BAB II

MODEL-MODEL RUNTUN WAKTU ARMA (n, n-1)

Dalam pembahasan mengenai runtun waktu berkaitan erat dengan model regresi linier sederhana orde pertama.
Bentuk model regresi linier sederhana adalah :

$$Y_t = \beta_i X_t + \varepsilon_t$$

$$t = 1, 2, 3, \ldots, n$$

$$\varepsilon_t \backsim \text{NID}\ (0, \sigma_\varepsilon^2)$$

Model regresi ini menyatakan ketergantungan Y_t terhadap X_t untuk melengkapi ketergantungan Y_t terhadap X_t diberikan $\beta_i X_t$. Kedependenan yang lain pada X_t diberikan dengan ε_t.

Untuk model runtun waktu X_t bergantung pada X_{t-1} atau X_t bergantung pada X_{t-1}, X_{t-2} dan seterusnya. Bentuk umum model runtun waktu ARMA (n,n-1) adalah sebagai berikut :

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \ldots - \phi_n X_{t-n} = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \ldots - \theta_{n-1} a_{t-n+1}$$

2.1. Model ARMA (n, n-1)

Bentuk umum model ARMA (n,n-1) adalah sebagai berikut :

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \ldots - \phi_n X_{t-n} = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \ldots - \theta_{n-1} a_{t-n+1}$$

$$a_t \backsim \text{NID}\ (0, \sigma_a^2)$$

Bentuk dari model ini menghilangkan ketergantungan a_t pada X_{t-1}, X_{t-2}, ..., X_{t-n} dan a_{t-1}, a_{t-2}, ..., a_{t-n+1} dengan bagian autoregresive orde n dan bagian Moving Average orde n - 1. Asumsi dasar yang berlaku untuk model ini adalah :

X_t dependen/bergantung pada X_{t-1}, X_{t-2}, ..., X_{t-n}

α_t independen pada α_{t-n}, α_{t-n-1}, ...

α_t independen pada X_{t-n-1}, X_{t-n-2}, ...

2.2. Model ARMA (1,0) atau AR (1)

Model ARMA (1,0) atau AR (1) dibentuk dari model ARMA (n,n-1) dengan mengambil n = 1, bentuk umum model AR (1) adalah :

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} = \alpha_t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.2.1)$$

Asumsi penting dalam regresi linier orde pertama bahwa nilai ε_t berbeda pada setiap t adalah independen. Demikian pula untuk model AR (1), nilai α_t pada setiap t yang berlainan adalah independen, ini berarti α_t independen terhadap α_{t-1}, α_{t-2}, ... Untuk mudahnya akan diasumsikan distribusi α_t adalah normal sehingga

$$\alpha_t \hookrightarrow \text{NID}\ (0,\ \sigma_\alpha^2)$$

Asumsi lain adalah α_t tidak bergantung pada X_{t-2}, X_{t-3}, dan seterusnya. Model AR (1) dapat juga ditafsirkan sebagai dekomposisi orthogonal dari X_t ke dalam dua bagian, satu dependen komplet dari X_{t-1} diberikan dengan $\phi_1 X_{t-1}$ dan variabel independen yang lain pada X_{t-1} diberikan dengan α_t.

Parameter dalam AR (1) untuk mengukur tingkat ketergantungan dari X_t pada X_{t-1}. Jika ketergantungan atau relasi antara X_t dan X_{t-1} adalah kuat, ϕ_1 nilainya akan besar dan jika lemah maka nilai ϕ_1 akan kecil.

Kenyataannya jika ϕ_1 adalah 0 maka model AR (1) menjadi

$$X_t = a_t$$

Pada sisi lain jika $\phi_1 > 1$ atau $\phi_1 < -1$ dapat ditunjukkan dari persamaan (2.2.1) bahwa X_t mungkin bertambah atau berkurang tanpa batas sebab a_t merupakan varian berhingga tertentu dan tidak dapat bertambah secara kontinu. Dengan demikian X_t adalah tidak stasioner atau runtun waktu yang tidak stabil. Untuk kestasioneran atau runtun waktu yang stabil maka X_t harus tetap terbatas dan disyaratkan

$$|\phi_1| < 1$$

2.3. AUTOREGRESSIVE MOVING AVERAGE (2,1) ATAU ARMA (2,1)

Model ARMA (2,1) dibentuk dari ketidakcukupan dari model AR (1) sehingga menjadikan orde n = 1 naik menjadi orde n = 2. Bentuk umum dari model ARMA (2,1) adalah :

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} = a_{t-1} - \theta_1 a_{t-1} \qquad \ldots\ldots (2.3.1)$$

Pada permulaan bab ini diperoleh model AR (1) yang menyatakan ketergantungan dari X_t pada X_{t-1}, menguraikan X_t ke dalam dua bagian, satu ketergantungan pada X_{t-1} ditulis sebagai $\phi_1 X_{t-1}$ dan yang lain independent ditulis sebagai a_t.

Dalam kasus sekarang ini, karena model AR (1) tidak cukup atau tidak cocok misal mengganti a_t dengan a'_t dan menuliskan modelnya sebagai berikut :

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + a'_t \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.3.2)$$

Sekarang kita mempunyai runtun X_t dan juga runtun yang lain a_t dan karena a'_t mungkin tergantung pada X_{t-2} dan atau a_{t-1} maka a'_t dapat diuraikan ke dalam tiga bagian. Pertama dependent pada X_{t-2}, kedua dependent terhadap a_{t-1} dan satunya lagi independent terhadap keduanya, jadi

$$a'_t = \phi_2 X_{t-2} - \theta_1 a_{t-1} + a_t \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.3.3)$$

dan jika didistribusikan ke dalam persamaan (2.3.2) maka

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + a_t - \theta_1 a_{t-1}$$

atau

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} = a_{t-1} - \theta_1 a_{t-1}$$

model ini menyatakan ketergantungan dari X_t dengan dua nilai yang terdahulu X_{t-1} dan X_{t-2} serta mempunyai "ketergantungan Autoregresi" pada orde kedua. Ini juga memasukkan ketergantungan nilai a_t yang terdahulu pada order pertama. Oleh karena itu model ini dinamakan model Autoregresive Moving Average order dua dan satu berturut-turut dan dinyatakan dengan ARMA (2,1). Sisi kiri dinyatakan sebagai bagian Autoregresive sedang sisi kanan dinyatakan sebagai Moving Average dari model. Asumsi untuk model AR (1) sekarang berlaku untuk model ARMA (2,1), karena bentuk model itu sendiri sekarang menghilangkan ketergantungan a_t pada X_{t-2} dan a_{t-1} dengan menyebut $\phi_2 X_{t-2}$ dan $\theta_1 a_{t-1}$. Maka dapat dituliskan asumsi dasar dari model ARMA (2,1) sebagai berikut :

a_t independent pada a_{t-2}, a_{t-3}, ...

a_t independent pada X_{t-3}, X_{t-4}, ...

Ada beberapa kasus khusus yang berkaitan dengan model

ARMA (2,1) yaitu model AR (2), model ARMA (1,1) dan model MA (1).

Kasus istimewa dari model ARMA (2,1) yang pertama adalah model AR (2). Model ini diperoleh dengan menetapkan $\theta_1 = 0$. Maka model ARMA (2,1) diberikan dengan bentuk,

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + a_t$$

atau

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} = a_t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.3.4)$$

karena bagian Moving Average tidak ada maka model ARMA (2,1) menjadi model Autoregresive orde 2 atau AR (2). Untuk model ini X_t hanya bergantung pada X_{t-1} dan X_{t-2}. Jadi, a_t dapat dihitung dari X_t, X_{t-1} dan X_{t-2} sendiri.

Kasus khusus yang lain dari model ARMA (2,1) adalah dapat diperoleh dengan menetapkan $\phi_2 = 0$, ketika $\phi_2 = 0$ maka modelnya menjadi

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} - \theta_1 a_{t-1} + a_t$$

yang mana model ini adalah model ARMA (1,1). Selanjutnya jika ditetapkan $\phi_1 = 0$ dalam model ARMA (1,1) yaitu $\phi_1 = \phi_2 = 0$, maka model ARMA (2,1) menjadi

$$X_t = a_t - \theta_1 a_{t-1}$$

karena model ini hanya meliputi bagian Moving Average pada order satu dinamakan dengan MA (1). Catatan lainnya bahwa model AR (1) itu sendiri adalah kasus spesial dari ARMA (2,1) dengan $\phi_2 = \theta_1 = 0$. Oleh karena itu lebih menguntungkan untuk pencocokkan pertama model ARMA (2,1) melihat apakah model AR (1) kiranya sesuai sebab nilai dari ϕ_2 dan θ_1 berkisar pada nol.

2.4. Model ARMA (3,2)

Model ARMA (3,2) didapat dengan mengambil n = 3 pada model ARMA (n,n-1). Bentuk umum model ARMA (3,2) adalah :

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} - \phi_3 X_{t-3} = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2}$$

Argumen ini berdasar ketika model ARMA (2,1) tidak mencukupi atau memenuhi syarat maka dalam asumsi dasar diberikan pada bagian sebelumnya. Maka a_t bergantung pada salah satu X_{t-3}, X_{t-4}, ... dan atau a_{t-2}, a_{t-3}, ... Besar kemungkinan berikutnya untuk ketergantungan adalah X_{t-3} dan a_{t-3}.

Jika mengikuti argumen yang sama seperti yang digunakan pada perubahan model AR (1) ke model ARMA (2,1) maka dapat dituliskan ketidak cukupan model ARMA (2,1) menjadi

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + a'_t$$

menjadikan a'_t ke dalam empat bagian. Satu bergantung pada X_{t-3}, satu bergantung pada a_{t-1}, satu bergantung pada a_{t-2} dan satu independent pada ketiganya.

$$a'_t = \phi_3 X_{t-3} - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} + a_t$$

dan menuliskan model baru menjadi

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \phi_3 X_{t-3} - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} + a_t$$

atau

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} - \phi_3 X_{t-3} = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2}$$

model ini adalah Autoregresive dependence orde 3 dan

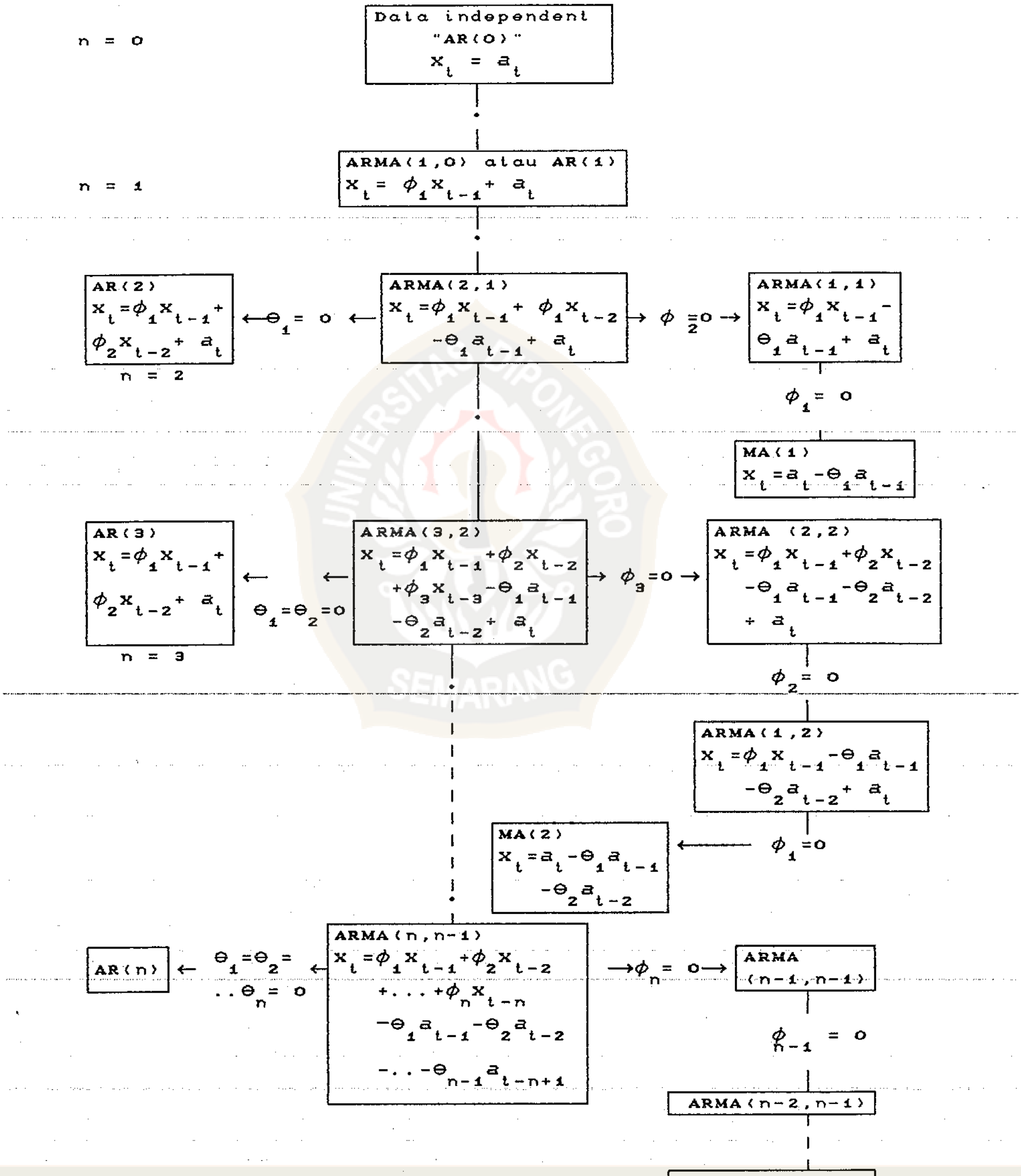
Moving Average dependence orde 2 dan oleh karena ini adalah model ARMA (3,2).

Asumsi dasar dan model ARMA (3,2) adalah

a_t independent pada a_{t-3}, a_{t-4}, ...

a_t independent pada X_{t-4}, X_{t-5}, ...

Dengan proses dan cara yang sama maka akan sampai pada model ARMA (n,n-1).Perkembangan dari model ARMA (n,n-1) dimulai dari asumsi independent atau AR (0), secara skema digambarkan pada gambar (2.1) yang menggambarkan bahwa model ARMA (n,n-1) dimulai dari pertambahan orde yang tumbuh ketika asumsi dasar adalah berturut-turut melemah, dengan memasukkan ketergantungan dari a_t pada X_{t-n-1} dan a_{t-n} maka model telah tergantikan. Semua kasus spesial memasukkan model Autoregresive murni dan Moving Average murni seperti yang telah dibahas. Diagram proses pembentukan model ARMA (n,n-1) terdapat pada halaman berikutnya.



Gambar 2.1 Diagram Poses pembentukan model ARMA (n,n-1)