BAB II

MATERI PENUNJANG

Dalam tulisan ini akan sering dijumpai istilah seperti variabel random, proses random, kekonvergenan dan masih banyak lagi lainnya. Agar terdapat keseragaman pandangan dalam bab ini akan disajikan definisi-definisi, lemma serta teorema penunjang yang akan bermanfaat dalam mempelajari materi inti nantinya.

DEFINISI 2.1.

Suatu variabel random ξ adalah suatu fungsi dengan domain ruang sampel dan bernilai bilangan berkorespondensi dengan tiap-tiap hasil yang mungkin dari sebuah ekperimen.

Karena hasil-hasil (outcome) dari suatu eksperimen digambarkan oleh kejadian-kejadin elementer, maka suatu variabel random dapat digambarkan sebagai suatu fungsi dari suatu kejadian elementer, $\xi = f(u)$ untuk $u \in U$ dimana U adalah ruang sampel.

DEFINISI 2.2 :

Proses random $\xi(\theta)$ dengan θ diasumsikan suatu nilai dari himpunan riil Θ adalah fungsi random dengan parameter θ yang diartikan sebagai parameter waktu t.

Proses random disebut juga keluarga dari variabel random, yang tegantung pada suatu parameter θ yang diasumsikan nilai suatu himpunan Θ karena untuk suatu θ yang tetap, nilai $\xi(\theta)$ adalah random. Untuk menggambarkan setiap hubungan diantara tak berhingga banyak variabel random dengan nilai suatu fungsi random $\xi(\theta)$, jika diberikan semua kemungkinan diantara himpunan nilai fungsi random yang berhingga banyak ;

$\xi(\theta_1), \xi(\theta_2), \ldots\ldots \xi(\theta_n), \theta_i \in \Theta$, i = 1, 2, ...n...(1)

didefinisikan fungsi distribusi bersama

$F_{\theta_1, \theta_2, \ldots\ldots \theta_n}(x_1, x_2 \ldots\ldots x_n)$

$= P\{\xi(\theta_i) < x_1, \xi(\theta_2) < x_2, \ldots \xi(\theta_n) < x_n\}$ dari variabel random (1)

DEFINISI 2.3 :

Fungsi-fungai yang termasuk dalam keluarga

$F_{\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_n}(x_1, x_2 \ldots x_n)$ disebut distribusi dimensi berhingga dari fungsi random.

Selanjutnya akan dibicarakan barisan dari fungsi-fungsi $\zeta(\theta)$ yang beranggotakan fungsi-fungsi random $\xi_1(\theta), \xi_2(\theta), \ldots.\xi_m(\theta)$.

Sehingga dari barisan $\zeta(\theta_1), \zeta(\theta_2), \ldots\ldots\zeta(\theta_n)$ terdapat mn variabel dengan fungsi distribusi bersama

$F_{\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_n}(x_{11}, x_{12} \ldots x_{mn})$

$$= P\{\xi_1(\theta_1) < x_{11}, \xi_2(\theta_1) < x_{12}, \ldots \ \xi_m(\theta_n) < x_{nm}\}$$

dengan $\theta_i \in \Theta$ adalah himpunan dengan θ_i dimaksudkan sebagai parameter waktu t, dimana i = 1, 2, ...n

DEFINISI 2.4 :

Variabel-variabel random ξ_λ (untuk $\lambda \in I$; I adalah himpunan bilangan indeks) dikatakan saling bebas jika untuk sembarang n dan sembarang $\lambda_j \in I$ (j = 1,2,....n) fungsi distribusi bersama dari variabel-variabel ξ_{λ_1}, ξ_{λ_2}......ξ_{λ_n} sama dengan perkalian fungsi distribusi variabel ξ_{λ_j} :

$$P\{\xi_{\lambda_1} < a_1, \xi_{\lambda_2} < a_2, \ldots, \xi_{\lambda_j} < a_j\} = \prod_{j=1}^{n} P\{\xi_{\lambda_j} < a_j\}$$

DEFINISI 2.5 :

Suatu proses $\xi(t)$ yang terdefinisi pada Ξ dalam ruang dimensi $R^{(m)}$ dikatakan proses dengan pertambahan bebas jika untuk setiap $t_o < t_1 < \ldots < t_k$ dalam Ξ, nilai dari $\xi(t_o)$, $\xi(t_1) - \xi(t_o)$, ..., $\xi(t_k) - \xi(t_{k-1})$ adalah saling bebas

DEFINISI 2.6. :

Fungsi karakteristik dari variabel random ξ yang mempunyai fungsi distribusi $F_\xi(x)$ didefinisikan sebagai

$$f_\xi(t) = Ee^{it\xi} = \int e^{itx}\, d(F_\xi(x))$$

dan terdefinisi untuk semua t yang riil untuk setiap fungsi distribusi $F_\xi(x)$.

TEOREMA 2.1 :

Fungsi karakteristik dari jumlahan 2 variabel random yang saling bebas adalah produk dari fungsi-fungsi karakteristik dari masing-masing variabel random

Bukti :

Bila ξ dan η menunjukkan variabel random-variabel random yang saling bebas sehingga $e^{it\xi}$ dan $e^{it\eta}$ juga saling bebas. Menurut definisi tentang ekspektasi matematika yang mengatakan bahwa ekpektasi matematika dari produk variabel random yang saling bebas adalah produk dari ekspektasi matematika dari masing-masing variabel random yang ada.

Diperoleh :

$$Ee^{it(\xi+\eta)} = E\,[e^{it\xi}.e^{it\eta}]$$
$$= E\,e^{it\xi}.Ee^{it\eta}$$
$$= f_\xi(t)\,.\,f_\eta(t)$$

Dengan demikian terbukti bahwa

$$f(\xi+\eta)(t) = f_\xi(t)\,.\,f_\eta(t)$$

DEFINISI 2.7 :

Variabel random ξ dikatakan dapat dibagi secara tak berhingga bila untuk setiap bilangan alam dapat disajikan sebagai jumlahan

$\xi = \xi_{n1} + \xi_{n2} + \ldots . + \xi_{nn}$ dari n variabel random ξ_{n1}, ξ_{n2}, ..., ξ_{nn} yang saling bebas dan berdistribusi sama.

TEOREMA 2.2 :

Jika $f(t)$ adalah fungsi karakteristik dari suatu fungsi distribusi dapat dibagi secara tak berhingga, maka untuk setiap $c > 0$ fungsi $\{f(t)\}^c$ adalah juga suatu fungsi karakteristik.

Bukti :

Ambil $C = 1/n$, n bilangan alam maka ini sesuai dengan definisi 2.7. tentang variabel random yang dapat dibagi secara tak berhingga. Selanjutnya dengan mengacu pada teorema 2.1 (tentang multiflikasi fungsi karakteristik). Teorema berlaku untuk setiap $C > 0$, bilangan rasional. Sedangkan untuk $C > 0$ merupakan bilangan irrasional, fungsi $\{f(t)\}^c$ dapat didekati oleh fungsi $\{f(t)\}^{c_1}$ pada setiap interval berhingga t, dimana C_1 adalah suatu bilangan rasional.

Sebelum membicarakan fungsi karakteristik dari proses random dengan pertambahan bebas,berikut akan ditunjukkan fungsi karakteristik dari variabel random ξ yang berdistribusi normal dan juga Poisson.

Jika suatu variabel random ξ berdistribusi normal dengan ekspektasi matematika = a dan varian = σ^2, maka fungsi karakteristik dari ξ adalah :

$$f_\xi(t) = \int e^{itx}\, dF_\xi(x)$$

$$= \int e^{itx} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\, dx \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

dilakukan substitusi

$$Z = \frac{x-a}{\sigma} - it\sigma$$

$$dZ = \frac{1}{\sigma}\ dx$$

dari (2) diperoleh

$$f_{\xi}(t) = e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2} + iat} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sim}^{\sim} e^{-\frac{z^2}{2}}\ dz \quad ....(3)$$

jika $\int_{-\sim}^{\sim} e^{-\frac{z^2}{2}}\ dz = A$ ....(4)

dengan mengasumsikan produk dua integral sebagai integral rangkap dua

$$A^2 = \left[\int_{-\sim}^{\sim} e^{-\frac{z^2}{2}}\ dz \right]\left[\int_{-\sim}^{\sim} e^{-\frac{y^2}{2}}\ dy\right]$$

$$= \int_{-\sim}^{\sim} \int_{-\sim}^{\sim} e^{-\frac{1}{2}(z^2+y^2)}\ dz\ dy$$

Selanjutnya kita ubah variabel ke dalam koordinat polar dengan dilakukan substitusi :

$Z = r \sin\theta$ $\qquad$ $dzdy = r\ dr\ d\theta$

$y = r \cos\theta$

sehingga diperoleh :

$$A^2 = \int_0^{\sim} \int_0^{2\pi} re^{-\frac{1}{2}(r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta)} d\theta\ dr$$

$$= \int_0^{\sim} \int_0^{2\pi} re^{-\frac{1}{2}r^2}\ d\theta\ dr$$

$$= 2\pi \int_0^{\sim} re^{-\frac{1}{2}r^2}\ dr$$

$$= 2\pi \int_0^{\sim} re^{-\frac{1}{2}r^2}\ d(\frac{1}{2}r^2)$$

$$= -2\pi \left(e^{-x}\right) \Big|_{0}^{\infty}$$

$$= 2\pi$$

$$A = \sqrt{2\pi}$$

dari (4) diperoleh :

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz = \sqrt{2\pi}$, sehingga persamaan (3) menjadi

$$f_\xi(t) = e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2} + iat} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz$$

$$= e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2} + iat} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi}$$

$$= e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2} + iat}$$

Dengan demikian telah ditunjukkan bahwa fungsi karakteristik dari variabel ξ yang berdistribusi normal berbentuk :

$$f_\xi(t) = e^{-\frac{t^2\sigma^2}{2} + iat} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

Selanjutnya akan dibicarakan variabel random dengan distribusi Poisson. Diketahui bahwa :

$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ $(k = 0,1,2,\ldots\ldots)$, dimana $\lambda > 0$ adalah konstanta. Maka fungsi karakteristiknya

$$f_\xi(t) = E\, e^{it\xi}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk}\, P(\xi = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}}$$

$$= e^{\lambda(e^{it} - 1)}$$

Jadi fungsi karakteristik dari variabel random ξ yang berdistribusi Poison berbentuk

$$f_\xi(t) = e^{\lambda(e^{it} - 1)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Kembali akan membicarakan fungsi karakteristik dari variabel random dengan pertambahan bebas.

Dari (5) dan (6) jika ekspektasi matematika = γ = a distribusi normal dan Poisson bila dinyatakan dalam bentuk logaritma diperoleh

$$\mathrm{Log} f_t(\lambda) = t(i\gamma\lambda - \frac{\sigma^2\lambda^2}{2}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

$$\mathrm{Log} f_t(\lambda) = tc(e^{ih\lambda} - 1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

Akan dibentuk suatu fungsi yang menggabungkan kedua jenis distribusi tersebut dimana untuk distribusi Poison, tidak hanya loncatan dengan ketinggian tetap h, namun untuk semua loncatan. Anggaplah dalam interval (t, t+dt) suatu loncatan muncul dengan probabilitas c dt, dan fungsi distribusi dari ketinggian loncatan adalah P(h<u) = F(u). Dengan menggabungkan (7) dan (8) didapatkan :

$$\text{Log } f_t(\lambda) = t\left\{i\gamma\lambda - \frac{\sigma^2\lambda^2}{2} + C\int (e^{iu\lambda} - 1)dF(u)\right\} \quad ....(9)$$

Untuk mengatasi seringnya menghitung loncatan-loncatan dengan ketinggian kecil dan mungkin banyaknya juga tak hingga, didefinisikan dua fungsi M(u) dan N(u) dalam interval (t, t+dt) sehingga loncatan h dengan h < u < 0, muncul dengan probabilitas M(u) dt dan h > u > 0, muncul dengan probabilitas N(u) dt, Untuk u = 0 kedua fungsi ini menjadi tak hingga. Persamaan (9) menjadi

$$\text{Log } f_t(\lambda) = t\left\{i\gamma\lambda - \frac{\sigma^2\lambda^2}{2} + \int_{-\sim}^{0} (e^{iu\lambda} - 1)dM(u) + \int_{0}^{\sim} (e^{iu\lambda} - 1)dN(u)\right\} \quad ....(10)$$

dimana

$$\int_{-\sim}^{0} (e^{i\lambda u} - 1)\, dM(u) = \lim_{a \to 0} \int_{-\sim}^{a} (e^{i\lambda u} - 1)\, dM(u) \ , \ a < 0$$

$$\int_{0}^{\sim} (e^{i\lambda u} - 1)\, dN(u) = \lim_{a \to 0} \int_{a}^{\sim} (e^{i\lambda u} - 1)\, dN(u) \ , \ a > 0$$

Selanjutnya P. levy menemukan koreksi di bawah tanda integral persamaan menjadi :

$$\text{Log } f_t(\lambda) = t\left\{ i\gamma\lambda - \frac{\sigma^2\lambda^2}{2} + \int_{-\sim}^{0} \left(e^{i\lambda u} - 1 - \frac{i\lambda u}{1+u^2}\right) dM(u)\right.$$

$$\left. + \int_{0}^{\sim} \left(e^{i\lambda u} - 1 - \frac{i\lambda u}{1+u^2}\right) dN(u) \right\}$$

didefinisikan

1) $\frac{1+u^2}{u^2}\, dG(u) = dM(u)$ untuk $u < 0$

2) $\frac{1+u^2}{u^2}\, dG(u) = dN(u)$ untuk $u > 0$

3) loncatan dari $G(u)$ di titik $u = 0$ sama dengan σ^2 dan

$$\left[\left(e^{i\lambda u} - 1 - \frac{i\lambda u}{1+u^2}\right) \frac{1+u^2}{u^2}\right]_{u=0} = -\frac{\lambda^2}{2}, \qquad \ldots\ldots(11)$$

sehingga diperoleh :

$$\text{Log } f_t(\lambda) = t\left\{ i\gamma\lambda - \frac{\sigma^2\lambda^2}{2} + \int_{-\sim}^{0} \left(e^{i\lambda u} - 1 - \frac{i\lambda u}{1+u^2}\right) \frac{1+u^2}{u^2}\, dG(u)\right.$$

$$\left. + \int_{0}^{\sim} \left(e^{i\lambda u} - 1 - \frac{i\lambda u}{1+u^2}\right) \frac{1+u^2}{u^2}\, dG(u) + \frac{\sigma^2\lambda^2}{2} \right\}$$

$$\text{Log } f_t(\lambda) = t\left\{ i\gamma\lambda + \int \left(e^{i\lambda u} - 1 - \frac{i\lambda u}{1+u^2}\right) \frac{1+u^2}{u^2}\, dG(u), \right\}$$

(formula Levy dan Khin kchine)

dengan G adalah fungsi monoton yang tidak turun. Dengan mengembalikan ke bentuk semula didapatkan :

$$f_t(\lambda) = \exp\left\{t\left[i\gamma\lambda + \int \left(e^{i\lambda u} - 1 - \frac{i\lambda u}{1+u^2}\right)\frac{1+u^2}{u^2}\, dG(u)\right]\right\}$$

..............(12)

yang merupakan fungsi karakteristik dari proses dengan pertambahan bebas.

DEFINISI 2.8 :

Jika $\{A_n\}$ untuk n = 1,2 .... menunjukkan suatu barisan tak berhingga dari himpunan- himpunan.

Limit Superior $\overline{\text{Lim}}\ A_n$ dari barisan $\{A_n\}$ didefinisikan sebagai himpunan yang memuat titik-titik dari ruang U yang berada dalam beberapa himpunan-himpunan A_n.

Limit Inferior $\underline{\text{Lim}}\ A_n$ dari barisan $\{A_n\}$ didefinisikan sebagai semua himpunan dari titik-titik ruang U yang berada dalam semua himpunan-himpunan A_n untuk n = 1,2....

Jadi

$$\overline{\text{Lim}}\ A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

$$\underline{\text{Lim}}\ A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

Selanjutnya jika $\{A_n\}$, untuk $n = 1,2, \ldots$ adalah suatu barisan naik maka $\overline{\lim}\ A_n = \underline{\lim}\ A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$

Disisi lain jika $\{A_n\}$, untuk $n = 1,2, \ldots$ adalah suatu barisan turun maka $\overline{\lim}\ A_n = \underline{\lim}\ A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$

DEFINISI 2.9 :

Suatu barisan dari himpunan-himpunan $\{A_n\}$, untuk $n = 1,2,\ldots$ disebut konvergen bila $\overline{\lim}\ A_n = \underline{\lim}\ A_n$. Dalam hal ini harga bersama dari limit Superior dan limit Inferior dari barisan $\{A_n\}$ disebut Limit dari barisan $\{A_n\} = \lim A_n = \overline{\lim}\ A_n = \underline{\lim}\ A_n$

DEFINISI 2.10 :

Suatu fungsi kontinu $g(\bullet)$ dengan domain dan kodomain pada garis riil disebut konvek jika setiap x_o pada garis riil, terdapat suatu garis yang melalui titik $(x_o, g(x_o))$ dan terletak pada atau di bawah grafik fungsi $g(\bullet)$.

TEOREMA 2.3 (Pertidaksamaan JENSEN)

Misalkan X adalah variabel random dengan mean $E(x)$ dan g suatu fungsi konvek, maka $E[g(x)] \geq (g(E[x])$

Bukti :

Dari sebab $g(x)$ adalah kontinu dan konvek, maka terdapat suatu garis misalkan $\ell(x) = a + bx \leq g(x)$ dan $\ell(E[x]) = g(E[x])$. Selanjutnya dari definisi konvek, $\ell(x)$ adalah garis yang melalui titik $((E[x]), g(E[x]))$

$E[\ell(x)] = E[a + bx] = a + b\,E[x] = \ell(E[x])$.

Menurut sifat dari ekspektasi matematika,

$E[g_1(x)] \leq E[g_2(x)]$ jika $g_1(x) \leq g_2(x)$, untuk setiap x

Karena $0 \leq E[g_2(x) - g_1(x)] = E[g_2(x)] - E[g_1(x)]$

Sehingga diperoleh

$g(E[x]) = \ell(E[x]) = E[\ell(x)] \leq E[g(x)]$ atau

$$E[g(x)] \geq g(E[x])$$

DEFINISI 2.11. :

Suatu keluarga Q yang terdiri dari himpunan-himpunan bagian dari ruang topologi X disebut suatu σ- aljabar dalam X jika memenuhi :

(i) $X \in Q$

(ii) jika $A \in Q$, maka $A^c \in Q$, dimana A^c adalah komplemen dari A yang berhubungan dengan X

(iii) Jika $A = \bigcup_{n=1} A_n$ dan jika $A_n \in Q$ untuk n = 1, 2, ...
maka $A \in Q$

Contoh 2.1 :

$X = \{1, 2, 3, 4\}$

$2^X = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\} \{4\}, \{1,2\}, \{1, 3\}, \{1,4\}, \{2,3\},$
$\{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \}$

$Q = \{\emptyset, \{1\}, \{4\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}, \{2,3,4\}, X\}$

Misalkan :

$A_1 : \emptyset$ $\quad A_3 : \{4\}$ $\quad A_5 : \{2,3\}$ $\quad A_7 : \{2,3,4\}$

$A_2 : \{1\}$ $\quad A_4 : \{1,4\}$ $\quad A_6 : \{1,2,3\}$ $\quad A_8 : X$

Akan dibuktikan bahwa Q adalah suatu σ- aljabar dalam X.

Bukti :

(i) $X \in Q$

(ii) $\emptyset \in Q$ maka $\emptyset^c = X \in Q$

$\{1\} \in Q$ maka $\{1\}^c = \{2,3,4\} \in Q$

$\{4\} \in Q$ maka $\{4\}^c = \{1,2,3\} \in Q$

$\{1,4\} \in Q$ maka $\{1,4\}^c = \{2,3\} \in Q$

$\{2,3\} \in Q$ maka $\{2,3\}^c = \{1,4\} \in Q$

$\{1,2,3\} \in Q$ maka $\{1,2,3\}^c = \{4\} \in Q$

$\{2,3,4\} \in Q$ maka $\{2,3,4\}^c = \{1\} \in Q$

$X \in Q$ maka $X^c = \emptyset \in Q$

(iii) jika

$A_1 \cup A_2 = \emptyset \cup \{1\} = \{1\} \in Q$

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \emptyset \cup \{1\} \cup \{4\} = \{1,4\} \in Q$

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = \emptyset \cup \{1\} \cup \{4\} \cup \{1,4\} = \{1,4\} \in Q$

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 = \emptyset \cup \{1\} \cup \{4\} \cup \{1,4\} \cup \{2,3\} = X \in Q$

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 = \emptyset \cup \{1\} \cup \{4\} \cup \{1,4\} \cup \{2,3\} \cup \{1,2,3\} = X \in Q$

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7 = \emptyset \cup \{1\} \cup \{4\} \cup \{1,4\} \cup \{2,3\} \cup \{1,2,3\} \cup \{2,3,4\} = X \in Q$

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6 \cup A_7 \cup A_8 = \emptyset \cup \{1\} \cup \{4\} \cup \{1,4\} \cup \{2,3\} \cup \{1,2,3\} \cup \{2,3,4\} \cup X = X \in Q$

Sehingga dengan demikian Q adalah σ- aljabar dalam X

DEFINISI 2.12

Jika suatu σ- aljabar dari himpunan Q didefinisikan pada suatu himpunan U dan suatu ukuran μ didefinisikan pada Q, maka himpunan U disebut suatu ruang dengan ukuran {U, Q, μ} atau suatu ruang terukur.

DEFINISI 2.13

Suatu ruang terukur {U X V, Q_3, $\mathcal{V}$} disebut produk dari ruang-ruang terukur {U, Q_1, μ_1} dan {v, Q_2, μ_2}, σ-aljabar Q_3 disebut produk dari σ-aljabar Q_1 dan Q_2 dan ukuran $\mathcal{V}$ disebut produk dari ukran μ_1 dan μ_2 ($\mathcal{V} = \mu_1 \times \mu_2$).

DEFINISI 2.14

Suatu fungsi dari variabel tunggal ($v \in V$) didefinisikan dengan persamaan $f_{u.}(v) = f_{u.}(u,v)$ dimana u tetap disebut seksi u dari fungsi f(u,v) dan ditulis $f_{u.}(u,v) = f_{u.}(v)$. Demikian pula halnya untuk seksi v dari fungsi f(u,v) dan ditulis $f_{.v}(u,v) = f_{.v}(u)$ dimana v tetap.

TEOREMA 2.4 :

Misalkan $g(x_1,x_2)$ merupakan suatu fungsi terukur yang berhingga pada σ- aljabar $\beta^{(2)}$ dan ξ_1, ξ_2 merupakan elemen variabel random yang saling bebas.

Jika $E\,|g(\xi_1, \xi_2)| < \sim$, maka $\varphi(x) = E\ g\ (x, \xi_2)$ adalah suatu fungsi σ- aljabar β_1 dari x dan $E\ g(\xi_1, \xi_2) = E\varphi(\xi_1)$

atau $E\ g(\xi_1, \xi_2) = \int_{X_1} \mu_1(\alpha x_1) \int_{X_2} g(x_1, x_2)\mu_2(dx_2)$

Bukti :

Menurut Teorema Fubini, jika diketahui ruang-ruang terukur $\{U, Q_1, \mu_1\}$ $\{V, Q_2, \mu_2\}$ dan produk dari keduanya adalah ruang terukur $\{ UxV, Q_3, \nu \}$ μ_1 dan μ_2 berhingga dan f(u,v) adalah fungsi yang terintegral ν pada σ-aljabar Q_3 yang terukur. Kemudian untuk setiap $f_{u.}(v)$ dari fungsi f(u,v) adalah σ-aljabar Q_2 yang terukur, demikian pula untuk $f_{.v}(u)$ dari fungsi f(u,v) adalah σ-aljabar Q_1 yang terukur. Diperoleh :

$$\int_{uxv} f(u,v)\, \nu\, (du \times dv) = \int_u \mu_1(du) \int_v f_{u.}(u,v)\, \mu_2(dv)$$

Kembali pada teorema 2.4.

Jika $g(x_1, x_2)$ menunjukkan fungsi terukur yang berhingga pada σ-aljabar $\beta^{(2)}$ dengan ξ_1, ξ_2 merupakan elemen random yang saling bebas.

Misalkan diberikan ruang-ruang terukur $\{ x_1, Q_1, \mu_1 \}$, $\{x_2, Q_2, \mu_2\}$, dengan produk dari keduanya diberikan oleh $\{X_1 \times X_2, \sigma (Q_1 x Q_2), \nu = (\mu_1 x \mu_2)\}$. Untuk x_1 tetap dari $g(x_1,x_2)$ ditulis dengan $g_{x_1.}(x_1, x_2)$ adalah fungsi terukur pada σ-aljabar Q_2 dan untuk x_2 tetap dari $g(x_1, x_2)$ ditulis sebagai $g_{.x_2}(x_1, x_2)$ merupakan fungsi terukur pada σ-aljabar Q_1

Jika diketahui

$$\begin{aligned} \varphi(x_1) &= Eg(x_1, \xi_2) \text{ atau untuk } x_2 \text{ tetap dari } g(x_1, x_2) \\ &= Eg_{.x_2}(x_1, x_2) = \int_{x_1} g(x_1,x_2)\ \mu_1(dx_1) \end{aligned}$$

Dari sebab

$$Eg(x_1, x_2) = \int_{x_1 \times x_2} g(x_1, x_2)(\mu_1 \times \mu_2)(dX_1 \times dX_2)$$

$$= \int_{x_2} \mu_2(dX_2) \int_{X_1} g(x_1, x_2)\mu_1(dx_1)$$

$$= \int_{X_2} \varphi(x_1)\, \mu_2(dX_2)$$

$$= E\,\varphi(x_1)$$

Karena ξ_1, ξ_2 masing-masing adalah elemen random dari variabel random x_1 dan x_2, maka

$E\, g(\xi_1, \xi_2) = E\varphi(\xi_1)$

Dengan demikian teorema telah terbukti.

TEOREMA 2.5.

Jika $\sum_{n=1}^{\sim} P(A_n) < \sim$, maka $\overline{\text{limit}}\ A_n$ mempunyai probabilitas 0

Bukti :

Dari definisi 2.8 didapatkan $\overline{\text{limit}}\ A_n = \bigcap_{n=1}^{\sim} \bigcup_{k=n}^{\sim} A_k$

sehingga $P(\overline{\lim}\ A_n) = P(\bigcap_{n=1}^{\sim} \bigcup_{k=n}^{\sim} A_k)$

$$= \lim_{n \to \sim} P(\bigcup_{k=n}^{\sim} A_k) \le \lim_{n \to \sim} \sum_{k=n}^{\sim} P(A_k) = 0$$

TEOREMA 2.6. (BOREL - CANTELLI)

$\{A_n\}$ merupakan suatu barisan event-event yang saling bebas. Maka probabilitas dari event $\overline{\lim}\, A_n$ adalah 0 atau 1 jika barisan $\sum_{n=1}^{\sim} P(A_n)$ konvergen atau divergen.

Bukti :

Berdasarkan sifat barisan divergen bahwa

$\sum_{n=1}^{\sim} P(A_n) = \sim$, sehingga : $P(\overline{\lim}\, A_n) = 1$

bila : $A^* = \overline{\lim}\, A_n$, maka :

$$U \setminus A^* = U \setminus \bigcap_{n=1}^{\sim} \bigcup_{k=n}^{\sim} A_k = \bigcup_{n=1}^{\sim} \bigcap_{k=n}^{\sim} (U \setminus A_k)$$

dan

$$P(U \setminus A^*) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\sim} \bigcap_{k=n}^{\sim} (U \setminus A_k) \right)$$

$$= \lim_{n \to \sim} P\left(\bigcap_{k=n}^{\sim} (U \setminus A_k) \right)$$

$$= \lim_{n \to \sim} \prod_{k=n}^{\sim} P(U \setminus A_k)$$

$$= \lim_{n \to \sim} \prod_{k=n}^{\sim} (1 - P(A_k))$$

$$= 0$$

Selanjutnya akan disajikan suatu pertidaksamaan penting yang menyatakan batas probabilitas dari jumlahan parsial yang maksimum dari suatu jumlahan dari variabel-variabel random yang saling bebas yang diasumsikan suatu nilai. Pertidaksamaan tersebut adalah Pertidaksamaan Kolmogorov. Untuk itu diasumsikan bahwa $\{\xi_n\}$ untuk n = 1,2,... adalah suatu barisan dari variabel-variabel random yang saling bebas didefinisikan

$$\zeta_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \ ; \ n = 1,2, \ldots..$$

dan diasumsikan $\zeta_o = 0$ jika $\lambda(A)$ menunjukkan fungsi karakteristik dari event A, dimana $\lambda(A) = 1$ jika event A muncul dan $\lambda(A) = 0$ maka event A tidak muncul.

TEOREMA 2.7. (Pertidaksamaan Kolmogorov)

Jika $E\xi_n = 0$ untuk n = 1,2, ... Jika g(x) menunjukkan fungsi kontinu konvek non negatif yang tidak turun untuk $x \geq 0$. Dan t menunjukkan suatu harga positif, maka :

$$P\left\{ \max_{1 \leq k \leq n} |\zeta_k| \geq t \right\} \leq \frac{Eg(|\zeta n|)}{g(t)}$$

Bukti :

Misalkan A_k, untuk k = 1,2,.....n menunjukkan event

$$A_k = \left\{ |\zeta_1| < t \ , \ \ldots.|\zeta_{k-1}| < t, \ |\zeta_k| \geq t \right\}$$

event-event A_k adalah terpisah dan $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$

adalah event $\left\{\max_{1\le k\le n} |\zeta_k| \ge t\right\}$ sehingga diperoleh :

$$Eg\,(|\zeta n|) \ge E\sum_{k=1}^{n}\lambda(A_k)g(|\zeta_n|) = \sum_{k=1}^{n} E\lambda(A_k)g(|\zeta_k+(\zeta_n-\zeta_k)|)$$

Karena variabel-variabel ξ_k adalah saling bebas maka berdasarkan teorema 2.4 diperoleh :

$$E\lambda(A_k)g(|\zeta_k+(\zeta_n-\zeta_k)|) = E\lambda(A_k)\ g_k(|\zeta_k|)$$

dimana

$g_k(|x|) = Eg(|x+\zeta_n-\zeta_k|)$ Karena fungsi $|x|$ adalah fungsi yang konvek dan dengan pengaplikasian pertidaksamaan Jensen, maka diperoleh

$$g_k(|x|) = Eg(|x+\zeta_n-\zeta_k|) \ge g(E.|x+\zeta_n-\zeta_k|)$$

$$\ge g(|x+E(\zeta_n-\zeta_k)|) = g(|x|)$$

Maka :

$$Eg(|\zeta_n|) \ge E\sum_{k=1}^{n}\lambda(A_k)g_k(|\zeta_k|)$$

$$\ge E\sum_{k=1}^{n}\lambda(A_k)g\ (|\zeta_k|)$$

$$\ge E\sum_{k=1}^{n}\lambda(A_k)g(t) = g(t)\ P\left\{\max_{1\le k\le n}|\zeta_k| \ge t\right\}$$

karena $g(t)\ P\left\{\max_{1\le k\le n}|\zeta_k| \ge t\right\} \le Eg\ |\zeta_n|$

sehingga

$$P\left\{\max_{1\le k\le n} |\zeta_k| \ge t\right\} \le \frac{Eg\ |\zeta_n|}{g(t)}$$

(Digunakan kenyataan bahwa jika event A terjadi, maka $|\zeta_k| > t$)

Jika ditentukan $g(x) = x^2$, maka pertidaksamaan Kolmogorov menjadi

$$P\left\{\max_{1\le k\le n} |\zeta_k| \ge t\right\} \le \frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2$$

dimana $\sigma^2_k = E\ \xi_k^2 = D\xi_k$

Bukti :

$$P\left\{\max_{1\le k\le n} |\zeta_k| \ge t\right\} \le \frac{Eg(|\zeta n|)}{g(t)}$$

$$P\left\{\max_{1\le k\le n} |\zeta_k| \ge t\right\} \le \frac{E(|\zeta n|)^2}{t^2}$$

$$P\left\{\max_{1\le k\le n} |\zeta_k| \ge t\right\} \le \frac{\sigma^2(|\zeta n|)}{t^2}$$

$$P\left\{\max_{1\le k\le n} |\zeta_k| \ge t\right\} \le \frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2$$

TEOREMA 2.8 :

Jika $E\xi_k = 0$, $D\xi_k = \sigma^2_k$ dan $\sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2 < \sim$

maka barisan dari variabel-variabel saling bebas $\sum_{k=1}^{n} \xi_k$ konvergen dengan probabilitas 1.

Bukti :

Didefinisikan $\zeta_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$, N menunjukkan event bahwa barisan $\sum_{k=1}^{n} \xi_k$ divergen. Dan didefinisikan juga :

$$E_{m,r} = \left\{ \sup_{k,k' \geq m} |\zeta_k - \zeta_{k'}| > \frac{1}{r} \right\}$$

Maka :

$$N = \bigcup_{r=1}^{\sim} \bigcap_{m} E_{m,r}$$

Dari pertidaksamaan Kolmogorov diperoleh :

$$P(N) = \lim_{r \to \sim} \lim_{m \to \sim} P(E_{m,r})$$

$$\leq \overline{\lim_{r \to \sim}} \; \overline{\lim_{m \to \sim}} \; r^2 \sum_{k=m}^{\sim} \sigma_k^2 = 0$$

Selanjutnya syarat perlu dan cukup konvergensi dari jumlahan variabel random yang saling bebas akan dibahas pada teorema berikut :

TEOREMA 2.9. (Teorema Tiga Baris Kolmogorov)

Syarat perlu dan cukup barisan variabel random $\sum_{k=1}^{\sim} \xi_k$ agar konvergen adalah untuk setiap $c > 0$, maka tiga barisan

$$\sum_{n=1}^{\sim} P\{|\xi_n| > c\} \qquad \text{........(13)}$$

$$\sum_{n=1}^{\sim} E\,\xi'_n \qquad \text{.........(14)}$$

$$\sum_{n=1}^{\sim} D\,\xi'_n \qquad \text{.........(15)}$$

adalah konvergen, dimana $\xi'_n = \xi_n$ untuk $|\xi_n| < c$, dan

$\xi'_n = 0$ untuk $|\xi_n| > c$

Bukti :

Syarat perlu :

Anggaplah barisan (13) konvergen, kemudian barisan dari suku-sukunya konvergen ke nol dengan probabilitas 1 karena hanya beberapa suku yang berhingga yang melebihi C. sehingga barisan $\sum_{n=1}^{\sim} \xi'_n$ konvergen dengan probabilitas 1. Jika $\{\eta_n\}$ untuk n = 1, 2, ... menunjukkan suatu barisan dari variabel-variabel random yang saling bebas yang tidak bergantung pada barisan $\{\xi'_n\}$ dan mempunyai distribusi yang sama dengan ξ'_n. Misalkan $\bar{\xi}_n = \xi'_n - \eta_n$. Maka barisan

$\sum_{n=1}^{\sim} \bar{\xi}_n$ konvergen dengan probabilitas 1, juga $E\,\bar{\xi}_n = 0, |\bar{\xi}_k| \le 2c$

$$D\,\bar{\xi}_n = 2\,D\xi'_n$$

Kekonvergenan dari barisan $\sum_{n=1}^{\sim} \bar{\xi}_n$ berarti

$$P\left\{\max_{1\le k\le n} \left|\sum_{k=1}^{n} \bar{\xi}_k\right| < \sim\right\} = 1$$

Oleh karena itu, untuk suatu t,

$P\left\{\max_{1\le k\le n} \left|\sum_{k=1}^{n} \bar{\xi}_k\right| \le t\right\} = a > 0$ sebagaimana diketahui

bersama jika $|\xi_m| < c_1$ maka $P\{\max_{1\le k\le n} |\sum_{k=1}^{n} \xi_k| \le t\} = \dfrac{(c+t)^2}{\sum_{k=1}^{n} \sigma^2_k}$

sehingga diperoleh

$$2\sum_{k=1}^{n} D\,\xi'_k = \sum_{k=1}^{n} D\bar{\xi}_k \le \frac{(2c+t)^2}{a},$$

yang membuktikan kekonvergenan barisan $\sum_{n=1}^{\sim} D\,\xi'_n$

Selanjutnya menurut teorema 2.8 barisan

$\sum_{n=1}^{\sim} \xi'_n - E\,\xi'_n$ konvergen dengan probabilitas 1. Ini kembali

menunjukkan kekonvergenan barisan (14).

Dari dasar teorema Borel-Contelli, barisan (13) harus

konvergen dari sebab bila barisan $\sum_{k=1}^{\sim} \xi_k$ konvergen

$|\xi_n|$ dapat melebihi c hanya untuk suatu bilangan berhingga dari n nilai.

Syarat cukup :

Berdasarkan Teorema 2.7. barisan :

$$\sum_{n=1}^{\sim} (\xi'_n - E\xi'_n)$$

konvergen dengan probabilitas 1. Karena barisan (14) konvergen maka barisan $\sum_{n=1}^{\infty} \xi'_n$ konvergen. Didefinisikan barisan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\xi'_n + \xi''_n)$$

dimana : $\xi''_n = \xi_n - \xi'_n$ hanya mempunyai beberapa suku yang berhingga yang tidak sama dengan nol (menurut syarat 13) dan Teorema Borel-Cantelli (Teorema 2.6.). Karena itu barisan $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ konvergen dengan probabilitas 1.

DEFINISI 2.15

Didefinisikan fungsi f pada selang terbuka (a,b), dan diambil sembarang titik p dimana $a < p \leq b$. Didefinisikan bahwa limit kiri f di P adalah q, atau dituliskan $f(p-) = q$ jika $\lim f(x_n) = q$ untuk setiap barisan (x_n) di dalam (a,p) sedemikian sehingga $x_n \longrightarrow p$. Untuk $a \leq p < b$, didefinisikan $f(p+) = s$ jika untuk setiap barisan (x_n) di dalam (p,b) dengan $x_n \longrightarrow p$ maka $\lim f(x_n) = s$.

Jika $p \in (a,b)$ maka $\lim_{x \to p} f(x)$ ada jika

$$f(p-) = f(p+) = \lim_{x \to p} f(x)$$

DEFINISI 2.16 :

Diberikan ruang metrik (x, d_1) dan (Y, d_2), $E \subset X$, $p \in E$ dan f fungsi dari E ke Y. Fungsi f dikatakan kontinu di titik p jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk setiap $x \in E$ dan $d_1(x,p) < \delta$ berlaku $d_2(f(x), f(p)) < \varepsilon$.

DEFINISI 2.17

Jika p suatu titik didalam domain fungsi f dan f tidak kontinu di p, maka dikatakan bahwa f diskontinu di p. Menurut keberadaan dari limit kiri dan limit kanan, dapat dibedakan dua macam titik diskontinu.

(1) jenis pertama (sering dikatakan bukan jenis kedua) yaitu jika $f(p-)$ dan $f(p+)$ ada.

Ada dua cara fungsi f mempunyai titik diskontinu jenis pertama di p.

(i) $f(p-) \neq f(p+)$ (dalam hal ini dikatakan terdapat loncatan sebesar $f(p+) - f(p-)$).

(ii) $f(p-) = f(p+) \neq f(p)$

(2) Jenis kedua

yaitu jika $f(p-)$ dan $f(p+)$ tidak ada.

Contoh 2.2

Didefinisikan fungsi f pada selang terbuka $(-3,1)$ oleh

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & (-3<x<-1) \\ -x-1, & (-1\le x< 0) \\ x+1, & (0\le x<1) \end{cases}$$

Akan ditentukan titik-titik dimana f kontinu dan diskontinu juga jenis diskontinuitasnya.

Penyelesaian :

Jelas bahwa f kontinu dalam selang $(-3,-1)$, $(-1,0)$ dan $(0,1)$ kerena dalam sub selang tersebut f adalah fungsi linier.

Di titik -1, kita mempunyai nilai $f(-1) = -(-1) - 1 = 0$, $f(-1-) = 0$ dan $f(-1+) = 0$ jadi $\underset{x \to -1}{\text{limit}}\ f(x) = 0 = f(-1-) = f(-1+)$, sehingga f kontinu di titik -1

Di titik 0, didapatkan $f(0) = 0 + 1 = 1$, $f(0-) = -1$, $f(0+) = 1$ jadi $\underset{x \to 0}{\text{limit}}\ f(x)$ tidak ada sehingga, f diskontinu dari titik 0

Karena $f(0-)$ dan $f(0+)$ keduanya ada, maka 0 adalah titik diskontinu jenis pertama dengan loncatan sebesar $1 - (-1) = 2$.