BAB III

FUNGSI GREEN PADA MODEL ARMA (n,n-1)

Model-model runtun waktu berbentuk model ARMA. Model-model ARMA didapati sebagai satu penambahan yang sederhana dari regresi antara dua variabel kepada regresi tertentu yang menyiratkan kemandirian dari satu variabel pada nilai sebelumnya sendiri. Model-model ARMA juga memilik dinamik atau memori, satu gangguan/shock a_t yang mempengaruhi sistem tersebut akan selalu diingat dan meneruskan untuk mempengaruhi sistem tersebut pada fase-fase tertentu. Yang menyebabkan kemandirian data dalam model ARMA adalah memorinya atau dinamiknya. Pada bab ini akan dibicarakan ciri-ciri sistem tersebut yang menggambarkan kedinamikan dalam cara-cara atau metode yang berbeda yang mana nantinya akan disebut sebagai fungsi Green . Fungsi Green yang menggambarkan kedinamikan atau memory dalam bentuk a_t yang sebelumnya, dijelaskan bagaimana a_t mempengaruhi respon X_t dengan mengekspresikan respon sebagai satu kombinasi linier dari a_t. Fungsi Green mensyaratkan pula batasan-batasan tertentu pada parameter dari model-model ARMA yang dinamakan kestabilan.

Bentuk umum Model ARMA (n,n-1) adalah:

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} - \dots - \phi_n X_{t-n} = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_{n-1} a_{t-n+1}$$

Fungsi Green pada model ARMA (n,n-1) didefinisikan sebagai berikut:

$$G_j = g_1\lambda_1^{\,j} + g_2\lambda_2^{\,j} + \ldots + g_n\lambda_n^{\,j}$$

dengan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ adalah akar-akar karakteristik dari

$$\lambda^n - \phi_1\lambda^{n-1} - \phi_2\lambda^{n-2} - \ldots - \phi_n = 0$$

$$g_i = \frac{(\lambda_i^{n-1} - \theta_1\lambda_i^{n-2} - \ldots - \theta_{n-1})}{(\lambda_i-\lambda_1)(\lambda_i-\lambda_2)\ldots(\lambda_i-\lambda_{i-1})(\lambda_i-\lambda_{i+1})\ldots(\lambda_i-\lambda_n)}$$

$i = 1, 2, 3, \ldots, n$

dimana pembaginya adalah hasil dari semua bentuk $(\lambda_i - \lambda_j)$ untuk $j = 1, 2, 3, \ldots, n$ *kecuali bentuk nol* $(\lambda_i - \lambda_j)$. Setiap *akar* λ_i *yang real* memberikan satu model dinamik eksponensial, sementara *sepasang akar yang kompleks* konjugate memberikan model *sinusoidal*.

Serta dengan syarat :

$$G_0 = g_1 + g_2 + \ldots + g_n = 1$$

sehingga bisa dibentuk

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} G_j\, a_{t-j} = \sum_{j=-\infty}^{t} G_{t-j}\, a_j \qquad (3.1)$$

3.1 FUNGSI GREEN PADA MODEL ARMA (1,0) ATAU AR (1)

Model AR (1) didapat dari model ARMA (n,n-1) dengan mengambil n = 1. Bentuk model AR (1) adalah :

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} = a_t$$

Pembentukan fungsi Green pada model AR (1) pertama-tama membentuk akar-akar karakteristiknya. Akar karakteristik dari model AR (1) adalah

$$\lambda^1 - \phi_1\lambda^{1-1} = 0$$

$$\lambda - \phi_1 = 0$$

$$\lambda = \phi_1$$

syarat yang harus dipenuhi

$$G_0 = g_1 = 1$$

bentuk fungsi Green (G_j) adalah

$$G_j = g_1 \lambda_1^{\,j}$$

$$= 1 . \lambda^j$$

$$= \phi_1^{\,j}$$

Solusi dari AR (1) adalah:

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} G_j \, a_{t-j}$$

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j \, a_{t-j}$$

Cara lain untuk mendapatkan penyelesaian dari model AR (1) adalah dengan menggunakan operator B sebagai berikut:

$$B\ X_t = X_{t-1} \ , \quad B^j\ X_t = X_{t-j}$$

$$B\ a_t = a_{t-1} \ , \quad B^j\ a_t = a_{t-j}$$

model AR (1) dapat ditulis sebagai berikut:

$$(1 - \phi_1 B)\ X_t = a_t$$

maka solusinya adalah:

$$X_t = \frac{1}{(1 - \phi_1 B)}\ a_t$$

$$X_t = (1 + \phi_1 B + \phi_1^{\,2}\ B^2 + \phi_1^{\,3}\ B^3 + \ldots)\ a_t$$

$$= a_t + \phi_1 a_{t-1} + \phi_1 a_{t-2} + \phi_1 a_{t-3} + \ldots$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^{\,j}\ a_{t-j}$$

3.1.1 Interpretasi Secara Fisik

Sebagai satu ciri dinamis satu sistem Fungsi Green dapat diinterpretasikan dalam dua cara :

Interpretasi pertama dari perluasan di atas jelas G_j adalah nilai yang diberikan dalam respon yang sekarang kepada shock/gangguan a_t. Nilai G_j menunjukkan seberapa baikkah sistem tersebut mengingat a_{t-j}. Semakin besar nilai ϕ_1 dalam satu sistem AR (1), semakin jelas a_{t-j} yang diingat untuk satu nilai tetap dari j, dan juga semakin jauh nilai yang masuk dalam memory.

Untuk contoh : Jika $\phi_1 = 0,9$ nilai yang diberikan a_{t-6} itu masih sebesar $(0,9)^6 = 0,532$, dan memory dari a_{t-6} itu masih cukup kuat. Apabila $\phi_1 = 0,4$ nilai G_6 hanya akan sebesar $(0,4)^6 = 0,04$ dan a_{t-6} akan semakin diabaikan.

Interpretasi kedua dari Fungsi Green (G_j) adalah memberi ciri seberapa cepat atau lambat respon yang dinamik dari sistem tersebut terhadap jenis a_t tertentu itu semakin menurun. Dengan kata lain apabila satu single a_t ke dalam sistem tersebut, Fungsi Green menentukan seberapa cepat sistem tersebut akan kembali ke equilibrium atau posisi rata-ratanya yang biasanya diambil adalah nol. Apabila nilai ϕ_1 adalah kecil maka responnya akan menurun dengan cepat. Gambar 3.1 menunjukkan "generasi" dan respon untuk suatu model AR (1) dengan $\phi_1 = 0,5$ yang juga digambarkan dengan angka-angka dalam tabel 3.1. Nilai-nilai dari Fungsi Green yang diberikan oleh $\phi_1^{\,j}$

ditampilkan pada baris ke tiga dari tabel 3.1 . Nilai-nilai a_t yang diberikan pada baris ke-dua dari tabel 3.1 digambarkan dengan gambar (3.1a).$G_{t-j}\ a_j$ untuk j = 1, 2, ..., 14 ditunjukkan dari baris ke 4 s/d 17 dalam tabel 3.1 dan gambar 3.1(b) sampai 3.1(g). Dengan persamaan kedua dalam (3.1) kita mendapatkan (dengan assumsi a_t = 0 untuk $t \le 0$).

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} G_{t-j}\ a_j = \sum_{j=0}^{\infty} G_j\ a_{t-j}$$

$$= G_{t-0}\ a_0 + G_{t-1}\ a_1 + G_{t-2}\ a_2 + \ldots + G_0 a_t$$

Oleh karena itu jumlah dari nilai-nilai dalam tiap-tiap kolom nilai dari baris ke-4 sampai ke-17 yang ditunjukkan pada bagian bawah dari tabel 3.1 adalah nilai dari X_t pada waktu t = 1, 2, 3, ..., 14.Secara grafik nilai X_t yang digambarkan dalam gambar 3.1(h) adalah jumlah dari nilai nilai $G_{t-j}\ a_j$, j = 0, 1, 2, ..., t.

Sebagai contoh

untuk t = 3, nilai X_3 didapatkan didalam tabel 3.1 (a_0 = 0)

$$X_3 = [\ G_{t-1}\ a_1 + G_{t-2}\ a_2 + G_{t-3}\ a_3\ ]_{t=3}$$

$$= G_2\ a_1 + G_1\ a_2 + G_0\ a_3$$

$$= 0 - 0,5 + 2$$

$$= 1,5$$

Untuk t = 4

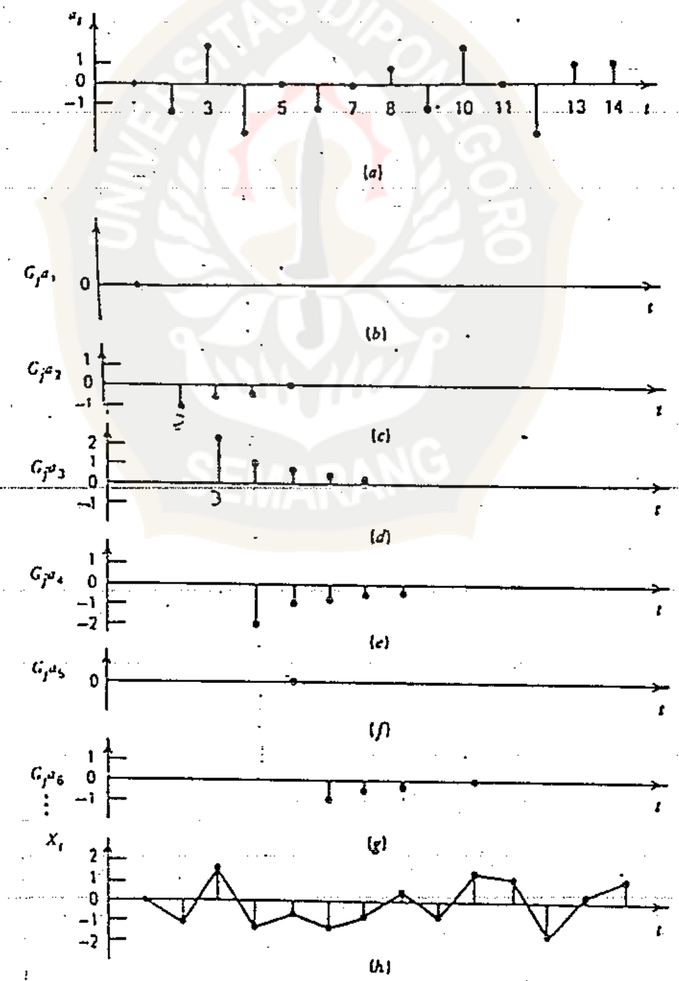
$$X_4 = [\ G_{t-1}\ a_1 + G_{t-2}\ a_2 + G_{t-3}\ a_3 + G_{t-4}\ a_4\ ]_{t=4}$$

$$= G_3\ \alpha_1 + G_2\ \alpha_2 + G_1\ \alpha_3 + G_0\ \alpha_4$$

$$= 0 - 0{,}25 + 1 - 2$$

$$= -1{,}25$$

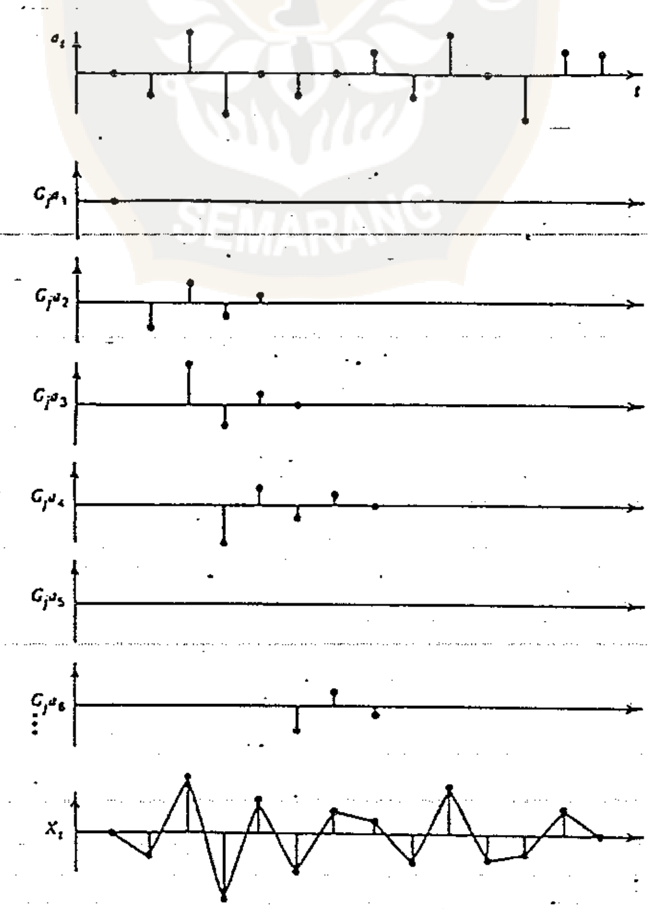
Hal ini digambarkan dalam gambar 3.1 dan tabel 3.1 untuk model AR (1) dengan $\phi_1 = 0{,}5$, gambar 3.2 untuk model AR (1) dengan $\phi_1 = -0{,}5$, gambar 3.3 untuk model AR dengan $\phi_1 = 0{,}9$.



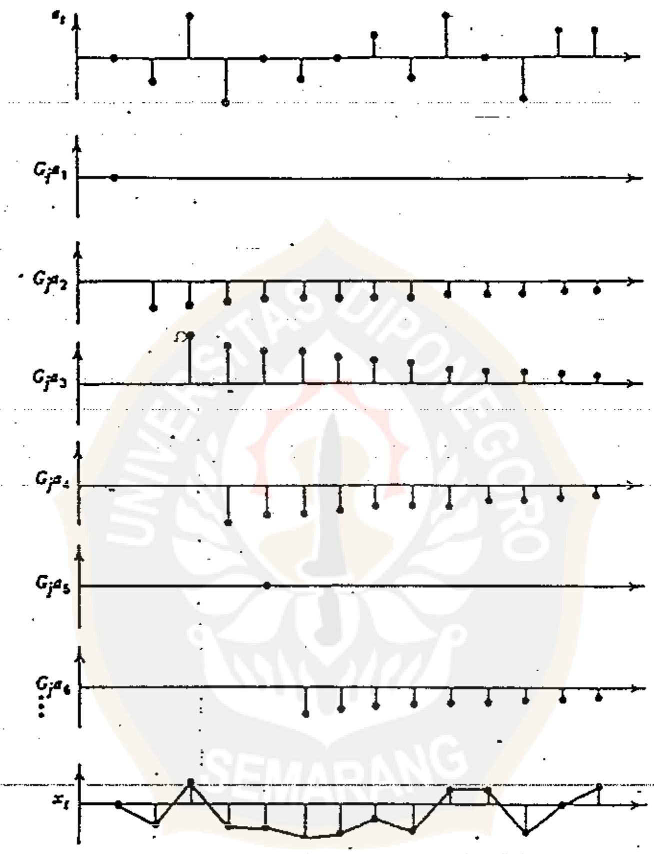
Gambar 3.1 Illustrasi gambar fungsi Green pada model AR (1) dengan $\phi_1 = 0{,}5$

j	t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
	a_t	0	0	−1	2	−2	0	−1	0	1	−1	2	0	−2	1	1
	G_t	1	.5	.25	.125	.0625	.0313	.0156	.0078	.0039	.0020	.0010	.0005	.0002	.0001	.0001
0	$G_{t-0}a_0$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	$G_{t-1}a_1$		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	$G_{t-2}a_2$			−1	−.5	−.25	−.125	−.0625	−.0313	−.0156	−.0078	−.0039	−.0020	−.0010	−.0005	−.0002
3	$G_{t-3}a_3$				2	1	.5	.25	.125	.0625	.0313	.0156	.0078	.0039	.0020	.0010
4	$G_{t-4}a_4$					−2	−1	−.5	−.25	−.125	−.0625	−.0313	−.0156	−.0078	−.0039	−.0020
5	$G_{t-5}a_5$						0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	$G_{t-6}a_6$							−1	−.5	−.25	−.125	−.0625	−.0313	−.0156	−.0078	−.0039
7	$G_{t-7}a_7$								0	0	0	0	0	0	0	0
8	$G_{t-8}a_8$									1	.5	.25	.125	.0625	.0313	.0156
9	$G_{t-9}a_9$										−1	−.5	−.25	−.125	−.0625	−.0313
10	$G_{t-10}a_{10}$											2	1	.5	.25	.125
11	$G_{t-11}a_{11}$												0	0	0	0
12	$G_{t-12}a_{12}$													−2	−1	−.5
13	$G_{t-13}a_{13}$														1	.5
14	$G_{t-14}a_{14}$															1
	$X_t = \sum_{j=0}^{t} G_{t-j}a_j$	0	0	−1	1.5	−1.25	−.625	−1.3125	−.656	.672	−.664	1.668	.834	−1.583	.2085	1.104

Tabel 3.1 Respon Fungsi Green dengan $a_t = 0$ untuk $t \leq 0$



Gambar 3.2 Illustrasi gambar fungsi Green pada model AR (1) dengan $\phi_1 = -0,5$



Gambar 3.3 Illustrasi gambar fungsi Green pada model AR (1) dengan $\phi_1 = 0,9$

Cara lain bisa diperoleh secara langsung dari bentuk perbedaan dari model tersebut.

$$X_3 = 0,5\ X_2 + \alpha_3$$
$$= 0,5\ (-1) + 2$$
$$= 1,5$$
$$X_4 = 0,5\ X_4 + \alpha_4$$
$$= 0,5\ (1,5) + -2$$
$$= -1,25$$

3.1.2 Kestabilan dari Model AR (1)

Sampai sejauh ini telah ditentukan pada berbagai contoh bahwa nilai ϕ_1 itu kurang dari 1 (satu) dalam nilai absolut. Untuk nilai-nilai tersebut secara asymptotical G_j menjadi 1 (satu) pada suatu standar yang bergantung pada setiap ukuran atau nilai ϕ_1. Maka karena nilai-nilai ϕ_1 kurang dari 1 (satu) pada nilai absolut diberikan cukup waktu model tersebut secara asymptotical akan kembali ke posisi equilibriumnya. Jika hanya satu α_t dimasukkan.

Oleh karena itu, dengan syarat

$$| \phi_1 | < 1 \qquad (3.1.1)$$

satu model AR (1) disebut "stabil secara asymtotical"

Untuk model : $X_t = X_{t-1} + \alpha_t$

karena $\phi_1 = 1$, didapatkan

$$G_j = 1$$

Untuk model AR (1) yang terbatas ini, apabila sati α_t dimasukkan systen tersebut berada pada posisi α_t secara tidak jelas dan oleh sebab itu jelaslah bahwa model tersebut tidak stabil secara asymtotical. Bagaimanapun juga responnya tetap terikat yakni bahwa pada nilai urutan waktu responnya tidak lebih besar dari α_t sehingga model tersebut stabil. Maka kondisi kestabilan model AR(1) menjadi

$$| \phi_1 | \leq 1 \qquad (3.1.2)$$

Dengan catatan bahwa apabila model stabil secara asymtotical ini akan stabil tetapi tidak sebaliknya seperti terlihat pada contoh di atas ($X_t = X_{t-1} + a_t$)

Sebaliknya apabila nilai absolut ϕ_1 lebih besar dari satu yaitu apabila kondisi kestabilan (3.1.2) tidak tercapai maka

$$G_j \longrightarrow \infty \text{ , untuk } j \longrightarrow \infty$$

Dengan kata lain apabila satu single a_t dimasukkan pada nilai-nilai yang kecil manapun dimasukkan ke dalam system dan diberikan waktu yang cukup maka respon system tersebut dapat lebih besar kadar terikatnya seberapa besarpun ukurannya. Pada kasus ini sistem AR (1) tidak stabil. Yang harus ditekankan disini adalah kondisi kestabilannya ditentukan oleh kehomogenan atau bagian autoregresi yang berada pada sebelah kiri.

3.2 FUNGSI GREEN DAN KESTABILAN PADA MODEL ARMA (2,1)

3.2.1 Pembentukan Fungsi Green Pada Model ARMA (2,1)

Pembentukan model ARMA (2,1) didapat dari bentuk umum model ARMA (n,n-1) dengan mengambil n = 2. Bentuk umum model ARMA (2,1) adalah :

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} = a_t - \theta_1 a_{t-1} \qquad (3.2.1)$$

Untuk membentuk fungsi Green akan dicari dulu akar-akar karakteristiknya sebagai berikut:

$$\lambda^2 - \phi_1 \lambda - \phi_2 = 0$$

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{\phi_1 \pm \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \phi_1$$

$$\lambda_1 . \lambda_2 \quad = -\phi_2$$

$$g_2 = \frac{(\lambda_2 - \theta_1)}{(\lambda_2 - \lambda_1)}$$

$$G_0 = g_1 + g_2 = 1$$

$$g_1 + g_2 = 1$$

$$g_1 + \frac{(\lambda_2 - \theta_1)}{(\lambda_2 - \lambda_1)} = 1$$

$$g_1 = 1 - \frac{(\lambda_2 - \theta_1)}{(\lambda_2 - \lambda_1)}$$

$$= \frac{(\lambda_2 - \lambda_1) - (\lambda_2 - \theta_1)}{(\lambda_2 - \lambda_1)}$$

$$= \frac{(-\lambda_1 + \theta_1)}{(\lambda_2 - \lambda_1)}$$

$$= \frac{(\lambda_1 - \theta_1)}{(\lambda_1 - \lambda_2)}$$

$$G_j = g_1 \lambda_1^j + g_2 \lambda_2^j$$

$$= \frac{(\lambda_1 - \theta_1)}{(\lambda_1 - \lambda_2)} \lambda_1^j + \frac{(\lambda_2 - \theta_1)}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \lambda_2^j \qquad (3.2.2)$$

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} G_j a_{t-j}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \left[\frac{(\lambda_1 - \theta_1)}{(\lambda_1 - \lambda_2)} \lambda_1^j + \frac{(\lambda_2 - \theta_1)}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \lambda_2^j \right] a_{t-j}$$

Sebagai contoh dengan $\phi_1 = 1{,}3$, $\phi_2 = -0{,}4$, $\theta_1 = 0{,}4$ akan dicari fungsi Greennya sebagai berikut :

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{1}{2} \left(1{,}3 \pm \sqrt{1{,}69 - 1{,}6} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left[1,3 \pm 0,3 \right]$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left[1,3 + 0,3 \right]$$

$$= 0,8$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left[1,3 - 0,3 \right]$$

$$= 0,5$$

Dengan mengingat bentuk persamaan (3.2.2). Fungsi Green dapat dibentuk

$$G_j = \left[\frac{0,8 - 0,4}{0,8 - 0,5}\right]\left[0,8 \right]^j + \left[\frac{0,5 - 0,4}{0,5 - 0,8}\right]\left[0,5 \right]^j$$

$$= \frac{1}{0,3} \left[0,4\ (0,8)^j - 0,1\ (0,5)^j \right]$$

$$G_0 = 1$$

$$G_1 = \frac{1}{0,3} \left[0,32 - 0,05 \right] = 0,9$$

$$G_2 = \frac{1}{0,3} \left[0,256 - 0,025 \right] = 0,77$$

$$\vdots$$

$$G_{14} = \frac{1}{0,3} \left[0,0175922 - 0,0000061 \right] = 0,058620275$$

Solusi dari X_t adalah :

$$X_t = \sum_{j=0}^{t} G_j\ a_{t-j}$$

$$X_0 = G_0\ a_0 = 1\ .\ 0 = 0$$

$$X_1 = G_1\ a_0 + G_0\ a_1 = 1\ .\ 0 + 0,9\ .\ 0 = 0$$

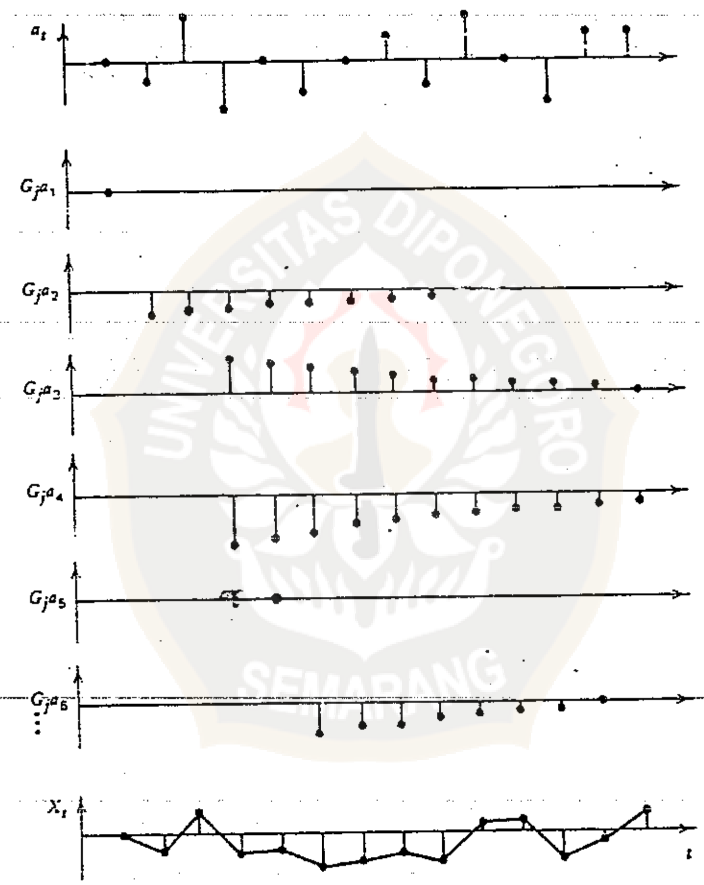
$$X_2 = G_2\ a_0 + G_1\ a_1 + G_0\ a_2$$

$$= 0,77\ .\ 0 + 0,9\ .\ 0 + 1\ .\ -1 = -1$$

$$\vdots$$

dst.

Contoh ini seperti pada gambar (3.4) dan tabel 3.2



Gambar 3.4 Grafik respon fungsi Green pada model ARMA (2,1) dengan $\phi_1 = 1{,}3$,$\phi_2 = -0{,}4$ dan $\theta_1 = 0{,}4$
Diambil dari (Time Series Analysis) karangan S.M Pandit dan Shien Ming Wu halaman 93)

Tabel 3.2 Fungsi Green pada model ARMA (2,1) dengan $\phi_1 = 1{,}3$,$\phi_2 = -0{,}4$ dan $\theta_1 = 0{,}4$, dengan $a_t = 0$ untuk $t \le 0$ pada halaman berikutnya.

Tabel 3.2 Fungsi Green Pada Model ARMA (2,1)

j =	t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
	a(t)	0	0	-1	2	-2	0	-1	0	1	-1	2	0	-2	1	1
	G(t)	1	0.9	0.77	0.641	0.5253	0.42649	0.344317	0.277016	0.222394	0.178305	0.142840	0.114369	0.091544	0.073260	0.058620
0	G0.a(t-0)	0	0	-1	2	-2	0	-1	0	1	-1	2	0	-2	1	1
1	G1.a(t-1)		0	0	-0.9	1.8	-1.8	0	-0.9	0	0.9	-0.9	1.8	0	-1.8	0.9
2	G2.a(t-2)			0	0	-0.77	1.54	-1.54	0	-0.77	0	0.77	-0.77	1.54	0	-1.54
3	G3.a(t-3)				0	0	-0.641	1.282	-1.282	0	-0.641	0	0.641	-0.641	1.282	0
4	G4.a(t-4)					0	0	-0.5253	1.0506	-1.0506	0	-0.5253	0	0.5253	-0.5253	1.0506
5	G5.a(t-5)						0	0	-0.42649	0.85298	-0.85298	0	-0.42649	0	0.42649	-0.42649
6	G6.a(t-6)							0	0	-0.34431	0.688634	-0.68863	0	-0.34431	0	0.344317
7	G7.a(t-7)								0	0	-0.27701	0.554032	-0.55403	0	-0.27701	0
8	G8.a(t-8)									0	0	-0.22239	0.444788	-0.44478	0	-0.22239
9	G9.a(t-9)										0	0	-0.17830	0.356611	-0.35661	0
10	G10.a(t-10)											0	0	-0.14284	0.285680	-0.28568
11	G11.a(t-11)												0	0	-0.11436	0.228739
12	G12.a(t-12)													0	0	-0.09154
13	G13.a(t-13)														0	0
14	G14.a(t-14)															0
Xt =	Gj.a[t-j]	0	0	-1	1.1	-0.97	-0.901	-1.7833	-1.55789	-0.31193	-1.18236	0.987704	0.956960	-1.15103	-0.07912	0.957547

Cara lain untuk mendapatkan fungsi Green dengan menggunakan metode membandingkan koefisien-koefisien semisal :

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} = a_t - \theta_1 a_{t-1}$$

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)\ X_t = (1 - \theta_1 B)\ a_t$$

$$X_t = \sum_{j=o}^{\infty} G_j a_{t-j} = \left[\sum_{j=o}^{\infty} G_j B^j \right] a_t$$

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) \left[\sum_{j=o}^{\infty} G_j\ B^2 \right] a_t = (1 - \theta_1 B)\ a_t$$

Ini memberikan pemakaian identitas pada a_t

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)\ (G_o + G_1 B + G_2 B^2 + G_3 B^3 + \ldots) = (1 - \theta_1 B)$$

Apabila dibuat persamaan-persamaan dari koefisien koefisien yang sebanding dari B maka :

$$\emptyset : G_o = 1$$

$$1 : G_1 - \phi_1 = -\theta_1 \longrightarrow G_1 = \phi_1 - \theta_1$$

$$2 : G_2 - \phi_1 G_1 - \phi_2 = \emptyset \longrightarrow G_2 = \phi_1^{\ 2} - \phi_1 \theta_1 - \phi_2$$

dan $G_j = \phi_1 G_{j-1} + \phi_2 G_{j-2}$, $j \geq 3$

Hasilnya adalah :

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2)\ G_j = \emptyset \qquad j \geq 2$$

Sebagai contoh misalkan $\phi_1 = 1{,}3$ dan $\phi_2 = \emptyset{,}4$ dan $\theta_1 = \emptyset{,}4$. maka :

$$G_o = 1$$

$$G_1 = \phi_1 - \theta_1 = 1{,}3 - \emptyset{,}4 = \emptyset{,}9$$

$$G_2 = \phi_1 G_1 + \phi_2 G_o$$

$$= 1{,}3 \cdot \emptyset{,}9 + \emptyset{,}4 \cdot 1$$

$G_2 = 0,77$

$G_3 = \phi_1 G_2 + \phi_2 G_1$

$= 1,3 \cdot 0,77 + 0,4 \cdot 0,9$

$= 0,64$

dan seterusnya. Hasil ini sama seperti perhitungan pada hasil sebelumnya.

Dengan metode ini fungsi Green yang dibentuk pada model ARMA (n,n-1) sangat khusus dihitung dari identitas pemakaiannya.

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \ldots - \phi_n B^n)\,(G_o + G_1 B + G_2 B^2 + \ldots)$$

$$= (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \ldots - - \theta_n B^n)$$

yang memberikan persamaan koofisien koofisien yang sepadan dari B :

$0 : G_o = 1$

$1 : G_1 - \phi_1 G_o = -\theta_1$

$2 : G_2 - \phi_1 G_1 - \phi_2 G_o = -\theta_2$

$3 : G_3 - \phi_1 G_2 - \phi_2 G_1 - \phi_3 G_o = -\theta_3$

$\vdots$

$n-1 : G_{n-1} - \phi_1 G_{n-2} - \ldots - \phi_{n-1} G_o = -\theta_{n-1}$

$n : G_n - \phi_1 G_{n-1} - \ldots - \phi_n G_o = 0$

yaitu

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \ldots - \phi_n B^n)\, G_j = 0 \quad , \; j \geq n$$

3.2.2. Kestabilan Model ARMA (2,1)

Interpretasi fungsi Green dalam bentuk-bentuk memori dari a_t yang telah lalu dan dalam bentuk pengaruh terhadap responnya dan berpengaruh terhadap sistem AR (1). Juga dihubungkan dengan sistem ARMA (2,1). Apabila mengikuti analogi yang sama mudah untuk dilihat dari sisi ekspresi Gj yang diberikan atau berpengaruh dalam persamaan (3.2.2) bahwa sistem ARMA (2,1) stabil secara asymptotical apabila

$$|\lambda_1| < 1, \ |\lambda_2| < 1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.2.3)$$

Kondisi kestabilan yang asymptotical dapat dinyatakan secara langsung dalam bentuk-bentuk parameter autoregresive melalui manipulasi berikut ini yang menggunakan persamaan (3.2.2). Karena $\phi_2 = \lambda_1\lambda_2$ persamaan (3.2.3) mensyaratkan $|\phi_2| < 1$

$$-1 < \phi_2 < 1$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1\lambda_2 < 1$$

$$\phi_1 + \phi_2 < 1$$

$$-(1 + \lambda_2) < \lambda_1(1 + \lambda_2)$$

$$-\lambda_1\lambda_2 - (\lambda_1 + \lambda_2) < 1$$

$$\phi_2 - \phi_1 < 1$$

Maka kondisi kestabilan asymptotic untuk ARMA (2,1) harus memenuhi syarat

$$\left.\begin{array}{l} \phi_1 + \phi_2 < 1 \\ \phi_2 - \phi_1 < 1 \\ |\phi_2| < 1 \ldots \end{array}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.2.4)$$

Untuk semua contoh-contoh model ARMA (2,1) yang ditetapkan sebelumnya sistem ini stabil secara asymptotical, sebagai contoh :

$\phi_1 = 1,3 \qquad \phi_2 = -0,4$

$\phi_1 + \phi_2 = 1,3 - 0,4 < 1$

$\phi_2 - \phi_1 = -0,4 - 1,3 = -1,7 < 1$

$|\phi_2| = |-0,4| < 1$

menunjukkan bahwa kondisi atau syarat (3.2.4) semua terpenuhi. Untuk kasus ini akar-akarnya $\lambda_1 = 0,8$; $\lambda_2 = 0,5$ sehingga (3.2.3) terpenuhi.

$\phi_1 = 1,4 \qquad \phi_2 = -0,59$

$\phi_1 + \phi_2 = 1,4 - 0,59 < 1$

$\phi_2 - \phi_1 = -0,59 - 1,4 = -1,99 < 1$

$|\phi_2| = |-0,59| < 1$

dan $\lambda_1\lambda_2 = 0,7 \pm 0,316$

menunjukkan bahwa persyaratan (3.2.3) dan (3.2.4) semua terpenuhi.

Sekarang dimisalkan ditentukan sistem ARMA (2,1) dengan $\phi_1 = 1,4$; $\phi_2 = -0,59$ dan $\theta = 0,3$. Seperti terlihat pada gambar (3.5), maka

$$(1 - 1,5\,\theta + 0,5B^2)X_t = (1 - 0,3\,B)\,a_t$$

$$(1 - B)(1 - 0,5B)\,X_t = (1 - 0,3)\,a_t$$

karena salah satu dari akar-akar tersebut adalah 1 (satu), jelas bahwa sistem tersebut tidak stabil secara asymptotic. Akan tetapi apakah sistem itu stabil ? Pertanyaan ini dapat dijawab dengan melihat apakah Fungsi Green tetap "terikat/terbatas". Karena kedua akar $\lambda_1 = 1$ dan $\lambda_2 = 0,5$ itu berbeda, dapat digunakan pernyataan

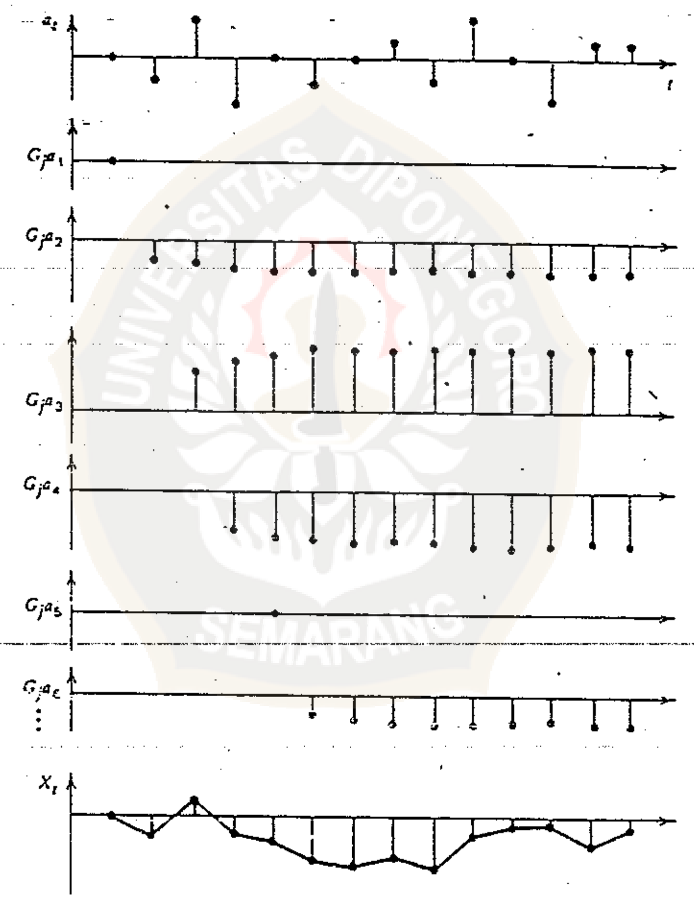
(3.2.1) untuk mendapatkan :

$$G_j = \left(\frac{0,7}{0,5}\right)(1)^j - \left(\frac{0,2}{0,5}\right)(0,5)^j$$

dari bentuk ini terlihat

$$G_j \longrightarrow \frac{0,7}{0,5} \quad \text{dimana } j \longrightarrow \infty$$

Contoh lain seperti yang diilustrasikan oleh gambar (3.5):



Gambar 3.5 Illustrasi fungsi Green pada model ARMA (2,1) dengan $\phi_1 = 1,5$, $\phi_2 = -0,5$, $\theta_1 = 0,3$

Dan oleh karenanya Gj tetap terikat dan sistem tersebut tetap stabil seperti terlihat dalam gambar di atas.

Oleh karena itu apabila kedua akar tersebut kurang dari satu (1) dalam nilai absolut sistem ARMA (2,1) itu stabil secara asymptotic. Apabila salah satu dari akar-akar tersebut satu (1) dalam nilai absolut sistem tersebut stabil tetapi tidak stabil secara asymptotic. Apabila salah satu atau kedua akar tersebut lebih besar dari satu dalam nilai absolut maka jelaslah bahwa sistem tersebut tidak stabil. Karena $G_j \longrightarrow \infty$ untuk $j \longrightarrow \infty$. Apabila kedua akar tersebut tandanya berlawanan maka sistem tersebut masih stabil karena dengan persamaan (3.2.1) nilai Fungsi Green adalah

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = -1$$

$$G_j = \left(\frac{1-\theta_1}{2}\right)(1)^j + \left(\frac{1-\theta_1}{2}\right)(-1)^j$$

sehingga $G_j \longrightarrow 1$ atau $-\theta_1$ dimana $j \longrightarrow \infty$

Yang oleh karena itu masih terikat dan sistem tersebut stabil tetapi tidak stabil secara asymptotic.

Sedang jika kedua akar tersebut sama dengan nilai akar tersebut 1 dalam nilai absolut maka sistem tersebut tidak stabil.

Misal $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ karena kedua akar tersebut sama maka persamaan (3.2.1) tidak dapat digunakan. Karena persamaan (3.2.1) berlaku hanya untuk akar-akar yang berbeda. Akan tetapi G_j dapat diperoleh atau dihitung secara langsung.

$$X_t = \frac{(1 - \theta_1 B)}{(1 - B)(1 - B)}\, a_t$$

$$= (1 + B + B^2 + \ldots)(1 + B + B^2 + \ldots)(1 - \theta_1 B)\, a_t$$

$$= (1 + 2B + 3B^2 + 4B^3 + \dots)(1 - \theta_1 B)\ a_t$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \left[(j + 1) - \theta_1 j \right] a_{t-j}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \left[(1 - \theta_1)j - 1 \right] a_{t-j}$$

sehingga

$$G_j = (1 - \theta_1)j - 1 \longrightarrow \infty \quad \text{dimana } j \longrightarrow \infty$$

Karena $G_j \longrightarrow \infty$ untuk $j \longrightarrow \infty$ maka sistem tersebut tidak stabil.

3.3 Aplikasi Fungsi Green

Suatu contoh penggunaan aplikasi fungsi Green akan ditampilkan dalam suatu kasus dalam pencarian data untuk mengetahui suatu harga tertentu dengan memori data yang sangat terbatas.

Contoh : pada sebuah perusahaan otomotif mempunyai data tentang banyaknya jumlah pemasukan dan banyaknya jumlah pengeluaran perusahaan tersebut pada bulan Januari – Desember . Pihak perusahaan ingin menghitung banyaknya asset perusahaan tersebut pada tiap bulan dengan harapan agar bisa mengambil langkah-langkah kebijaksanaan perusahaan. Pihak perusahaan hanya mengetahui bahwa asset perusahaan mengikuti pola model runtun waktu ARMA (2,1) dengan model :

$$X_t - 1{,}2\ X_{t-1} + 0{,}27\ X_{t-2} = a_t - 0.45\ a_{t-1}$$

Input data yang dipunyai :

Data pemasukan (P1) dan data pengeluaran (P2) pada bulan Januari–Desember 1994 dalam satuan milyar.

t (bulan)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P_1	0	3,5	2	3,75	3,5	4,5	3	5,5	5	5,5	6,5	6,75	6,05
P_2	0	1,5	3	1,75	2,5	1,5	4	3,5	3,5	4,5	4,5	4,25	7,05

keterangan :

X_t, X_{t-1}, X_{t-2} adalah asset perusahaan pada waktu t, t-1, t-2 .

a_t, a_{t-1} adalah jumlah shock dalam hal ini merupakan selisih dari banyaknya pemasukan dan pengeluaran.

Karena X_t, X_{t-1}, X_{t-2} pada perusahaan tersebut tidak diketahui maka untuk mencari solusi pihak perusahaan tersebut menggunakan fungsi Green untuk mencari dan menghitung asset perusahaan tersebut pada bulan Januari – Desember. Langkah yang ditempuh :

- menghitung jumlah a_t dengan berdasar selisih dari data pemasukan dan pengeluaran.

t (bulan)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P_1	0	3,5	2	3,75	3,5	4,5	3	5,5	5	5,5	6,5	6,75	6,05
P_2	0	1,5	3	1,75	2,5	1,5	4	3,5	3,5	4,5	4,5	4,25	7,05
$a_t(P_1 - P_2)$	0	2	-1	2	1	3	-1	2	1,5	1	2	2,5	-1

- Mencari nilai Fungsi Green dengan jalan menghitung akar karakteristik dari model ARMA (2,1) tadi, yaitu :

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{1,2 \pm \sqrt{(-1,2)^2 - 4 \cdot 0,27}}{2 \cdot 1}$$

$$= \frac{1,2 \pm 0,6}{2}$$

$$\lambda_1 = 0,9$$

$$\lambda_2 = 0,3$$

$$g_2 = \frac{(0,3 - 0,45)}{(0,3 - 0,9)} = \frac{0,15}{0,6}$$

$$g_1 = \frac{(0,9 - 0,45)}{(0,9 - 0,3)} = \frac{0,45}{0,6}$$

$$G_j = \frac{0,45}{0,6} (0,9)^j + \frac{0,15}{0,6} (0,3)^j$$

$$= \frac{1}{0,6} \left[0,45 \ (0,9)^j + 0,15 \ (0,3)^j \right]$$

$$G_0 = 1$$

$$G_1 = \frac{1}{0,6} \left[0,45 \ (0,9)^1 + 0,15 \ (0,3)^1 \right]$$

$$= 0,75$$

$$G_2 = \frac{1}{0,6} \left[0,45 \ (0,9)^2 + 0,15 \ (0,3)^2 \right]$$

$$= 0,63$$

$$G_3 = \frac{1}{0,6} \left[0,45 \ (0,9)^3 + 0,15 \ (0,3)^3 \right]$$

$$= 0,5535$$

$$G_4 = 0,4941$$

$$G_5 = 0,443475$$

$$G_6 = 0,398763$$

$$G_7 = 0,33877735$$

$$G_8 = 0,32286881$$

$$G_9 = 0,290570281$$

$$G_{10} = 0,26151036$$

$$G_{11} = 0,23535839$$

$$G_{12} = \frac{1}{0,6} \left[0,45\ (0,9)^{12} + 0,15\ (0,3)^{12} \right]$$

$$= 0,235358079$$

Untuk mencari asset perusahaan maka dipergunakan solusi dari

$$X_t = \sum_{j=0}^{t} G_j\ a_{t-j} \qquad t = 0,1...,12$$

$$X_0 = G_0\ a_0 = 1\ .\ 0 = 0$$

$$X_1 = G_1\ a_0 + G_0\ a_1 = 0,75\ .\ 0 + 1\ .\ 2 = 2$$

$$X_2 = G_2\ a_0 + G_1\ a_1 + G_0\ a_2$$

$$= 0,63\ .\ 0 + 0,75\ .\ 2 + 1\ .\ -1$$

$$= 0,5$$

Dengan jalan yang sama maka didapat

$$X_3 = 2,51$$

$$X_4 = 2,977$$

$$X_5 = 5,4447$$

$$X_6 = 3,37985$$

$$X_7 = 5,035751$$

$$X_8 = 5,730341$$

$$X_9 = 5,841757$$

$$X_{10} = 7,0212916$$

$$X_{11} = 8,438225$$

$$X_{12} = 6,107382$$

Perhitungan hasil ini akan terlampir dalam tabel pada halaman berikutnya.

Untuk mengetahui agar suatu hasil (asset) stabil dan model stabil maka akan dipergunakan uji kestabilan pada model tersebut :

$$X_t - 1,2\ X_{t-1} + 0,27\ X_{t-2} = a_t - 0.45\ a_{t-1}$$

$$\left.\begin{array}{l} \phi_1 + \phi_2 = 1,2 - 0,27 = 0,93 < 1 \\ \phi_2 - \phi_1 = -0,27 - 1,2 = -1,47 < 1 \\ \phi_2 = -0,27 < 1 \end{array}\right\} \text{syarat kestabilan terpenuhi}$$

Maka hasil X_t (solusi) akan terbatas atau berhingga.

Dengan menempuh cara tersebut maka perusahaan dapat mengetahui seberapa besar asset yang dipunyai pada bulan Januari - Desember.

Tabel Aplikasi Fungsi Green pada Perusahaan Otomotif Untuk Mencari Asset Perusahaan Dengan Keyakinan Model ARMA (2,1)

$X(t) - 1{,}2\ X(t-1) + 0{,}27\ X(t-2) = a(t) - 0{,}45\ a(t-1)$

	t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	P1	0	3.5	2	3.75	3.5	4.5	3	5.5	5	5.5	6.5	6.75	6.05
	P2	0	1.5	3	1.75	2.5	1.5	4	3.5	3.5	4.5	4.5	4.25	7.05
j =	a(t)	0	2	-1	2	1	3	-1	2	1.5	1	2	2.5	-1
	G(t)	1	0.75	0.63	0.5535	0.4941	0.443475	0.398763	0.358777	0.322866	0.290570	0.261510	0.235358	0.211822
0	G0.a(t-0)	0	2	-1	2	1	3	-1	2	1.5	1	2	2.5	-1
1	G1.a(t-1)		0	1.5	-0.75	1.5	0.75	2.25	-0.75	1.5	1.125	0.75	1.5	1.875
2	G2.a(t-2)			0	1.26	-0.63	1.26	0.63	1.89	-0.63	1.26	0.945	0.63	1.26
3	G3.a(t-3)				0	1.107	-0.5535	1.107	0.5535	1.6605	-0.5535	1.107	0.83025	0.5535
4	G4.a(t-4)					0	0.9882	-0.4941	0.9882	0.4941	1.4823	-0.4941	0.9882	0.74115
5	G5.a(t-5)						0	0.88695	-0.44347	0.88695	0.443475	1.330425	-0.44347	0.88695
6	G6.a(t-6)							0	0.797526	-0.39876	0.797526	0.398763	1.196289	-0.39876
7	G7.a(t-7)								0	0.717554	-0.35877	0.717554	0.358777	1.076332
8	G8.a(t-8)									0	0.645733	-0.32286	0.645733	0.322866
9	G9.a(t-9)										0	0.581140	-0.29057	0.581140
10	G10.a(t-10)											0	0.523020	-0.26151
11	G11.a(t-11)												0	0.470716
12	G12.a(t-12)													0
Xt = Gj.a[t-j]		0	2	0.5	2.51	2.977	5.4447	3.37985	5.035751	5.730341	5.841757	7.012916	8.438225	6.107382

Keterangan :

t = bulan Januari - Desember (t = 1 s/d 12)
P1 = banyaknya jumlah pemasukan pada bulan t (dalam satuan milyard)
P2 = banyaknya jumlah pengeluaran pada bulan t (dalam satuan milyard)
a(t) = selisih harga (P1-P2) / dianggap sebagai shock
G(t) = fungsi Green
X(t) = jumlah asset perusahaan pada bulan t (dalam satuan milyard)