BAB III

UKURAN STOKASTIK DAN INTEGRAL STOKASTIK

Definisi 3.1

Suatu kelas himpunan $\mathfrak{M}$ disebut dekomposabel jika untuk sebarang $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathfrak{M}$ sedemikian sehingga $\Delta_1 \setminus \Delta_2 = \bigcup_{k=1} \Delta_k^*$, $\Delta_k^* \in \mathfrak{M}$, $\Delta_k^* \cap \Delta_r^* = \emptyset$ untuk $k \neq r$. dimana Δ_k^* adalah adjoint dari Δ_k.

Diberikan $\{U,\mathfrak{S},P\}$ menunjukkan suatu ruang probabilitas, L_2 menunjukkan L_2 $\{U,\mathfrak{S},P\}$, E menunjukkan sembarang himpunan, $\mathfrak{M}$ menunjukkan suatu keluarga dekomposabel yang merupakan himpunan bagian E.

Anggap masing – masing $\Delta \in \mathfrak{M}$ menyatakan suatu nilai komplek variabel random $\mu(\Delta)$ memenuhi syarat-syarat sebagai berikut :

1. $\mu(\Delta) \in L_2$, $\mu(\emptyset) = 0$
2. $\mu(\Delta_1 U \Delta_2) = \mu(\Delta_1) + \mu(\Delta_2)$ (mod P)

   jika $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$
3. $E\left[\mu(\Delta_1)\overline{\mu(\Delta_2)}\right] = m(\Delta_1 \cap \Delta_2)$
4. $E\left[\mu(\Delta)\overline{\mu(\Delta)}\right] = E\,|\mu(\Delta)|^2 = m(\Delta)$

$m(\Delta)$: suatu fungsi yang didefinisikan pada $\mathfrak{M}$.

Kita akan menunjukkan keluarga variabel random $\{\mu(\Delta)\}$ untuk $\Delta \in \mathfrak{M}$ merupakan suatu Ukuran Stokastik Orthogonal Elementer dan akan menunjukkan $m(\Delta)$ merupakan fungsi Struktur.

Orthogonal suatu ukuran stokastik dinyatakan oleh syarat (3) jika $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$, sehingga Variabel $\mu(\Delta_1)$ dan $\mu(\Delta_2)$ adalah orthogonal.

Definisi 3.2

$m(\Delta)$ adalah suatu Ukuran Elementer m pada $\mathfrak{M}$ bila $m(\Delta)$ adalah nonnegatif yaitu :

$$m(\Delta) = E\left[\mu(\Delta)\,\overline{\mu(\Delta)}\right] \geq 0$$

$$m(\Delta) = E\,|\,\mu(\Delta)\,|^2 \geq 0\ , \quad m(\emptyset) = 0$$

dan $m(\Delta)$ adalah aditif yaitu :

$$\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$$

$$m(\Delta_1 \cap \Delta_2) = E\left(|\,\mu(\Delta_1) + \mu(\Delta_2)\,|^2\right)$$

$$= E\left[\left(\mu(\Delta_1)+\mu(\Delta_2)\right)\left(\overline{\mu(\Delta_1)}+\overline{\mu(\Delta_2)}\right)\right]$$

$$= E\left[\mu(\Delta_1)\,\overline{\mu(\Delta_1)}\right] + E\left[\mu(\Delta_1)\,\overline{\mu(\Delta_2)}\right] + E\left[\overline{\mu(\Delta_1)}\,\mu(\Delta_2)\right] + E\left[\overline{\mu(\Delta_2)}\,\overline{\mu(\Delta_2)}\right]$$

$$m(\Delta_1 \cap \Delta_2) = m(\Delta_1) + m(\Delta_2) + 2\,m(\Delta_1 \cap \Delta_2)$$

karena $(\Delta_1 \cap \Delta_2) = \emptyset$ maka $m(\Delta_1 \cap \Delta_2) = m(\emptyset) = 0$ sehingga

$$m(\Delta_1 \cap \Delta_2) = m(\Delta_1) + m(\Delta_2)$$

Definisi 3.3

Diberikan $L\{\mathfrak{M}\}$ menunjukkan kelas dengan elemen $f(x)$ ($f(x)$ adalah fungsi sederhana) dinyatakan dalam bentuk :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k\, \chi_{\Delta_k}(x) \quad ; \quad \Delta_k \in \mathfrak{M}$$

$$k = 1, 2, \ldots, n \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.1)$$

dimana n = sembarang bilangan natural

$\chi_A(x)$ = fungsi karakteristik himpunan A

Definisi 3.4

Diberikan integral stokastik pada suatu fungsi $f(x) \in L\{\mathfrak{M}\}$ yang menggunakan suatu ukuran stokastik elementer μ yaitu :

$$\eta = \int f(x)\ \mu(dx) = \int \sum_{k=1}^{n} c_k\ \chi_{\Delta_k}(x)\ \mu(dx)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} c_k \int \chi_{\Delta_k}\ \mu(dx)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} c_k \int_{\Delta_k} \mu(dx)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} c_k\ \mu(\Delta_k) \qquad \text{.................................}(3.2)$$

Karena $\mathfrak{M}$ adalah keluarga dekomposabel dari himpunan-himpunan, maka untuk setiap pasang fungsi $L\{\mathfrak{M}\}$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dengan fungsi karakteristik pada himpunan yang sama dalam $\mathfrak{M}$.

Sehingga jika f dan g berada dalam $L\{\mathfrak{M}\}$ maka mengamsusikan $g(x)$ diberikan oleh persamaan (3.1) yaitu :

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} d_k\ \chi_{\Delta_k}(x) \quad ;\ \Delta_k \cap \Delta_r = \emptyset \quad \text{untuk } k \neq r$$

Jika

$$\int f(x)\ \mu(dx) = \sum_{k=1}^{n} c_k\ \mu(\Delta_k)$$

$$\int g(x)\ \mu(dx) = \sum_{k=1}^{n} d_k\ \mu(\Delta_k)$$

$$\int \overline{g(x)\ \mu(dx)} = \sum_{k=1}^{n} \overline{d}_k\ \overline{\mu(\Delta_k)}$$

Sehingga menurut orthogonal μ yaitu :

$$E\left[\int f(x)\ \mu(dx) \int \overline{g(x)\ \mu(dx)}\right] = E\left[\sum_{k=1}^{n} c_k\ \mu(\Delta_k) \sum_{k=1}^{n} \overline{d}_k\ \overline{\mu(\Delta_k)}\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_k\ \overline{d}_k\ E\left[\mu(\Delta_k)\ \overline{\mu(\Delta_k)}\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} c_k\ \overline{d}_k\ m(\Delta_k) \ldots\ldots\ldots (3.3)$$

Kita mengasumsikan bahwa ukuran elementer m adalah subaditif dan karena itu dapat diperluas sebagai ukuran complete $\{E,\mathfrak{L},m\}$. Selanjutnya $L\{\mathfrak{M}\}$ adalah suatu himpunan bagian linier ruang Hilbert $L_2\{m\} = L_2\{E,\mathfrak{L},m\}$, dan $L_2\{m\}$ adalah closure dari $L\{\mathfrak{M}\}$ yang dalam topologi dihasilkan dengan perkalian skalar yaitu :

$$(f,g) = \int f(x)\ \overline{g(x)}\ m(dx) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.4)$$

Sehingga , persamaan (3.3) dapat ditulis dalam bentuk :

$$E\left[\int f(x)\ \mu(dx)\overline{\int g(x)\ \mu(dx)}\ \right]=\int\ f(x)\ \overline{g(x)}\ E\left[\ \mu(dx)\ \overline{\mu(dx)}\ \right]$$

$$=\int\ f(x)\ \overline{g(x)}\ m(dx)\ldots\ldots(3.5)$$

Untuk sembarang pasangan fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ berada dalam $L\{\mathfrak{M}\}$.

Sekarang memperkenalkan linear hull $L\{\mu\}$ pada keluarga variabel random $\{\mu(\Delta)\}$ untuk $\Delta\in\mathfrak{M}$ yaitu himpunan variabel random dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan (3.2) dan ruang $L_2\{\mu\}$ closure dari $L\{\mu\}$.

Definisi 3.5

Diberikan H_1 dan H_2 menunjukkan dua ruang Hilbert dengan perkalian skalar $(x,y)_1$ dan $(x,y)_2$. Suatu pemetaan V dari ruang H_1 onto H_2 disebut isometris jika $(Vx,Vy)_2=(x,y)_1$ untuk sebarang $x,y \in H_1$.

Misal G_i menunjukkan himpunan bagian dari H_i (i=1,2). $L(G_i)$ linier hull dari himpunan G_i dan $H(G_i)$ menunjukkan closure H_i. Misalkan terdapat pemetaan satu-satu $y = \psi(x)$ (untuk $x \in G_1$ dan $y \in G_2$) antara G_1 dan G_2 sedemikian sehingga $(x_1,x_2)_1 = (y_1,y_2)_2$, $y_i= \psi\ (x_i)$ (untuk i = 1,2) $x_i\in G_1$, $y_i\in G_2$.

Theorema 3.1

Suatu perkalian skalar satu - satu yang memenuhi pemetaan $y = \Psi(x)$ pada G_1 onto G_2 dapat diperluas menjadi pemetaan isometris dari $H(G_1)$ onto $H(G_2)$.

Bukti

Diberikan korespondensi $y=\psi(x)$ antara G_1 dan G_2 dalam dua langkah .Pertama kita tentukan korespondensi satu-satu antara $L(G_1)$ dan $L(G_2)$,kedua korespondensi antara $H(G_1)$ dan $H(G_2)$.

Pertama kita tentukan korespondensi satu-satu antara $L(G_1)$ dan $L(G_2)$. Selanjutnya diberikan

$$\psi\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \psi(x_k) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.6)$$

untuk sebarang n , $x_k \in G_1$ dan λ_k = bilangan kompleks (untuk k = 1,2,...,n). Kemudian kita ambil

$$z = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^{m} \mu_k x_k' \quad , \quad \text{dimana} \quad x_k \in G_1 \ , \ x_k' \in G_2$$

Kita mengamsumsikan n = m dan $x_k = x_k'$ (untuk k=1,2,...,n). Karena λ dan μ boleh sama dengan 0 sehingga

$$\left(\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \, \psi(x_k) - \sum_{k=1}^{n} \mu_k \, \psi(x_k) \|^2 \right)_2$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \, \psi(x_k) - \sum_{k=1}^{n} \mu_k \, \psi(x_k), \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \, \psi(x_k) - \sum_{k=1}^{n} \mu_k \, \psi(x_k) \right)_2$$

$$= \sum_{k,r=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \, \psi(x_k) - \sum_{k=1}^{n} \mu_k \, \psi(x_k) \right) \left(\sum_{r=1}^{n} \bar{\lambda}_k \, \psi(x_k) - \sum_{r=1}^{n} \bar{\mu}_k \, \psi(x_k) \right)_2$$

$$= \sum_{k,r=1}^{n} \left(\lambda_k \, \psi(x_k) - \mu_k \, \psi(x_k) \right) \left(\bar{\lambda}_r \, \psi(x_r) - \bar{\mu}_r \, \psi(x_r) \right)_2$$

$$= \sum_{k,r=1}^{n} \left(\lambda_k \bar{\lambda}_r \psi(x_k)\psi(x_r) - \lambda_k \bar{\mu}_r \psi(x_k)\psi(x_r) - \mu_k \bar{\lambda}_r \psi(x_k)\psi(x_r) + \right.$$

$$\left. + \mu_k \bar{\mu}_r \psi(x_k)\psi(x_r) \right)_2 .$$

$$= \sum_{k,r=1}^{n} \left(\left(\lambda_k \bar{\lambda}_r - \lambda_k \bar{\mu}_r - \mu_k \bar{\lambda}_r + \mu_k \bar{\mu}_r \right) \left(\sum_{k,r=1}^{n} \psi(x_k) \, \psi(x_r) \right) \right)_2$$

$$= \sum_{k,r=1}^{n} \left((\lambda_k - \mu_k)(\bar{\lambda}_r - \bar{\mu}_r) \, (\psi(x_k), \psi(x_r)) \right)_2$$

$$= \sum_{k,r=1}^{n} \left((\lambda_k - \mu_k)(\bar{\lambda}_r - \bar{\mu}_r) \, (x_k, x_r) \right)_1$$

$$= \left(\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \, x_k - \sum_{k=1}^{n} \mu_k \, x_k \|^2 \right)_1$$

$$= 0$$

Sehingga

$$\psi\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \; x_k\right) = \psi\left(\sum_{k=1}^{n} \mu_k \; x_k\right)$$

untuk setiap $y \in L(G_2)$ sehingga persamaan (3.6) menempatkan secara pasti satu elemen $x \in L(G_1)$ yang berk o respondensi dengan y.Selanjutnya dari persamaan (3.6) korespondensi ini adalah linier dan selanjutnya bentuk

$$\left[\sum^{n} \alpha_k y_k \; , \; \sum^{n} \beta_k y_k\right] = \sum_{k,r=1}^{n} \left[\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \; y_k \; \sum_{r=1}^{n} \overline{\beta}_r \; y_r\right]_2$$

$$= \sum_{k,r=1}^{n} \alpha_k \; \overline{\beta}_r \left[\sum_{k,r=1}^{n} y_k \; y_r\right]_2$$

$$= \sum_{k,r=1}^{n} \alpha_k \; \overline{\beta}_r \left[\,(y_k, \; y_r)\,\right]_2$$

$$= \sum_{k,r=1}^{n} \alpha_k, \overline{\beta}_r \left[\psi \; (x_k), \psi_r(x_r)\right]_2$$

$$= \sum_{k,r=1}^{n} \alpha_k \; \overline{\beta}_r \,(\, x_k , x_r)_1$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \; x_k \; , \; \sum_{k=1}^{n} \beta_k \; x_k\right)$$

$$= y_k$$

$$= \psi \; (x_k)$$

memenuhi perkalian skalar.

Kedua ditentukan korespondensi satu-satu antara $H(G_1)$ dan $H(G_2)$. Sekarang misalkan $x \in H(G_1)$ maka untuk $x = \lim x_n$ $\left[\text{dimana tiap } x_n \in L(G_1)\right]$ pada $n \to \infty$. Jika $y_n = \psi(x_n)$ untuk $y_n \in L(G_2)$ maka $\| y_n - y_{n+m} \|^2 = \| x_n - x_{n+m} \|^2 \to 0$ di mana $m > 0$, pada $n \to \infty$ yaitu $\lim y_n = y_0$ ada. Diberikan himpunan $y_0 = \psi(x)$. Untuk membuktikan single-valuedness diberikan sebarang barisan $\{x_n'\}$ dimana tiap-tiap $x_n' \in L(G_1)$ sedemikian sehingga $\lim x_n' = \lim x_n$. Kita ingin membuktikan bahwa $\lim y_n = \lim (x_n') = y_0$. Jika $x_{2n}'' = x_n'$ dan $x_{2n-1}'' = x_n (n=1,2,\ldots)$ maka $\lim x_n'' = x$ dan $\lim \psi(x_n'') = y''$ ada. Selanjutnya $\lim \psi(x_{2n}) = \lim \psi(x_n') = y'$ dan $y' = \lim \psi(x_{2n-1}'') = \lim \psi(x_n) = y_0$. Sekarang dengan mudah dibuktikan bahwa pemetaan $y = \psi(x)$ adalah pemetaan satu - satu dari $H(G_1)$ dan $H(G_2)$ serta pemetaan itu memenuhi perkalian skalar .

Lengkaplah bukti theorema ini.

Persamaan (3.2) menyebabkan suatu korespondensi isometris $\eta = \psi(f)$ antara $L\{\mathfrak{M}\}$ dan $L\{\mu\}$. Menurut theorema 3.1 korespondensi itu dapat diperluas sebagai korespondensi isometris antara $L_2\{m\}$ dan $L_2\{\mu\}$.

Kita definisikan $\eta = \psi(f)$ untuk $f \in L_2\{\mathfrak{M}\}$ dinyatakan dalam bentuk :

$$\int f(x)\, \mu(dx) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.7)$$

dan kita sebut *variabel random* η *integral stokastik dengan fungsi* $f(x)$ *yang menggunakan ukuran* μ. Dari definisi ini, kita peroleh :

Theorema 3.2

a. Untuk sembarang fungsi (3.1) maka nilai integral stokastik diberikan oleh persamaan (3.2).

b. Persamaan (3.5) berlaku untuk sembarang $f(x)$ dan $g(x)$ berada dalam $L_2\{E,\mathfrak{L},m\}$.

c. $\int [\alpha\ f(x) + \beta\ g(x)]\ \mu(dx) = \alpha \int f(x)\ \mu(dx) + \beta \int g(x)\ \mu(dx)$

Bukti :

a. Diketahui bahwa $f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k\ \chi_{\Delta_k}(x)$, $\Delta_k \in \mathfrak{M}$ untuk sembarang $f(x) \in L\{\mathfrak{M}\}$ maka menurut definisi 3.4

$$\int f(x)\ \mu(dx) = \int \sum_{k=1}^{n} c_k\ \chi_{\Delta_k}(x)\ \mu(dx)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} c_k \int \chi_{\Delta_k}\ \mu(dx)$$

maka menurut definisi (3.6) dapat dibentuk menjadi

$$\int f(x)\ \mu(dx) = \sum_{k=1}^{n} c_k \int_{\Delta_k} \mu(dx)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} c_k\ \mu(\Delta_k)$$

b. Pada per s amaan (3.5) diketahui bahwa sembarang fungsi $f(x), g(x) \in L\{\mathfrak{M}\}$ karena $L\{\mathfrak{M}\} \subset L\{E,\mathfrak{L},m\}$ maka berlaku untuk setiap fungsi $f(x), g(x) \in L\{E,\mathfrak{L},m\}$.

c. Diketahui bahwa $f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k\ \chi_{\Delta_k}(x)$ dan $g(x) = \sum_{k=1}^{n} d_k\ \chi_{\Delta_k}(x)$ sehingga

$$\int \left[\alpha f(x) + \beta g(x)\right] \mu(dx) = \int \left[\alpha \sum_{k=1}^{n} c_k\ \chi_{\Delta_k}(x) + \beta \sum_{k=1}^{n} d_k\ \chi_{\Delta_k}(x)\right] \mu(dx)$$

$$= \alpha \sum_{k=1}^{n} c_k \int \chi_{\Delta_k}(x)\ \mu(dx) +$$

$$+ \beta \sum_{k=1}^{n} d_k \int \chi_{\Delta_k}(x)\ \mu(dx)$$

$$= \alpha \sum_{k=1}^{n} c_k \int_{\Delta_k} \mu(dx) + \beta \sum_{k=1}^{n} d_k \int_{\Delta_k} \mu(dx)$$

$$= \alpha \sum_{k=1}^{n} c_k\ \mu(\Delta_k) + \beta \sum_{k=1}^{n} d_k\ \mu(\Delta_k)$$

sedangkan $\sum_{k=1}^{n} c_k\ \mu(\Delta_k) = \int f(x)\ \mu(dx)$

$$\sum_{k=1}^{n} d_k \, \mu(\Delta_k) = \int g(x) \, \mu(dx)$$

jadi

$$\int \left[\alpha f(x) + \beta g(x) \right] \mu(dx) = \alpha \int f(x) \, \mu(dx) + \beta \int g(x) \, \mu(dx)$$

terbuktilah theorema 3.2.

Definisi 3.6

Diberikan $\mathfrak{L}_o$ menunjukkan kelas dari himpunan $A \in \mathfrak{L}$ yang mana $m(\Delta) < \infty$. Diberikan suatu fungsi random $\tilde{\mu}(A)$:

$$\tilde{\mu}(A) = \int \chi_A(x) \, \mu(dx)$$

$$= \int_A \mu(dx) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.8)$$

Fungsi ini memenuhi sifat-sifat sebagai berikut :

a. $\tilde{\mu}(A)$ didefinisikan kelas pada himpunan $\mathfrak{L}_o$ sedemikian sehingga untuk sembarang $A \in \mathfrak{L}_o$ merupakan kelas pada himpunan $\{ B \cap A \}$ untuk $B \in \mathfrak{L}$ membentuk suatu σ - algebra dan $E|\tilde{\mu}(A)|^2 = m(A) < \infty$.

b. Jika $A_n \in \mathfrak{L}_o$ (untuk $n = 0, 1, 2, \ldots$), $A_o = \bigcup_{n=1} A_n$ dan $A_k \cap A_r = \emptyset$ untuk $k \neq r$ (k dan r keduanya positif) maka $\tilde{\mu}(A_o) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\mu}(A_n) \pmod{P}$;

c. $E\left[\tilde{\mu}(A)\ \overline{\tilde{\mu}(B)}\right] = m(A\cap B)$; $A,B \in \mathfrak{L}_0$

d. $\tilde{\mu}(\Delta) = \mu(\Delta)$ untuk $\Delta \in \mathfrak{M}$

Definisi 3.7

Suatu fungsi random yang memenuhi syarat a sampai c disebut *ukuran stokastik orthogonal.* Sedangkan untuk (d), $\mu(A)$ menyatakan nilai suatu ukuran stokastik elementer μ.

Selanjutnya akan mengenalkan integral stokastik yang menggunakan suatu ukuran orthogonal elementer μ (yang mana fungsi struktur adalah subaditif), dan mengenalkan integral stokastik yang menggunakan suatu ukuran $\tilde{\mu}$ yang didefinisikan oleh persamaan (3.7).

Definisi 3.8

Diberikan suatu integral stokastik yang melalui suatu interval. Pandang bahwa $\zeta(t)$ (untuk $a \le t < b$) adalah suatu proses random dengan kenaikan orthogonal, yaitu :

$$E\left[\left(\zeta(t_2) - \zeta(t_1)\right)\left(\overline{\zeta(t_4)} - \overline{\zeta(t_3)}\right)\right] = 0$$

untuk $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$.

Dan pandang proses random $\zeta(t)$ adalah kontinue kuadrat mean kiri yaitu :

$$E\left[|\zeta(t)-\zeta(\tau)|^2\right] \longrightarrow 0 \text{ , jika } \tau \uparrow t$$

Definisi 3.9

$\zeta(t)$ adalah proses random dengan parameter t.Dan $\zeta(a)$ adalah proses random dengan variabel a. Diberikan

$$F(t) = E\left[|\ \zeta(t) - \zeta(a)|^2\right]$$

Selanjutnya dari proses random dengan kenaikan orthogonal, maka proses random $\zeta(t)$ untuk $t_2 > t_1$ yaitu :

$$F(t_2) = E\left[|\ \zeta(t_2) - \zeta(t_1) + \zeta(t_1) - \zeta(a)|^2\right]$$

misal : $\zeta(t_2) - \zeta(t_1) = p$

$\zeta(t_1) - \zeta(a) = q$

maka

$$F(t_2) = E\left[|\ p + q\ |^2\right]$$

$$= E\left[\ (p + q)\ (\overline{p + q})\ \right]$$

$$= E\left[\ p\ \overline{p} + p\ \overline{q} + q\ \overline{p} + q\ \overline{q}\ \right]$$

$$= E\left[p\,\bar{p}\right] + E\left[p\,\bar{q}\right] + E\left[q\,\bar{p}\right] + E\left[q\,\bar{q}\right]$$

$$= E\left[\left(\zeta(t_2) - \zeta(t_1)\right)\left(\overline{\zeta(t_2) - \zeta(t_1)}\right)\right] +$$

$$+ E\left[\left(\zeta(t_2) - \zeta(t_1)\right)\left(\overline{\zeta(t_1) - \zeta(a)}\right)\right] +$$

$$+ E\left[\left(\zeta(t_1) - \zeta(a)\right)\left(\overline{\zeta(t_2) - \zeta(t_1)}\right)\right] +$$

$$+ E\left[\left(\zeta(t_1) - \zeta(a)\right)\left(\overline{\zeta(t_1) - \zeta(a)}\right)\right]$$

Kita ketahui bahwa :

$$E\left[\left(\zeta(t_2) - \zeta(t_1)\right)\left(\overline{\zeta(t_2) - \zeta(t_1)}\right)\right] = E\left[|\zeta(t_2) - \zeta(t_1)|^2\right]$$

$$E\left[\left(\zeta(t_1) - \zeta(a)\right)\left(\overline{\zeta(t_1) - \zeta(a)}\right)\right] = E\left[|\zeta(t_1) - \zeta(a)|^2\right]$$

$$= F(t_1)$$

Menurut definisi 3.8 berarti :

$$M\left[\left(\zeta(t_2) - \zeta(t_1)\right)\left(\overline{\zeta(t_1) - \zeta(a)}\right)\right] = 0$$

$$M\left[\left(\zeta(t_2) - \zeta(t_1)\right)\left(\overline{\zeta(t_1) - \zeta(a)}\right)\right] = 0$$

sehingga

$$F(t_2) = F(t_1) + M|\, \zeta(t_2) - \zeta(t_1)|^2$$

yang mana $F(t_2) \geq F(t_1)$ dan $F(t) = \lim_{\tau \uparrow t} F(\tau)$. selanjutnya $F(t)$ adalah suatu fungsi tak turun yang kontinue kiri.

Definisi 3.10

Diberikan $\mathfrak{M}$ menunjukkan kelas dari semua interval tertutup - kiri terbuka - kanan $\Delta = [t_1,t_2)$ sedemikian sehingga $a \leq t_1 < t_2 < b$. Diberikan :

$$\zeta\Big[\, [t_1,t_2)\Big] = \zeta(t_2) - \zeta(t_1)$$

dan

$$m\Big[\, [t_1,t_2)\Big] = F(t_2) - F(t_1)$$

selanjutnya $\mathfrak{M}$ adalah suatu klas dekomposabel dari himpunan-himpunan

$$E\left[\, \zeta(\Delta_1)\, \overline{\zeta(\Delta_2)}\right] = m(\Delta_1 \cap \Delta_2)$$

ζ adalah suatu ukuran stokastisk orthogonal elementer yang mana fungsi struktur dapat diperluas sebagai suatu ukuran.

Definisi 3.11

Diberikan integral stokastik Stieltjes :

$$\int_a^b f(t)\, d\,\zeta(t) = \int f(t)\,\zeta(dt)$$

dimana : $\zeta(t)$ = suatu proses dengan kenaikan ortogonal. Suatu integral stokastik yang melalui interval terbuka (a,b) atau melalui garis real $(-\infty,\infty)$ didefinisikan sama.

Diberikan μ menunjukkan suatu ukuran stokastik orthogonal dengan fungsi struktur m yaitu sebuah ukuran lengkap pada $\{E,\mathfrak{L}\}$. Dan $g(x)$ menunjukkan suatu anggota dari $L_2\{m\}$. Pandang

$$\lambda(A) = \int \chi_A(x)\; g(x)\; \mu(dx) \qquad ;\ A \in \mathfrak{L}$$

Jika

$$\lambda(A) = \int \chi_A(x)\; g(x)\; \mu(dx) \qquad ;\ A \in \mathfrak{L}\ ,$$

$$\lambda(B) = \int \chi_B(x)\; g(x)\; \mu(dx) \qquad ;\ B \in \mathfrak{L}\ ,$$

maka

$$E\left[\lambda(A)\ \overline{\lambda(B)}\right] = E\left[\int \chi_A(x)\ g(x)\ \mu(dx) \int \chi_B(x)\ \overline{g(x)}\ \overline{\mu(dx)}\ \right]$$

$$= E\left[\iint \chi_A(x)\ \chi_B(x)\ g(x)\ \overline{g(x)}\ \mu(dx)\ \overline{\mu(dx)}\ \right]$$

$$= \iint \chi_A(x)\ \chi_B(x)\ g(x)\ \overline{g(x)}\ E[\ \mu(dx)\ \overline{\mu(dx)}\ ]$$

$$= \int \chi_A(x)\ \chi_B(x)\ |g(x)|^2\ m(dx)$$

$$= \int_{A\cap B} |g(x)|^2\ m(dx)$$

Kemudian kita definisikan suatu ukuran baru pada $\mathfrak{L}$ yaitu :

$$\ell(A) = \int_A |g(x)|^2\ m(dx)$$

Inggat bahwa $\lambda(A)$ adalah ukuran stokastik orthogonal dengan fungsi struktur $\ell(A)$ untuk $A \in \mathfrak{L}$.

Lemma 3.1

Jika $g(x) \in L_2\{l\}$, maka $f(x)\ g(x) \in L_2\{m\}$ dan $\int f(x)\ \lambda(dx) = \int f(x)\ g(x)\ \mu(dx)$

Bukti :

Pernyataan lemma jelas untuk fungsi sederhana $f(x)$ dengan bentuk $f(x) = \sum_{k=1} c_k \chi_{A_k}(x)$; $A_k \in \mathfrak{L}$. Jika $\{f(x)\}$ adalah barisan fundamental dari fungsi sederhana dalam $L_2\{\ell\}$. Maka

$$\left\|\int f_n(x)\,\lambda(dx) - \int f_{n+m}(x)\,\lambda(dx)\right\|^2$$

$$= E\left|\int f_n(x)\,\lambda(dx) - \int f_{n+m}(x)\,\lambda(dx)\right|^2$$

$$= E\left[\left(\int f_n(x)\,\lambda(dx) - \int f_{n+m}(x)\,\lambda(dx)\right)\left(\int \overline{f_n(x)}\,\overline{\lambda(dx)} - \int \overline{f_{n+m}(x)}\,\overline{\lambda(dx)}\right)\right]$$

$$= E\left[\left(\int f_n(x)\,\lambda(dx) - f_{n+m}(x)\,\lambda(dx)\right)\left(\int \overline{f_n(x)}\,\overline{\lambda(dx)} - \overline{f_{n+m}(x)}\,\overline{\lambda(dx)}\right)\right]$$

$$= E\left[\int f_n(x)\overline{f_n(x)}\,\lambda(dx)\,\overline{\lambda(dx)} - \int f_n(x)\overline{f_{n+m}(x)}\,\lambda(dx)\,\overline{\lambda(dx)} + {} - \int f_{n+m}(x)\,\overline{f_n(x)}\,\lambda(dx)\,\overline{\lambda(dx)} + {} + \int f_{n+m}(x)\,\overline{f_{n+m}(x)}\,\lambda(dx)\,\overline{\lambda(dx)}\right]$$

$$= \left[\int f_n(x)\,\overline{f_n(x)} - \int f_n(x)\,\overline{f_{n+m}(x)} - \int f_{n+m}(x)\,\overline{f_n(x)} + \right.$$

$$+ \int f_{n+m}(x)\ \overline{f_{n+m}(x)}\Big]\ E\ [\ \lambda(dx)\ \bar{\lambda}(dx)\ ]$$

$$= \Big[\int f_n(x)\ \overline{f_n(x)} - \int f_n(x)\ \overline{f_{n+m}(x)} - \int f_{n+m}(x)\ \overline{f_n(x)} +$$

$$+ \int f_{n+m}(x)\ \overline{f_{n+m}(x)}\ \Big]\ \ell(dx)$$

$$= \int [\ f_n(x)\ \overline{f_n(x)} - f_n(x)\ \overline{f_{n+m}(x)} - f_{n+m}(x)\ \overline{f_n(x)} +$$

$$+ f_{n+m}(x)\ \overline{f_{n+m}(x)}\ ]\ \ell(dx)$$

kita ketahui bahwa $\ell(dx) = \int |f(x)|^2\ m(dx)$ maka

$$\|\int f_n(x)\ \lambda(dx) - \int f_{n+m}(x)\ \lambda(dx)\|^2$$

$$= \int |f_n(x) - f_{n+m}(x)|^2\ |f(x)|^2\ m(dx)$$

yang mana $\{f_n(x)g(x)\}$ adalah sebuah barisan fundamental berada dalam $L_2\{m\}$. Kemudian ambil limit $n \longrightarrow \infty$ dalam persamaan

$$\int f_n(x)\ \lambda(dx) = \int f_n(x)\ g(x)\ \mu(dx)$$

terbuktilah lemma 3.1.

Lemma 3.2

Jika $\lambda(A) = \int \chi_A(x)\, g(x)\, \mu(dx)$ untuk $g \in L_2\{m\}$

maka untuk setiap $A \in \mathfrak{L}_o$ berlaku bahwa

$$\mu(A) = \int_A \frac{1}{g(x)} \chi_A(x)\, m(dx)$$

$$= m(A) < \infty$$

Bukti :

Ingat $g(x) = 0$ pada himpunan ℓ – ukuran 0. Selanjutnya $\frac{1}{g(x)} \neq \infty$ (mod ℓ). Maka

$$\int \frac{1}{|g(x)|^2} \chi_A(x)\, \ell(dx) = \int \frac{1}{|g(x)|^2} \chi_A(x)\, |g(x)|^2\, m(dx)$$

$$= \int_A \frac{1}{|g(x)|^2} |g(x)|^2\, m(dx)$$

$$= \int_A m(dx)$$

$$= m(A) < \infty$$

sehingga dengan menggunakan lemma 3.1 didapat

$$\int \frac{1}{g(x)} \chi_A(x)\ \ell(dx) = \int \frac{1}{g(x)} \chi_A(x)\ g(x)\ \mu(dx)$$

$$= \int \chi_A(x)\ \mu(dx)$$

$$= \int_A \mu(dx)$$

$$= \mu(A)$$

terbuktilah untuk lemma 3.2.

Diberikan $\mathfrak{X}$ menyatakan suatu interval finite atau infinite, $\mathfrak{B}$ menyatakan σ - aljabar dari himpunan bagian Lebesgue- terukur dari $\mathfrak{X}$, serta ℓ menunjukkan ukuran Lebesgue.

Definisi 3.12

Misal fungsi random $g(t,x)$ adalah $(\mathfrak{B}\times\mathfrak{L})$-terukur,dengan $g(t,x) \in L_2\{l\times m\}$, dan $g(t,x) \in L_2\{m\}$ untuk sembarang $t \in \mathfrak{X}$. Pandang integral stokastik :

$$\xi(t) = \int g(t,x)\ \mu(dx) \quad \text{..........................(3.9)}$$

untuk setiap t integral ini didefinisikan dengan probabilitas 1.

Lemma 3.3

Integral stokastik (3.9) dapat didefinisikan sebagai suatu fungsi t sedemikian sehingga proses $\xi(t)$ adalah terukur.

Bukti :

Pandang fungsi random disajikan dengan bentuk :

$$g(t,x) = \sum_{k=1} c_k\, \chi_{B_k}(t)\, \chi_{A_k}(x) \qquad \text{.......................(3.10)}$$

untuk $B_k \in \mathfrak{B}$ dan $A_k \in \mathfrak{A}$, jika $\xi(t) = \int g(t,x)\, \mu(dx)$ maka fungsi random

$$\xi(t) = \int g(t,x)\, \mu(dx) = \int \sum_{k=1} c_k\, \chi_{B_k}(t)\, \chi_{A_k}(x)\, \mu(dx)$$

$$= \sum_{k=1} c_k\, \chi_{B_k}(t) \int \chi_{A_k}(x)\, \mu(dx)$$

$$= \sum_{k=1} c_k\, \chi_{B_k}(t) \int_{A_k} \mu(dx)$$

$$= \sum_{k=1} c_k\, \chi_{B_k}(t)\, \mu(A_k)$$

adalah suatu fungsi ($\mathfrak{B} \times \mathfrak{G}$) - terukur untuk $t \in \mathfrak{T}$ dan $u \in U$. Kemudian kita dapat menyusun suatu barisan pada fungsi sederhana $\{g_n(t,x)\}$ dari bentuk (3.10) sedemikian sehingga

$$\iint |g(t,x) - g_n(t,x)|^2 \; m(dx)dt \longrightarrow 0 \quad \text{jika} \quad n \longrightarrow \infty$$

Selanjutnya diberikan $\{\xi_n(t)\}$ menunjukkan sebuah barisan pada proses yang tersusun menurut persamaan (3.9) untuk $g=g_n$. Maka terdapat suatu proses $\tilde{\xi}(t)$ sedemikian sehingga

$$\int E \; | \; \tilde{\xi}(t) - \xi_n(t) \; |^2 \; dt \longrightarrow 0 \text{ jika } n \longrightarrow \infty$$

dan $\tilde{\xi}(t)$ adalah suatu fungsi $(\mathfrak{B} \times \mathfrak{S})$- terukur pada t dan u. Di sisi lain jika

$$\xi(t) = \int g(t,x) \; \mu(dx) \quad \text{dan} \quad \xi_n(t) = \int g_n(t,x) \; \mu(dx)$$

maka

$$\int E|\xi(t)-\xi_n(t)|^2 dt = \int E\left|\int g(t,x) \; \mu(dx) - \int g_n(t,x) \; \mu(dx)\right|^2 dt \longrightarrow 0$$

$$= \int E\left[\left(\int g(t,x) \; \mu(dx) - \int g_n(t,x) \; \mu(dx)\right)\right.$$

$$\left.\left(\int \overline{g(t,x)} \; \overline{\mu(dx)} - \int \overline{g_n(t,x)} \; \overline{\mu(dx)}\right)\right] dt \longrightarrow 0$$

$$= \int E\left[\left(\int g(t,x) \; \mu(dx) - g_n(t,x) \; \mu(dx)\right)\right.$$

$$\left.\left(\overline{g(t,x)} \; \overline{\mu(dx)} - \overline{g_n(t,x)} \; \overline{\mu(dx)}\right)\right] dt \longrightarrow 0$$

$$= \int\left[\int g(t,x)\overline{g(t,x)} - g(t,x)\overline{g_n(t,x)} + \right.$$

$$\left. - g_n(t,x)\overline{g(t,x)} + g_n(t,x)\,\overline{g_n(t,x)}\right]$$

$$\left\{ E\left[\mu(dx)\,\overline{\mu(dx)}\,\right]\right\} dt \longrightarrow 0$$

$$= \iint |g(t,x) - g_n(t,x)|^2\, m(dx)dt \longrightarrow 0$$

Sedemikian sehingga proses $\xi(t)$ dan $\tilde{\xi}(t)$ bersamaan hampir di mana - mana dalam $\mathfrak{T} \times \mathfrak{U}$. Kemudian kita definisikan

$$\xi'(t) = \begin{cases} \tilde{\xi}(t), & \text{jika } P\{\xi(t) \neq \tilde{\xi}(t)\} = 0 \\ \xi(t), & \text{jika } P\{\xi(t) \neq \tilde{\xi}(t)\} > 0 \end{cases}$$

proses $\xi'(t)$ adalah terukur dan stochastically equivalen dengan $\xi(t)$.

Lengkaplah pembuktian lemma 3.3.

Diberikan $\mathfrak{R}$ menunjukkan suatu ruang vektor komplek dengan dimensi p. Misalkan untuk setiap $\Delta \in \mathfrak{M}$ adalah menyatakan suatu nilai-vektor variabel random $\mu(\Delta)$ yang nilainya berada dalam $\mathfrak{R}$ yaitu :

$$\mu(\Delta) = \{\mu_1(\Delta), \mu_2(\Delta), \ldots, \mu_p(\Delta)\}$$

dan

$|\mu(\Delta)|$ menunjukkan norma dari vektor $\mu(\Delta)$ yaitu :

$$|\mu(\Delta)|^2 = \sum_{k=1}^{p} |\mu_k(\Delta)|^2$$

Definisi 3.12

Diberikan asumsi - asumsi sebagai berikut :

1. $E|\mu(\Delta)|^2 < \infty$; $\mu(\emptyset)=0$
2. $\mu(\Delta_1 \cup \Delta_2) = \mu(\Delta_1) + \mu(\Delta_2) (\text{mod } P)$; $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$
3. $E\left[\mu(\Delta_1)\, \overline{\mu(\Delta_2)}\right] = m_{kj}(\Delta_1 \cap \Delta_2)$; $\Delta_i \in \mathfrak{M}$

   $i = 1, 2, \ldots$, $k, j = 1, 2, \ldots, p$.

Kita sebut suatu keluarga vektor random $\{\mu(\Delta)\}$ untuk $\Delta \in \mathfrak{M}$ adalah *suatu ukuran stokastik nilai vektor elementer*. dan kita namakan matrik $m(\Delta) = m_{kj}(\Delta) = E\left[\mu(\Delta)\, \overline{\mu(\Delta)}\right]$ adalah *matrik struktur*.

Selanjutnya dari ketidaksamaan Cauchy - Schawarz

$$|m_{kj}(\Delta)| \le \sqrt{m_{kk}(\Delta_1) + m_{jj}(\Delta_2)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.11)$$

kemudian :

$$\sum_r |m_{kj}(\Delta_r)| \le \sqrt{\sum_r m_{kk}(\Delta_r) \sum_r m_{jj}(\Delta_r)} \quad \text{............}(3.12)$$

sedemikian sehingga fungsi himpunan $m_{kj}(\Delta_r)$ $(k,j=1,2,...,p)$ menjadi variasi terbatas pada Δ_o jika $m_{jj} < \infty$ untuk $j=1,2,...,p$. Kemudian diberikan

$$m_o(\Delta) = t_r\ m(\Delta) = \sum_{k=1}^{p} m_{kk}(\Delta)$$

Dari persamaan (3.11) $\sum_{r=1}^{mN} m_o(\Delta_r)$ mendekati 0 pada $N \longrightarrow \infty$ dan $\sum_{r=1}^{mN} |m_{kj}(\Delta_r)|$ mendekati 0 pada $N \longrightarrow \infty$. Selanjutnya fungsi $m_{kj}(\Delta)$ dapat diperluas menjadi fungsi himpunan aditif lengkap pada $\mathfrak{S}$ jika fungsi $m_o(\Delta)$ adalah aditif lengkap pada $\mathfrak{M}$.

Definisi 3.13

Diberikan integral stokastik pada $L\{\mathfrak{M}\}$ dengan persamaan

$$\eta = \int f(x)\ \mu(dx) = \int \sum_{k=1}^{n} c_k\ \chi_{\Delta_k}(x)\ \mu(dx)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} c_k \int \chi_{\Delta_k}(x)\ \mu(dx)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} c_k \int_{\Delta_k} \mu(dx)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} c_k \; \mu(\Delta_k) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.13)$$

dan

$$\eta = \int g(x) \; \mu(dx) = \int \sum_{k=1}^{n} d_k \; \chi_{\Delta_k}(x) \; \mu(dx)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} d_k \int \chi_{\Delta_k}(x) \; \mu(dx)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} d_k \int_{\Delta_k} \mu(dx)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} d_k \; \mu(\Delta_k)$$

dimana : $f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \; \chi_{A_k}(x)$;

$g(x) = \sum_{k=1}^{n} d_k \; \chi_{A_k}(x)$;

$\Delta_k \in \mathfrak{M}$ (untuk $k=1,2,\ldots,n$).

Nilai integral ini adalah suatu vektor random (suatu vektor kolom) yang nilainya berada dalam $\mathbb{R}^p$ dari vektor random η dengan bentuk (3.13).

Jika

$$\int f(x)\ \mu(dx) = \sum_{k=1}^{n} c_k\ \mu(\Delta_k)\ ,$$

$$\int g(x)\ \mu(dx) = \sum_{k=1}^{n} d_k\ \mu(\Delta_k)\ ,$$

maka

$$E\left[\int f(x)\ \mu(dx)\ \int \overline{g(x)}\ \overline{\mu(dx)}\right] = E\left[\sum_{k=1}^{n} c_k\ \mu(\Delta_k)\ \sum_{k=1}^{n} \bar{d}_k\ \overline{\mu(\Delta_k)}\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} c_k \sum_{k=1}^{n} \bar{d}_k\ E\left[\mu(\Delta_k)\ \overline{\mu(\Delta_k)}\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} c_k\ \bar{d}_k\ E\left[\mu(\Delta_k)\ \overline{\mu(\Delta_k)}\right]$$

$$E\left[\int f(x)\ \mu(dx)\ \int \overline{g(x)}\ \overline{\mu(dx)}\right] = \sum_{k=1}^{n} c_k\ \bar{d}_k\ m(\Delta_k)$$

sehingga dapat ditulis dalam bentuk

$$E\left[\int f(x)\mu(dx)\int \overline{g(x)}\ \overline{\mu(dx)}\right] = E\left[\int f(x)\ \overline{g(x)}\ \mu(dx)\ \overline{\mu(dx)}\right]$$

$$= \int f(x)\ \overline{g(x)}\ E\left[\mu(dx)\ \overline{\mu(dx)}\right]$$

$$= \int f(x)\ \overline{g(x)}\ m(dx) \ldots\ldots (3.14)$$

Selanjutnya jika $g(x) = f(x)$ maka didapat

$$E\left[\int f(x)\ \mu(dx) \int \overline{g(x)}\ \overline{\mu(dx)}\right] = E\left[\int f(x)\mu(dx) \int \overline{f(x)}\ \overline{\mu(dx)}\right]$$

$$= E\left|\int f(x)\ \mu(dx)\right|^2$$

untuk $E\left[\mu(dx)\ \mu(dx)\right] = m_o(dx)$ sehingga

$$E\left[\int f(x)\ \mu(dx) \int \overline{g(x)}\ \overline{\mu(dx)}\right] = \int |f(x)|^2\ m_o(dx) \ldots (3.15)$$

Definisi 3.14

Diberikan suatu perkalian skalar dalam $L\{\mathfrak{M}\}$ adalah

$$(f,g) = \text{tr} \int f(x)\ \overline{g(x)}\ m(dx)$$

$$= \text{trace} \int f(x)\ \overline{g(x)}\ m(dx)$$

Persamaan (3.13) menyatakan suatu pemetaan isometris $\eta=\psi(f)$ pada ruang $L\{\mathfrak{M}\}$ onto $L^p\{\mu\}$ jika perkalian skalar dari dua elemen η_1 dan η_2 pada $L^p\{\mu\}$ didefinisikan sebagai $E\left[\overline{\eta}_2\eta_1\right]$. Misalkan closure ruang variabel random $L^p\{\mu\}$

dinotasikan dengan $L_2^p\{\mu\}$ dan $L\{\mathfrak{M}\}$ dinotasikan dengan $L_2\{\mathfrak{M}\}$.

Dengan cara yang sama dari ketidaksamaan (3.11) kita dapat memperoleh ketidaksamaan (fungsi sederhana $f(x)$)

$$\int |f(x)|\,|m_{kj}|(dx) \leq \sqrt{\int |f(x)|\; m_{kk}(dx) \int |f(x)|\; m_{jj}(dx)} . \quad (3.16)$$

dimana :

$|m_{kj}|(A)$ = variasi absolut dari fungsi m_{kj}.