$

Sekarang kita akan mendapatkan harga dari a_{ij} dalam istilah dari koefisien - koefisien e, f, g. Dari persamaan (10) kita mendapatkan

$$- f = \langle N_u , x_v \rangle = a_{11} \langle x_u , x_v \rangle + a_{21} \langle x_v , x_v \rangle$$

$$= a_{11} F + a_{22} G,$$

$$- f = \langle N_v , x_u \rangle = a_{12} \langle x_u , x_u \rangle + a_{22} \langle x_u , x_v \rangle$$

$$= a_{12} E + a_{22} F,$$

$$- e = \langle N_u , x_u \rangle = a_{11} \langle x_u , x_u \rangle + a_{21} \langle x_u , x_v \rangle$$

$$= a_{11} E + a_{21} F$$

$$- g = \langle N_v , x_v \rangle = a_{12} \langle x_u , x_v \rangle + a_{22} \langle x_v , x_v \rangle$$

$$= a_{12} F + a_{22} G. \qquad \ldots (11)$$

dimana E, F, dan G adalah koefisien - koefisien dari bentuk fundamental pertama dalam basis $\{x_u , x_v\}$. Hubungan (11) dapat diexpresikan dalam bentuk

$$- \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \qquad \ldots (12)$$

dari sini,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1}$$

dimana $[\ ]^{-1}$ maksudnya invers dari [ ]. Sehingga berdasarkan pengertian dari matriks Adjoin didapatkan harga - harga:

$$\text{Adj.} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix},$$

yaitu,

$$A_{11} = (+1)\ G, \qquad A_{12} = (-1)\ F$$
$$A_{21} = (-1)\ F, \qquad A_{22} = (+1)\ E$$

sehingga,

$$\text{Adj.} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix},$$

dan,

$$\det.\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} = E\,G - F^2$$

jadi,

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{E\,G - F^2}\begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix}$$

maka dapat ditulis:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{E\,G - F^2}\begin{bmatrix} -e & -f \\ -f & -g \end{bmatrix}\begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix}$$

Dari persamaan (12) kita bisa mendapatkan harga dari K:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} -e & -f \\ -f & -g \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}}$$

$$K = \det\,(a_{ij}) = \frac{e\,g - f^2}{E\,G - F^2}$$

2.12. PENENTUAN BESARNYA SIMBOL - SIMBOL CRYSTOPEL DARI PERSAMAAN GAUSS

Kita pakai vektor dasar N, x_u, x_v untuk memperoleh persamaan gauss dan besarnya simbol - simbol Crystophel dimana :

x_u = vektor singgung disuatu titik pada garis parameter v = konstan

x_v = vektor singgung disuatu titik pada garis parameter u = konstan .

Kita nyatakan x_{uu}, x_{uv}, x_{vv} dalam vektor - vektor dasar diatas sebagai berikut :

$$x_{uu} = \Gamma^1_{11}\ x_u + \Gamma^2_{11}\ x_v + eN \quad \ldots (13)$$

$$x_{uv} = \Gamma^1_{12}\ x_u + \Gamma^2_{12}\ x_v + fN \quad \ldots (14)$$

$$x_{vv} = \Gamma^1_{22}\ x_u + \Gamma^2_{22}\ x_v + gN \quad \ldots (15)$$

dengan Γ^1_{11}, Γ^2_{11}, Γ^1_{12}, Γ^2_{12}, Γ^1_{22}, Γ^2_{22} disebut simbol - simbol Crystopel yang harganya akan kita peroleh sebagai berikut :

$$\langle x_u , x_u \rangle = E$$

persamaan tersebut didefferensialkan masing - masing terhadap u dan v maka akan diperoleh:

a. $\langle x_{uu} , x_u \rangle + \langle x_u , x_{uu} \rangle = E_u$

$$2 \langle x_u , x_{uu} \rangle = E_u$$

$$\langle x_u , x_{uu}\rangle = \frac{1}{2} E_u$$

b. $\langle x_{uv} , x_u\rangle + \langle x_u , x_{uv}\rangle = E_v$

$$\langle x_u , x_{uv}\rangle = \frac{1}{2} E_v$$

maka persamaan (13) menjadi :

$$\langle x_u , x_{uu}\rangle = \Gamma^1_{11} \langle x_u , x_u\rangle + \Gamma^2_{11} \langle x_u , x_v\rangle + e\langle N , x_u\rangle$$

$$\frac{1}{2} E_u = \Gamma^1_{11} \langle x_u , x_u\rangle + \Gamma^2_{11} \langle x_u , x_v\rangle + 0$$

$$= \Gamma^1_{11} E + \Gamma^2_{11} F \qquad \ldots (16)$$

Demikiaan pula jika $\langle x_u , x_v\rangle = F$ didefferensialkan terhadap u dan v akan diperoleh :

a. $\langle x_{uu} , x_v\rangle + \langle x_u , x_{uv}\rangle = F_u$

$$\langle x_u , x_{uv}\rangle = \frac{1}{2} E_v$$

$$\langle x_{uu} , x_v\rangle + \frac{1}{2} E_v = F_u$$

$$\langle x_{uu} , x_v\rangle = F_u - \frac{1}{2} E_v \qquad \ldots (17)$$

b. $\langle x_{uv}, x_v\rangle + \langle x_u, x_{vv}\rangle = F_v$

$$\frac{1}{2} G_u + \langle x_u, x_{vv}\rangle = F_v$$

$$\langle x_u, x_{vv}\rangle = F_v - \frac{1}{2} G_u$$

Dari hasil - hasil diatas maka persamaan (13) menjadi sebagai berikut :

$$\langle x_{uu}, x_v\rangle = \Gamma^1_{11} \langle x_u, x_v\rangle + \Gamma^2_{11} \langle x_v, x_v\rangle + e\langle N, x_v\rangle$$

$$F_u - \frac{1}{2} E_v = \Gamma^1_{11} \langle x_u, x_v\rangle + \Gamma^2_{11} \langle x_v, x_v\rangle$$

$$F_u - \frac{1}{2} E_v = \Gamma^1_{11} F + \Gamma^2_{11} G \qquad \ldots (18)$$

Persamaan (16) dan persamaan (18) akan menghasilkan Γ^1_{11} dan Γ^2_{11} yaitu :

a. (16) x F $\longrightarrow \Gamma^1_{11} E F + \Gamma^2_{11} F^2 = \frac{1}{2} E_u F$

b. (18) x E $\longrightarrow \Gamma^1_{11} E F + \Gamma^2_{11} E G = E F_u - \frac{1}{2} E E_v$

Hasil a dan b dikurangkan hingga diperoleh :

$$\Gamma^2_{11} (F^2 - E G) = \frac{1}{2} E_u F - E F_u + \frac{1}{2} E E_v$$

atau $$\Gamma^{2}_{11} = \frac{E_u F - 2 E F_u + E E_v}{(F^2 - E G)}$$

$$\Gamma^{2}_{11} = \frac{2 E F_u - E_u F - E E_v}{2 H^2}$$

Jika persamaan (16) digandakan dengan G dan persamaan (18) digandakan dengan F maka diperoleh :

$$\text{a. } \Gamma^{1}_{11} E G + \Gamma^{2}_{11} F G = \frac{1}{2} E_u G$$

$$\text{b. } \Gamma^{1}_{11} F^2 + \Gamma^{2}_{11} G F = F F_u - \frac{1}{2} F E_v$$

$$\Gamma^{1}_{11} (E G - F^2) = \frac{1}{2} E_u G - F F_u + \frac{1}{2} F E_v$$

$$\Gamma^{1}_{11} = \frac{E_u G - 2 F F_u + F E_v}{2(E G - F^2)}$$

$$\Gamma^{1}_{11} = \frac{E_u G - 2 F F_u + F E_v}{2 H^2}$$

Dengan cara yang sama akan diperoleh simbol - simbol crystopel yang lain yaitu :

$$\Gamma^1_{12} = \frac{G\,E_v - F\,G_u}{2\,H^2}$$

$$\Gamma^2_{12} = \frac{E\,G_u - F\,E_v}{2\,H^2}$$

$$\Gamma^1_{22} = \frac{2\,G\,F_v - G\,G_u - F\,G_v}{2\,H^2}$$

$$\Gamma^2_{22} = \frac{E\,G_v - 2\,F\,F_v + F\,G_u}{2\,H^2}$$

Sehingga rumus (13), (14), (15) disebut rumus Gauss.

Sebagaimana kita lihat, expresi - expresi dari derivative x_u, x_v dan N dalam basis $\{x_u, x_v, N\}$ hanya melibatkan pengetahuan dari koefisien - koefisien fundamental pertama dan kedua dari S. Suatu jalan untuk mendapatkan relasi diantara koefisien - koefisien ini adalh mempertimbangkan expresi :

$$(x_{uu})_v - (x_{uv})_u = 0,$$

$$(x_{vv})_u - (x_{vu})_v = 0,$$

$$N_{uv} - N_{vu} = 0. \qquad \ldots (19)$$

Dengan mengenalkan harga harga dari (13), (14), (15), kita dapat menulis hubungan diatas dalam bentuk :

$$A_1\ x_u + B_1\ x_v + C_1\ N = 0$$

$$A_2\ x_u + B_2\ x_v + C_2\ N = 0$$

$$A_3\ x_u + B_3\ x_v + C_3\ N = 0 \qquad \ldots (20)$$

dimana A_i, B_i, C_i, $i = 1, 2, 3$ adalah fungsi E, F, G, e, f, g dan dari derivativenya. Bila vektor x_u, x_v, N adalah bebas linear, hubungan (20) bahwa disini ada 9 hubungan :

$$A_i = 0,\ B_i = 0,\ C_i = 0,\ i = 1, 2, 3$$

Sebagai contoh, kita akan menentukan hubungan $A_i = 0$, $B_i = 0$, $C_i = 0$. Dengan menggunakan harga - harga dari (13), (14), (15), hubungan pertama dari (19) dapat ditulis :

$$(x_{uu})_v - (x_{uv})_u = 0$$

sehingga diperoleh :

$$(\Gamma^1_{11}\ x_u + \Gamma^2_{11}\ x_v + eN)_v - (\Gamma^1_{12}\ x_u + \Gamma^2_{12}\ x_v + fN)_u = 0$$

$$(\Gamma^1_{11}\ x_u + \Gamma^2_{11}\ x_v + eN)_v = (\Gamma^1_{12}\ x_u + \Gamma^2_{12}\ x_v + fN)_u$$

$$\Gamma^1_{11}\ x_{uv} + \Gamma^2_{11}\ x_{vv} + eN_v + (\Gamma^1_{11})_v\ x_u + (\Gamma^2_{11})_v\ x_v + e_v\ N =$$

$$\Gamma^1_{12}\, x_{uu} + \Gamma^2_{12}\, x_{uv} + f\, N_u + (\Gamma^1_{12})_u\, x_u + (\Gamma^2_{12})_u\, x_v + f_u\, N$$

dengan menggunakan persamaan (13) lagi maka persamaan untuk koefisien - koefisien x_v diperoleh :

$$\Gamma^1_{11}\, \Gamma^2_{12} + \Gamma^2_{11}\, \Gamma^2_{22} + e\, a_{22} + (\Gamma^2_{11})_v = \Gamma^1_{12}\, \Gamma^2_{11} + \Gamma^2_{12}\, \Gamma^2_{12}$$

$$+ f\, a_{21} + (\Gamma^2_{12})_u$$

$$(\Gamma^2_{12})_u - (\Gamma^2_{11})_v + \Gamma^1_{12}\, \Gamma^2_{11} + \Gamma^2_{12}\, \Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11}\, \Gamma^2_{12} - \Gamma^2_{11}\, \Gamma^2_{22} =$$

$$e\, a_{22} - f\, a_{21}$$

sehingga,

$$e\, a_{22} - f\, a_{21} = e\, \frac{(f\, F - g\, E)}{E\, G - F^2} - f\, \frac{e\, F - f\, E}{E\, G - F^2}$$

$$= \frac{e\, f\, F - e\, G\, E - e\, f\, F + f^2\, E}{E\, G - F^2}$$

$$= - E\, \frac{e\, g - f^2}{E\, G - F^2}$$

$$= - E\, K. \qquad (21)$$

demikian pula untuk koefisien - koefisien dari x_u diperoleh :

$$\Gamma^1_{11}\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22} + e\,a_{12} + (\Gamma^1_{11})_v = \Gamma^1_{12}\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{12}$$

$$+ f\,a_{11} + (\Gamma^1_{12})_u$$

$$(\Gamma^1_{12})_u - (\Gamma^1_{11})_v + \Gamma^1_{12}\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{12} - \Gamma^1_{12}\Gamma^1_{11} - \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22} =$$

$$e\,a_{12} - f\,a_{11}$$

$$(\Gamma^1_{12})_u - (\Gamma^1_{11})_v + \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{12} - \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22} = e\,a_{12} - f\,a_{11}$$

$$e\,a_{12} - f\,a_{11} = e\,\frac{g\,F - f\,G}{E\,G - F^2} - f\,\frac{f\,F - e\,G}{E\,G - F^2}$$

$$= \frac{e\,g\,F - e\,f\,G - f^2\,F + e\,f\,G}{E\,G - F^2}$$

$$= \frac{e\,g\,F - f^2\,F}{E\,G - F^2}$$

$$= F\,\frac{e\,g - f^2}{E\,G - F^2}$$

$$= F\,K \qquad \ldots (22)$$