BAB II
MATERI DASAR

2.1 UKURAN

Pertama didefinisikan sebuah himpunan U dan sebuah kelas $\mathfrak{S}$ yang merupakan himpunan bagian himpunan bagian U, sehingga setiap kejadian A diartikan sebagai beberapa himpunan bagian dari U termasuk dalam $\mathfrak{S}$. Karena sebarang kejadian A diartikan sebagai gabungan (union) elemen-elemen dari U yang termasuk dalam A, titik-titik dalam himpunan U disebut Elemen Kejadian (Elementary Events) dan himpunan U disebut Ruang dari Elementary Event. Kelas $\mathfrak{S}$ adalah sebuah himpunan dari kejadian kejadian A.

Definisi 2.1.1

Ruang probabilitas adalah tripel $\{U,\mathfrak{S},P\}$ dimana U adalah ruang sampel , $\mathfrak{S}$ adalah ruang event dan P adalah suatu fungsi probabilitas dengan domain U dimana $P(U) = 1$.

Contoh 2.1.1

Suatu percobaan pengambilan acak suatu kelereng dari sebuah kotak yang berisi satu kelereng kuning, dua kelereng hijau, dan tiga kelereng coklat maka

$U = \{K,H,C\}$

$\mathfrak{S} = \left\{ \emptyset, \{K\}, \{H\}, \{C\}, \{K,H\}, \{K,C\}, \{H,C\}, \{U\} \right\}$

$P\{\emptyset\} = 0$ $\qquad P(\{K,H\}) = \frac{1}{2}$

$P(\{K\}) = \frac{1}{6}$ $\qquad P(\{K,C\}) = \frac{2}{3}$

$P(\{H\}) = \frac{1}{3}$ $\qquad P(\{H,C\}) = \frac{5}{6}$

$P(\{C\}) = \frac{1}{2}$ $\qquad P(\{U\}) = 1$

Definisi 2.1.2

Suatu aljabar dari himpunan-himpunan $\mathfrak{S}$ disebut suatu σ - aljabar apabila irisan dan union untuk sembarang barisan dari himpunan-himpunan $A_k \in \mathfrak{S}$, $k=1,2,\ldots$ berada dalam $\mathfrak{S}$. Himpunan-himpunan $A \in \mathfrak{S}$ disebut $\mathfrak{S}$ -*terukur* atau terukur pada $\mathfrak{S}$.

COntoh 2.1.2

Kita ambil :

$U = \{ 1,2,3 \}$

$\mathfrak{S} = \left\{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{U\} \right\}$

$A_1 = \{1,2\}$, $A_2 = \{2\}$, $A_3 = \{2,3\}$

maka

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{2\}$$

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{1,2,3\}$$

sehingga

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \in \mathfrak{S}$$

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \in \mathfrak{S}$$

Definisi 2.1.3

Suatu fungsi himpunan W dikatakan *additive* (atau additif berhingga) jika diasumsikan harga-harga tak berhingga (infinite) dan untuk sembarang barisan berhingga dari himpunan-himpunan $A_k \in \mathscr{A}$ (untuk k = 1,2,...,n) merupakan pasangan saling asing ($A_k \cap A_r = \emptyset$, untuk $k \neq r$ dimana k,r = 1,2,...,n) dan $\emptyset$ menunjukkan himpunan kosong sedemikian sehingga :

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathscr{A}$$

didapatkan bahwa :

$$W\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} W(A_k)$$

Jika persamaan ini dipenuhi untuk sembarang kumpulan countable (terhitung) dari himpunan yaitu jika :

$$W\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} W(A_k)$$

untuk sembarang barisan dari himpunan-himpunan $A_k \in \mathscr{A}$, dimana $A_k \cap A_r = \emptyset$ bila $k \neq r$ untuk $k,r = 1,2,\ldots,n$ sedemikian sehingga

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A \in \mathscr{A}$$

maka fungsi himpunan $W = W(A)$ dikatakan countably additive (additif lengkap).

Definisi 2.1.4

Sebuah fungsi himpunan nonnegatif $\mu=\mu(A)$ yang countably additive didefinisikan dalam sebuah σ - aljabar dari himpunan-himpunan $\mathfrak{S}$ dan memenuhi persamaan $\mu(\emptyset) = 0$ dinamakan *sebuah ukuran.*

Definisi 2.1.5

Jika sebuah σ-aljabar dari himpunan - himpunan $\mathfrak{S}$ didefinisikan pada sebuah himpunan U dan sebuah ukuran μ didefinisikan pada $\mathfrak{S}$, maka himpunan U dinamakan sebuah ruang dengan ukuran $\{U,\mathfrak{S},\mu\}$ atau sebuah ruang terukur.

2.2 FUNGSI - FUNGSI TERUKUR

Suatu variabel random dapat dianggap sebagai sebuah fungsi dari sebuah elemen kejadian $\xi=f(u), u\in U$. Pada theory dasar probabilitas suatu variabel random ξ secara lengkap ditunjukkan dengan fungsi distribusinya $F(x)=P\{\xi<x\}$.Jika dalam theory probabilitas digunakan elemen kejadian $\{\xi,x\}$ maka dalam ruang ukuran digunakan himpunan $\{u,f(u),x\}$.

Definisi 2.2.1

$\mathfrak{S}$ menunjukkan sebuah σ-aljabar dari himpunan-himpunan dalam ruang U. Diambil $f(u)$ menunjukkan sebuah fungsi yang didefinisikan pada sebuah himpunan $\mathfrak{S}$ – terukur N dan diasumsikan harga-harga real (kemungkinan $\pm\infty$). Masing-masing fungsi dikatakan $\mathfrak{S}$-terukur jika untuk setiap harga real x himpunan $\{u,f(u)\leq x\}$ adalah $\mathfrak{S}$ – terukur.

Definisi 2.2.2

Fungsi karakteristik $\chi_A(u)$ dari sebuah himpunan A didefinisikan sebagai fungsi yang sama dengan 1 untuk $u\in A$ dan sama dengan 0 untuk $u\notin A$. Jadi bisa dinyatakan :

$$\chi_A(u) = \begin{cases} 1 & \text{jika } u\in A \\ 0 & \text{jika } u\notin A \end{cases}$$

Catatan : $\chi_{A\cap B}(u) = \chi_A(u)\ \chi_B(u)$

$\chi_{A\cup B}(u) = \chi_A(u) + \chi_B(u)\quad (A\cap B=\emptyset)$

$\chi_A^c(u) = 1 - \chi_A(u)$

$\chi_A^c(u) =$ komplemen dari $\chi_A(u)$

Definisi 2.2.3

Sebuah fungsi $\mathfrak{S}$ - terukur , $f(u)$ dikatakan fungsi sederhana jika didefinisikan pada sebuah himpunan $N \in \mathfrak{S}$ dan diasumsikan harga $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (untuk $a_i \neq a_j$ jika $i \neq j$ untuk $i,j = 1,2,\ldots,n$). Kemudian kita Ambil himpunan $A_j = \{u;\ u \in N,\ f(u) = a_j\}$ untuk $j=1,2,\ldots,n$ maka A_j adalah $\mathfrak{S}$ - terukur dan

$$f(u) = \sum_{j=1}^{n} a_j\, \chi_{A_j}(u)\ ,\ u \in N \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.1)$$

dimana $\chi_{A_j}(u)$ adalah fungsi karakteristik dari himpunan A_j. Setiap fungsi yang digambarkan dalam bentuk (2.1) merupakan fungsi sederhana yang didefinisikan pada N.

2.3 INTEGRAL DALAM UKURAN

Dalam teori probabilitas, ditentukan sebuah variabel random ξ , sebuah harga khusus $E\,\xi$ yang dikenal sebagai ekspektasi matematika dari ξ. Jika variabel random ξ diasumsikan sebagai beberapa harga berhingga $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ekspektasi matematika diberikan oleh formula :

$$E\,\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i\ P\{\xi = x_i\}$$

dan memiliki sifat-sifat berikut :

1. $E(a\xi + b\eta) = aE\xi + bE\eta$

2. $\xi \leq \eta$ berarti $E\,\xi \leq E\,\eta$.

Jika variabel random diubah kesembarang fungsi yang didefinisikan dalam ruang terukur, konsep dari ekspektasi matematika menjadi konsep sebuah integral. Diasumsikan suatu ruang terukur $\{ U, \mathfrak{S}, \mu \}$ dan semua fungsi-fungsi adalah $\mathfrak{S}$ - terukur.

Definisi 2.3.1

$f(u)$ menunujukkan sebuah fungsi sederhana didefinisikan pada U dan diasumsikan nilai-nilai $c_1, c_2, \ldots, c_n$ maka

$$\int_U f(u)\,\mu(du) = \sum_{k=1}^{n} c_k\,\mu\,\{u\ ;\ f(u) = c_k\}$$

disebut *integral dengan fungsi yang melalui* U.

Definisi 2.3.2

Integral $E\,\xi = \int_U f(u)\;\mu(du)$ dengan $\xi = f(u)$ disebut dengan *ekspektasi matematika* dari variabel random dan dinotasikan dengan $E\,\xi$.

Berikut ini adalah sifat - sifat dari integral fungsi sederhana :

a. Jika $f(u) \geq 0$ berarti : $\int_u f(u)\ \mu(du) \geq 0$ ....(2.2)

b. $\int_u k\ f(u)\mu(du) = k \int_u f(u)\ \mu(du)$ ....(2.3)

dimana k adalah sembarang konstanta

c. $\int_u [f_1(u)+f_2(u)]\ \mu(du) = \int_u f_1(u)\ \mu(du) + \int_u f_2(u)\ \mu(du)$..(2.4)

Hanya persamaan (2.4) yang perlu dibuktikan. Misal $f_i(u)$, $(i=0,1,2)$ dapat disumsikan harga-harga $c_k^{(i)}$ (untuk $k=1,2,\ldots,m_i$), $f_0(u) = f_1(u) + f_2(u)$ dan

$$A_k^{(i)} = \left\{ u;\ f_{(i)}(u) = c_k^{(i)} \right\} \quad ; \quad \bigcup_{k=1}^{m_i} A_k^{(i)} = U$$

salah satu $A_k^{(o)} \cap A_r^{(1)} \cap A_s^{(2)} = \emptyset$ atau

$$c_k^{(o)} = c_r^{(1)} + c_s^{(2)}$$

maka dari itu

$$\int_u f_o(u)\ \mu(du) = \sum_{k=1}^{m_o} c_k^{(o)}\ \mu(A_k^{(o)})$$

$$= \sum_{k=1}^{m_o} c_k^{(o)} \sum_{r,s} \mu\ (\ A_k^{(o)} \cap A_r^{(1)} \cap A_s^{(2)})$$

$$= \sum_{k=1}^{m_o} \sum_{r,s} c_r^{(1)}\ \mu\ (\ A_k^{(o)} \cap A_r^{(1)} \cap A_s^{(2)})$$

$$+\sum_{k=1}^{m_o}\sum_{r,s} c_s^{(2)}\ \mu\ (A_k^{(o)} \cap A_r^{(1)} \cap A_s^{(2)})$$

$$= \sum_r c_r^{(1)}\ \mu(A_r^{(1)}) + \sum_s c_s^{(2)}\ \mu(A_s^{(2)})$$

$$= \int_u f_1(u)\ \mu(du) + \int_u f_2(u)\ \mu(du)$$

sehingga terbuktilah persamaan (2.4)

Theorema 2.3.1 (Lebesque)

Misalkan $\{f_n(u)\}$ adalah sebuah barisan tidak turun dari fungsi-fungsi $\mathfrak{S}$ - terukur nonnegatif. Didefinisikan bahwa :

$$f(u) = \lim f_n(u)\ (\mathrm{mod}\ \mu)$$

maka

$$\lim \int_u f_n(u)\ \mu(du) = \int_u f(u)\ \mu(du)$$

Bukti :

untuk tiap-tiap n, $\{g_{nk}(u)\}$ menunjukkan sebuah barisan tidak turun dari fungsi-fungsi sederhana non negatif yang konvergen ke $f_n(u)$ sehingga

$$\lim_{k \to \infty} g_{nk}(u) = f_n(u)$$

Selanjutnya didefinisikan $h_n(u) = \max_{i \le n} g_{in}(u)$. Karena $g_{in}(u) \le f_i(u)$ maka diperoleh :

$$h_n(u) \le \max_{i \le n} f_i(u) = f_n(u)$$

dan

$$\lim h_n(u) \le \lim f_n(u) = f(u) \quad \text{.......................(2.5)}$$

Diberikan barisan $\{h_n(u)\}$ adalah barisan tidak turun yang terdiri dari fungsi-fungsi sederhana untuk semua k sehingga

$$\lim_{n \to \infty} h_n(u) \ge \lim_{n \to \infty} g_{kn}(u) = f_k(u)$$

maka dari itu

$$\lim_{n \to \infty} h_n(u) \ge \lim_{k \to \infty} f_k(u) = f(u)$$

Dengan berdasarkan (2.5) maka diperoleh :

$$f(u) = \lim_{n \to \infty} h_n(u)$$

Dari definisi integral dan formula (2.5), maka :

$$\int_u f(u)\mu(du) = \lim \int_u h_n(u)\,\mu(du)$$

$$\leq \lim \int_u f_n(u)\,\mu(du) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.6)$$

Di lain sisi :

$$f_n(u) = \lim_{k\to\infty} g_{nk}(u) \leq \lim_{n\to\infty} h_n(u) = f(u)$$

$$f_n(u) \leq f(u)$$

Sehingga :

$$\lim \int_u f_n(u)\,\mu(du) \leq \int_u f(u)\,\mu(du) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.7)$$

Dari pertidaksamaan (2.6) dan pertidaksamaan (2.7) dapat diambil kesimpulan :

$$\lim \int_u f_n(u)\,\mu(du) = \int_u f(u)\,\mu(du)$$

sehingga terbuktilah theorema 2.3.1.

Theorema 2.3.2 (Fatou's Lemma)

Ambil $\{f_n(u)\}$ menunjukkan sebuah barisan dari fungsi-fungsi $\mathfrak{S}$ - terukur non negatif,maka :

$$\int_u \underline{\lim}\, f_n(u)\ \mu(du) \le \underline{\lim} \int_u f_n(u)\ \mu(du) \qquad (2.8)$$

Bukti :

Ditentukan $\underline{\lim}\ f_n(u) = \lim\ g_n(u)$ dimana $g_n(u) = \inf\{f_n(u), f_{n+1}(u), \ldots\}$ adalah sebuah barisan tidak turun dari fungsi-fungsi non negatif. Selanjutnya dari theorema 2.3.1 (Lebesgue's) :

$$\int_u \underline{\lim}\ f_n(u)\ \mu(du) = \int_u \lim\ g_n(u)\ \mu(du)$$

$$= \lim \int_u g_n(u)\ \mu(du)$$

$$\int \underline{\lim}\ f_n(u)\ \mu(du) \le \underline{\lim} \int_u f_n(u)\ \mu(du)$$

Jadi terbukti bahwa :

$$\int_u \underline{\lim}\ f_n(u)\ \mu(du) \le \underline{\lim} \int_u f_n(u)\ \mu(du)$$

2.4 FUNGSI RANDOM

Definisi 2.4.1

Ruang metrik X adalah himpunan dengan sebuah fungsi jarak atau metrik r yang memenuhi sifat-sifat berikut :

a. $0 \le r(x,y)$ untuk semua $x,y \in X$

b. $r(x,y) = 0$ jika hanya jika $x = y$ untuk semua $x,y \in X$

c. $r(x,y) = r(y,x)$ untuk semua $x,y \in X$

d. $r(x,y) \le r(x,z) + r(z,y)$ untuk semua $x,y,z \in X$.

Sifat (c) disebut ketidaksamaan segitiga.

Contoh 2.4.1

Garis real R dengan metrik biasa , yaitu jarak antara x dan y didefinisikan sebagai nilai mutlak $|x-y|$ adalah suatu ruang metrik .

Misalkan Θ dan X menyatakan dua buah ruang metrik dengan fungsi jarak berturut - turut $r(\theta_1,\theta_2)$ dan $\rho(x_1,x_2)$ dan diberikan $g(\theta,x)$ menunjukkan suatu fungsi random dengan range dalam X ; Θ dan U adalah domain. Θ dan U menunjukkan sebuah kejadian elementer dengan ruang probabilitas $\{U,\mathfrak{S},P\}$.

Definisi 2.4.2

Misal $\{U,\mathfrak{S},P\}$ menunjukkan sebuah ruang probabilitas. Misal $g(\theta,u)=\xi(\theta)$ menunjukkan fungsi dari dua variabel yang didefinisikan pada $\Theta \times U$ ke ruang metrik X. Jika g adalah

$\mathfrak{S}$-terukur sebagai fungsi untuk setiap $\theta \in \Theta$, maka g disebut *fungsi random*. Himpunan Θ disebut *domain fungsi* dari g pada fungsi random dan X disebut *range* dari *g*.

Definisi 2.4.3

Dua fungsi random $\xi(\theta)$ dan $\xi'(\theta)$ yang didefinisikan pada himpunan sama Θ dikatakan *stochastically equivalent* dalam pengertian luas jika untuk sebarang n=1,2,...dan $\theta_k \in \Theta$ untuk k=1,2,...,n terdistribusi secara identik pada barisan fungsi random $\xi(\theta_1),\xi(\theta_2),\xi(\theta_3),\xi(\theta_4),\ldots,\xi(\theta_n)$ dan $\xi'(\theta_1)$, $\xi'(\theta_2),\xi'(\theta_3),\ldots,\xi'(\theta_n)$.

Definisi 2.4.4

Dua fungsi random $g_1(\theta,u)$ dan $g_2(\theta,u)$ untuk $\theta \in \Theta$ dan $u \in U$, yang didefinisikan dalam ruang probabilitas $\{U,\mathfrak{S},P\}$ yang sama dikatakan *stochastically equivalent* jika untuk sebarang $\theta \in \Theta$, memenuhi

$$P\{g_1(\theta,u) \neq g_2(\theta,u)\} = 0$$

jelas jika $g_1(\theta,u)$ dan $g_2(\theta,u)$ adalah *stochastically equivalent* (dalam pengertian sempit).

2.5 FUNGSI RANDOM HILBERT

Diberikan H menunjukkan sebuah ruang linear yang melalui field pada bilangan komplek. Dan (x,y) menunjukkan sebuah fungsi nilai-komplek yang didefinisikan untuk x, $y \in H$ dengan sifat-sifat berikut :

a. $(x,x) \geq 0$

b. $(x,x) = 0$ jika hanya jika $x=0$.

c. $(x,y) = \overline{(y,x)}$

d. $(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda(x_1,y) + \mu(x_2,y)$

Kita namakan (x,y) adalah *perkalian skalar* dengan elemen x dan y yang berada pada ruang H dan dinyatakan dengan :

$$(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

Definisi 2.5.1

Panjang sebuah vektor x didefinisikan oleh $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$

Definisi 2.5.2

Selisih antara dua vektor x dan y didefinisikan oleh $\rho = \| x - y \| = \sqrt{(x-y,x-y)}$

Sifat - sifat perkalian skalar (x,y) yaitu :

1. $|(x,y)|^2 \leq (x,x)(y,y)$ atau $|(x,y)| \leq \|x\|.\|y\|$ ......(2.9)

   Pertidaksamaan ini disebut *ketidaksamaan Cauchy-Schawarz.*

2. $\|(x,y)\| \leq \|x\| + \|y\|$ ....(2.10)

   Pertidaksamaan ini disebut *ketidaksamaan segitiga.*

Definisi 2.5.3

Dua vektor x dan y disebut *orthogonal* jika (x,y) = 0 Dan dinyatakan dengan $x \perp y$. Dua himpunan A dan B yang berada dalam H dikatakan orthogonal ($A \perp B$), jika setiap vektor $x \in A$ adalah orthogonal untuk setiap vektor $y \in B$. Bila vektorr x dan y orthogonal maka :

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Definisi 2.5.4

Suatu ruang linier X dengan perkalian skalar yang memenuhi sifat-sifat a sampai d disebut *Ruang Hilbert.*

Contoh Ruang Hilbert:

1. Ruang L_2 dengan perkalian skalar dari dua vektor yaitu :

$$x=(x_1,x_2,\ldots,x_n) \text{ dan } y = (y_1,y_2,\ldots,y_n)$$

didefinisikan :

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \; y_i$$

2. Ruang L_2 dengan perkalian skalar dari dua vektor yaitu :

$$x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} \text{ dan } y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots\}$$

didefinisikan oleh :

$$(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \, \bar{y}_n$$

Definisi 2.5.5

Diberikan G menyatakan himpunan bagian dari H. Pandang jumlahan yang berbentuk :

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \, g_k$$

dimana : n = sembarang integer

λ_k = sembarang bilangan komplek (k = 1,2,...,n)

$g_k \in G$ (k = 1,2,...,n).

Himpunan yang mempunyai jumlahan yang demikian disebut *Linear Hull* $\mathfrak{G}$.

Definisi 2.5.6

Diberikan $\{U,\mathfrak{G},P\}$ menunjukkan sebuah ruang probabilitas. Himpunan nilai-komplek variabel random $\zeta=f(x)$ untuk $x\in U$ sedemikian sehingga $E|\zeta|^2< \infty$ disebut Ruang Hilbert $L_2= L_2(U,\mathfrak{G},P)$ dari variabel random dengan ruang probabilitas $\{U,\mathfrak{G},P\}$.

Perkalian skalar dalam L_2 didefinisikan dengan :

$$(\zeta,\eta) = E\left[\zeta\,\bar{\eta}\right]$$

Norma $\|\zeta\|$ dari variabel random ζ :

$$\|\zeta\| = \sqrt{E|\zeta|^2}$$

Dua variabel random ζ dan η dikatakan orthogonal bila

$$(\zeta,\eta) = E\left[\zeta\,\bar{\eta}\right] = 0$$

Definisi 2.5.7

Suatu nilai komplek fungsi random $\zeta(\theta)$ untuk $\theta \in \Theta$ disebut sebuah *fungsi Random Hilbert* jika

$$E\,|\,\zeta(\theta)|^2 < \infty, \quad \theta \in \Theta\,.$$

Sebuah fungsi random Hilbert dapat dinyatakan sebagai fungsi yang didefinisikan dalam ruang Hilbert L_2 :

$$\theta \to \zeta(\theta) = f(\theta,u) \in L_2$$

Definisi 2.5.8

Suatu variabel random $\eta \in L_2$ disebut *limit kuadrat*-mean pada suatu fungsi random Hilbert $\zeta(\theta)$ jika $\zeta(\theta) \longrightarrow \eta$, untuk $\psi(\theta) \longrightarrow 0$ (konvergen dalam ruang Hilbert L_2), yaitu jika untuk sebarang $\varepsilon > 0$ terdapat sebuah $\delta > 0$ sedemikian sehingga

$$E|\eta - \zeta(\theta)|^2 < \varepsilon^2$$

Untuk semua θ sedemikian sehingga $0<\psi(\theta)<\delta$.

Definisi 2.5.9

Jika Θ adalah suatu ruang metrik dengan metrik $r(\theta_1,\theta_2)$, maka fungsi $\zeta(\theta)$ dikatakan *kontinue kuadrat-mean* pada sebuah titik $\theta_0 \in \Theta$ bila

$$E|\zeta(\theta_1)-\zeta(\theta_0)|^2 \longrightarrow 0 \text{ untuk } r(\theta_1,\theta_2) \longrightarrow 0$$