B A B III

JUMLAH SPANNING-TREE

GRAPH TERHUBUNG TAK BERARAH

Suatu graph dapat disajikan oleh suatu matriks, dalam hal ini oleh matriks *adjacent* dan matriks *incidence*.

Dari suatu matriks dengan ukuran nxm, dapat dibentuk submatriks dengan ukuran bujursangkar nxn dimana $n \le m$, submatriks ini disebut *major submatriks*.

Definisi 25

Misalkan **A** adalah matriks nxm dan **B** adalah matriks mxn dengan $n<m$, maka *major bersesuaian dari* **A** *dan* **B** berukuran n. Jika major **A** terbentuk dari kolom-kolom $i_1, i_2, i_3, \ldots, i_n$ dari **A** dan bersesuaian dengan major **B** yang terbentuk dari baris-baris $i_1, i_2, i_3, \ldots, i_n$ dari **B**.

Contoh 18

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Karena matriks **A** mempunyai ordo 2x4 dan **B** mempunyai ordo 4x2 maka major dari **A** mempunyai ordo n = 2.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$$

dan major bersesuaian dari **B** terhadap major **A** tersebut adalah

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Manfaat dari major bersesuaian dari dua buah matriks adalah dapat menggantikan determinan hasilkali dua buah matriks tersebut. Hal ini dapat diterangkan dengan teorema berikut :

Teorema 3. Binet Cauchy

Jika **A** adalah sebuah matriks dengan ukuran nxm dan **B** adalah matriks dengan ukuran mxn dengan $n \le m$, maka :

det(AB) = $\sum$ (hasilkali major bersesuaian dari A dan B)

Bukti :

Diketahui :

matriks **A** = $(a_{ij})_{nm}$ dan matriks **B** = $(b_{ij})_{mn}$

yaitu :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

sehingga :

$$AB = \begin{bmatrix} \sum\limits_{j_1=1}^{m} a_{1\,j_1} b_{j_1\,1} & \sum\limits_{j_2=1}^{m} a_{1\,j_2} b_{j_2\,2} & \dots & \sum\limits_{j_n=1}^{m} a_{1\,j_n} b_{j_n\,n} \\ \sum\limits_{j_1=1}^{m} a_{2\,j_1} b_{j_1\,1} & \sum\limits_{j_2=1}^{m} a_{2\,j_2} b_{j_2\,2} & \dots & \sum\limits_{j_n=1}^{m} a_{2\,j_n} b_{j_n\,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum\limits_{j_1=1}^{m} a_{n\,j_1} b_{j_1\,1} & \sum\limits_{j_2=1}^{m} a_{n\,j_2} b_{j_2\,2} & \dots & \sum\limits_{j_n=1}^{m} a_{n\,j_n} b_{j_n\,n} \end{bmatrix}$$

$$|AB| = \begin{vmatrix} \sum_{j1=1}^{m} a_{1\,j1} b_{j1\,1} & \sum_{j2=1}^{m} a_{1\,j2} b_{j2\,2} & \cdots & \sum_{jn=1}^{m} a_{1\,jn} b_{jn\,n} \\ \sum_{j1=1}^{m} a_{2\,j1} b_{j1\,1} & \sum_{j2=1}^{m} a_{2\,j2} b_{j2\,2} & \cdots & \sum_{jn=1}^{m} a_{2\,jn} b_{jn\,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{j1=1}^{m} a_{n\,j1} b_{j1\,1} & \sum_{j2=1}^{m} a_{n\,j2} b_{j2\,2} & \cdots & \sum_{jn=1}^{m} a_{n\,jn} b_{jn\,n} \end{vmatrix}$$

$$|AB| = \sum_{\substack{jp=1 \\ \forall p}}^{m} \begin{vmatrix} a_{1\,j1} b_{j1\,1} & a_{1\,j2} b_{j2\,2} & & a_{1\,jn} b_{jn\,n} \\ a_{2\,j1} b_{j1\,1} & a_{2\,j2} b_{j2\,2} & \cdots & a_{2\,jn} b_{jn\,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n\,j1} b_{j1\,1} & a_{n\,j2} b_{j2\,2} & \cdots & a_{n\,jn} b_{jn\,n} \end{vmatrix}$$

$$|AB| = \sum_{\substack{jp=1 \\ \forall p}}^{m} \begin{vmatrix} a_{1\,j1} & a_{1\,j2} & \cdots & a_{1\,jn} \\ a_{2\,j1} & a_{2\,j2} & \cdots & a_{2\,jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n\,j1} & a_{n\,j2} & & a_{n\,jn} \end{vmatrix} b_{j1\,1} \cdot b_{j2\,2} \cdots b_{jn\,n}$$

Jika melihat harga unsur dengan indeks jp yang sama, maka dua kolom pada ruas kanan tentu identik atau sama. Menurut sifat determinan apabila dua baris atau kolom sama maka determinannya adalah 0. Untuk itu tidak memandang pada unsur dengan indeks jp yang sama , karena determinannya akan nol. Jadi hanya menghitung jumlah dari determinan yang tidak nol. Yaitu determinan matriks yang berindeks jp berbeda, sehingga akan ada $\binom{m}{n}$ = m!/n!(m−n)! unsur - unsur tidak nol......(i)

sehingga :

$$|AB| = \sum_{\substack{jp=1 \\ j_1 \neq j_2 \\ \neq \ldots \neq j_n}}^{m} \begin{vmatrix} a_{1\ j_1} & a_{1\ j_2} & \ldots & a_{1\ j_n} \\ a_{2\ j_1} & a_{2\ j_2} & \ldots & a_{2\ j_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n\ j_1} & a_{n\ j_2} & & a_{n\ j_n} \end{vmatrix} b_{j_1\ 1} . b_{j_2\ 2} \ldots b_{j_n\ n}$$

Menurut definisi : Jika matriks A berukuran nxm dan B adalah matriks berukuran mxn dengan n<m, maka mayor bersesuaian dari A dan B berukuran n. Jadi A terbentuk dari kolom j1,j2,...,jn dari A dan bersesuaian dengan major B yang terbentuk dari baris-baris j1,j2,...,jn dari B. (ii)

$$|AB| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

Hal ini benar untuk pemilihan j berbeda. Dari (i) dan (ii) jika diketahui jp adalah suatu kombinasi linier $\binom{m}{n}$ dimana $\binom{m}{n}$ = x, $A_1, A_2, \ldots, A_x$ dan $B_1, B_2, \ldots, B_x$ adalah mayor - mayor yang bersesuaian. maka dapat dituliskan :

$$|AB| = |A_1||B_1| + |A_2||B_2| + \ldots + |A_x||B_x|$$

Jadi teorema terbukti.

Secara mudahnya, berarti perkalian determinan dari matriks A dan matriks B dengan ordo nxm dan mxn adalah hasilkali major determinan matriks yang bersesuaian. Determinan (AB) dapat dinyatakan sebagai jumlah dari m!/n!(m-n)! suku-suku. Setiap suku adalah hasilkali dua determinan ordo nxn terbentuk masing-masing dari matriks A dan matriks B. Sebuah determinan ordo n yang diberikan terbentuk dari kolom $j_1, j_2, \ldots, j_n$ dari A mengalikan determinan yang dibentuk dari baris $j_1, j_2, \ldots, j_n$ dari B dimana ($j_n = 1, 2, \ldots, m$).
Contoh berikut akan memberikan penjelasan tentang teorema tersebut yang menyatakan bahwa determinan hasilkali dua buah matriks sama dengan jumlah hasilkali major bersesuaian dari matriks-matriks tersebut.

Sekarang mencari major bersesuaian dari kedua matriks A berukuran 2x4 dan matriks B berukuran 4x2, maka n = 2, sehingga major-major bersesuaian dari A dan B akan ditunjukkan pada contoh 20.

Contoh 19

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$|AB| = \begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 36 - 24 = 12$$

$\det(AB) = 12$

Matriks **A** berordo 2x4 dan matriks **B** berukuran 4x2

$m!/n!(m-n)! = 4!/2!(4-2)! = 6$

Tetapi $|AB|$ dapat dinyatakan sebagai jumlah dari enam suku, masing-masing adalah hasilkali sebuah determinan 2x2 dari **A** dan sebuah determinan 2x2 dari **B**. Enam pasang determinan yang dapat dibentuk dari **A** dan **B**, masing-masing adalah :

Contoh 20

- Dari kolom 1,2 dari **A** dan baris 1,2 dari **B**

major **A**= $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ =1 bersesuaian dengan major **B** = $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ =-1

- Dari kolom 1,3 dari **A** dan baris 1,3 dari **B**

major **A**= $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ =-1 bersesuaian dengan major **B** = $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ =-5

- Dari kolom 1,4 dari **A** dan baris 1,4 dari **B**

major **A**= $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ =0 bersesuaian dengan major **B** = $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ = 1

- Dari kolom 2,3 dari **A** dan baris 2,3 dari **B**

major **A**= $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$ =-3 bersesuaian dengan major **B** = $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$ =-2

- Dari kolom 2,4 dari **A** dan baris 2,4 dari **B**

major **A**= $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$ =-1 bersesuaian dengan major **B** = $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ = 1

- Dari kolom 3,4 dari **A** dan baris 3,4 dari **B**

major **A**= $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ = 1 bersesuaian dengan major **B** = $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ = 3

Jadi jumlah hasilkali major bersesuaian dari **A** dan **B** adalah :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$= (3-2)(1-2) + (0-1)(1-6) + (1-1)(1-0) + (0-3)(1-3) +$

$\quad (2-3)(1-0) + (1-0)(3-0)$

$= 1.-1 + -1.-5 + 0.1 + -3.-2 + -1.1 + 1.3$

$= -1 + 5 + 0 + 6 + (-1) + 3$

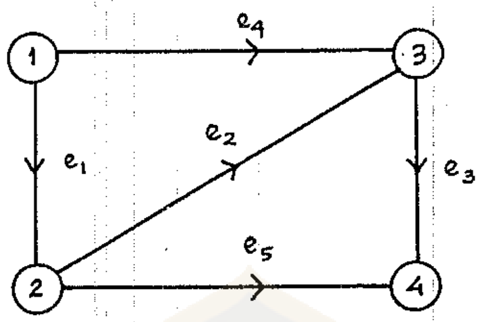
$= 12$

Ternyata hasilnya sama.

Matriks semua verteks *incidence* $A_c = (a_{ij})$ untuk semua graph akan menyajikan hubungan antara sebuah verteks dengan edge yang menghubungkannya. Untuk graph terhubung berarah elemen matriks semua verteks *incidence*, a_{ij} akan berharga 0, jika tidak ada edge ke-j yang menghubungkan verteks ke-i tersebut; akan berharga 1, Jika ada sebuah edge ke-j yang keluar dari verteks ke-i menuju ke verteks yang lain; akan berharga -1, jika ada sebuah edge yang ke j yang masuk ke verteks ke-i dari verteks lain.

Apabila diadakan penghapusan terhadap sebuah baris yang bersesuaian dengan verteks sembarang atas matriks semua verteks *incidence*, maka submatriks yang terbentuk adalah (n-1)xm. Verteks yang bersesuaian dengan baris yang dihapus dari deretan baris matriks *incidence* ini disebut *verteks reference*, dan matriks berukuran (n-1)xm yang terjadi ini disebut *matriks incidence dari suatu matriks* *semua verteks incidence* A_c, serta ditulis sebagai A.

Untuk lebih jelasnya akan diberikan contoh berikut ini (lihat graph pada gambar 29).



gambar 29. Graph terhubung berarah G

Dari gambar tersebut, akan diperoleh matriks semua verteks *incidencenya* berupa :

$$A_c = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Dengan mengambil 4 sebagai verteks *reference*, maka matriks *incidencenya* adalah :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ternyata matriks *incidence* dari suatu graph terhubung berarah mempunyai sifat yang khusus, yaitu selalu mempunyai submatriks bujursangkar yang determinannya 0 atau 1 atau -1. Hal ini disebut *unimodular*. Teorema berikut akan membuktikan hal tersebut.

Teorema 4

Matriks *incidence* dari sebuah graph terhubung berarah adalah *unimodular*.

Bukti :

Untuk menunjukkan sebuah matriks *incidence adalah unimodular*, maka harus ditunjukkan bahwa determinan dari setiap submatriks bujursangkar dari matriks *incidence* tersebut mempunyai determinan 0 atau 1 atau -1. Untuk itu akan dibuktikan dengan cara n-langkah . Misalkan n adalah ordo dari sub matriks bujursangkar maka akan dibuktikan untuk n=1 sampai n=k.

- Ordo submatriks bujursangkar (n) = 1.

  Determinan dari $|1| = 1$, $|-1| = -1$, $|0| = 0$

  terbukti.

- ordo submatriks bujursangkar (n) = 2

  Determinan untuk submatriks bujursangkar ordo 2.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \text{ dan seterusnya.}$$

terbukti

- Ordo submatriks bujursangkar (n) = 3

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

  dan seterusnya .
  terbukti.

Dan seterusnya .

- Ordo submatriks bujursangkar (n) = k

Elemen-eleman dari matriks *incidence* tentu terdiri dari bilangan 0,1 dan atau-1. Pandang sembarang submatriks bujursangkar dari **A** yang *non singular*. Setiap kolom memuat paling banyak dua elemen *tidak nol*, yaitu -1 dan atau 1.

Karena submatriks tersebut *non singular*, maka tidak ada

1. dalam setiap kolom termuat elemen 1 dan -1 bersama-sama.
2. dalam setiap kolom termuat elemen 0 saja (sebab apabila kedua syarat tersebut terpenuhi, maka submatriks tersebut berdeterminan = 0. Hal ini menyatakan pemisalan terdahulu bahwa submatriks tersebut *non singular*).

Jadi akhirnya, ada satu kolom yang memuat tepat satu elemen *tidak nol*, sehingga dengan menghitung determinan submatriks ini melalui bantuan kolom tersebut, tentunya akan dihasilkan determinan +1 atau -1. Terbukti.

Teorema 5

Sebuah major dari **A** adalah *tidak nol* jika dan hanya jika edge-edge yang berhubungan dengan major tersebut membentuk spanning-tree.

Bukti :

a. Akan dibuktikan syarat perlu (------>)

Diketahui : sebuah major dari A adalah *tidak nol*

Dibuktikan : edge-edge yang berhubungan dengan major tersebut membentuk spanning-tree)

Bukti :

G graph terhubung dengan n verteks dan m edge. A_c adalah matriks semua verteks *incidence* dari G, maka A_c berukuran nxm. A adalah sebuah matriks *incidence* dari G, maka A berukuran (n-1)xm. Ambil sebuah major dari A yang *tidak nol*, sebut A_m, maka A_m adalah *non singular*.

Bentuk graph g_m dari G dibentuk oleh edge-edge dari kolom A_m.Terlihat bahwa g_m merupakan subgraph dari G ..(1)

Karena A_m *non singular*, maka ada (n-1) baris / kolom yang bebas linier, sehingga jumlah edge-edge (kolom) dari A_m ada (n-1) buah ....(2)

Dari (1) dan (2) maka g_m mempunyai (n-1) edge ....(3)

Karena A_m adalah major maka A_m=A, berakibat $g_m$mempunyai n verteks ....(4)

Dari (3) dan (4), maka g_m adalah tree. Karena g_m adalah subgraph dari G, maka g_m adalah spanning-tree dari G. Terbukti.

b. Akan dibuktikan syarat cukup (<------)

Diketahui :jika edge-edge yang berhubungan dengan major A membentuk suatu spanning-tree

Dibuktikan :major A adalah *tidak nol*

Bukti :

Ambil g_m yang merupakan sebuah spanning-tree di G, maka g_m mempunyai n verteks dan n-1 edge. Bentuk matriks *incidence* dari g_m dan sebut sebagai A_m yang berukuran (n-1)x(n-1).

Andaikan A_m adalah *singular*. Ini berarti terdapat baris-baris atau kolom-kolom dari A_m yang bergantung linier. Ini berakibat bahwa junlah edge adalah g_m (sesuai jumlah kolom) < (n-1).

Hal ini bertentangan dengan yang diketahui yakni g_m sebuah spanning-tree (mempunyai (n-1) edge). Karena itu, pemisalan bahwa A_m *singular* adalah salah. Jadi A_m haruslah *non singular* (*tidak nol*).

Terbukti.

Berdasarkan teorema yang terdahulu maka dalam menentukan jumlah spanning-tree graph terhubung tak berarah dengan menggunakan matriks *incidence*, seperti pada teorema berikut :

Teorema 6

G adalah graph terhubung tak berarah dan n adalah matriks *incidence* dari G yang didapat dengan memberi arah secara bebas pada edge-edge di G

$$r(G) = \det(AA^t)$$

dengan r(G) adalah jumlah spanning-tree di G.

Bukti :

Menurut teorema 3 (Binet Cauchy) bahwa :

$\det(AA^t) = \Sigma$ (hasilkali major bersesuaian dari A dan A^t)

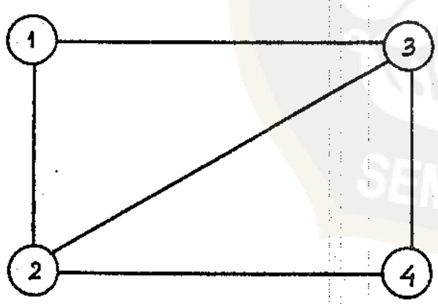
dan menurut theorema 4, matriks *incidence* dari graph berarah adalah *unimodular*. Ini berakibat bahwa submatriks bujursangkar dari A^t mempunyai determinan 1,-1 atau 0. oleh sebab itu, setiap bentuk *tidak nol* pada ruas kanan dari rumus *binet cauchy*, mempunyai harga 1 dan -1. Menurut teorema 5 sebuah major A berharga *tidak nol* jika dan dan hanya jika edge-edge yang bersesuaian dengan kolom-kolom dari major tersebut membentuk spanning-tree. Sehingga terlihat bahwa ada korespondensi satu- satu antara bentuk *tidak nol* pada ruas kanan persamaan *binet cauchy* dengan spanning-tree dari G. Jadi jumlah spanning-tree dapat ditemukan.

Terbukti.

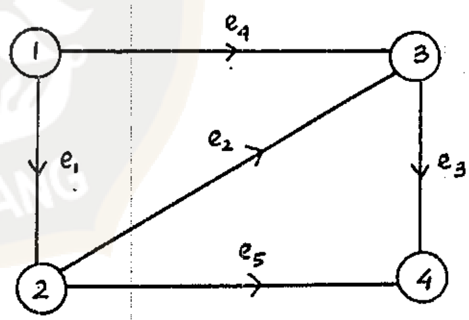
Contoh 22

Gambar 30 graph terhubung tak berarah G.

Gambar 31 graph terhubung berarah G.



gambar 30



gambar 31

Gambar 30 menyajikan suatu contoh graph terhubung tak berarah G .Graph G diberi arah sembarang seperti pada gambar 31, dan matriks verteks *incidencenya* adalah :

$$A_c = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Dengan melihat verteks 4 sebagai verteks *reference*, maka matriks *incidencenya* adalah :

$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

maka

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|AA^t| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$\det(AA^t) = 8$

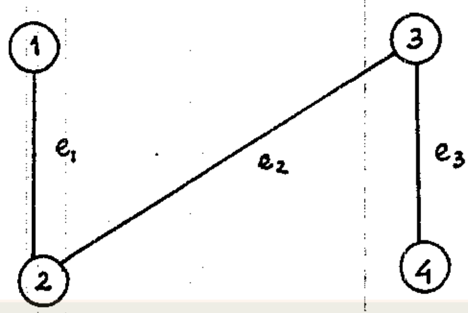
Jadi jumlah spanning-tree ada 8

Major bersesuaian dapat dipergunakan untuk mencari jumlah spanning-tree. Disamping itu melalui perhitungan jumlah spanning-treenya dapat langsung dicari edge-edge pembentuk spanning-tree yang bersangkutan.

Pada contoh graph diatas dapat dibentuk spanning-treenya sebagai berikut :

1. Major pertama dari A yang dibentuk dari kolom 1,2,3 adalah : $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

   Spanning-treenya adalah seperti gambar 32

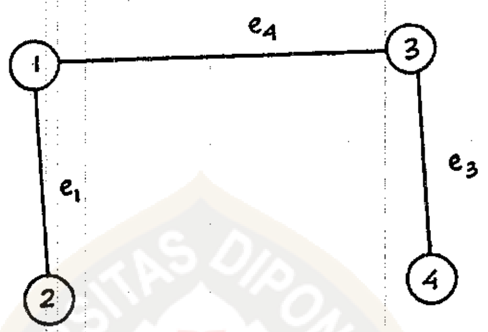


gambar 32. T_1

2. Major kedua dari A yang dibentuk dari kolom 1,3,4

adalah : $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$

Spanning-treenya adalah seperti gambar 33.

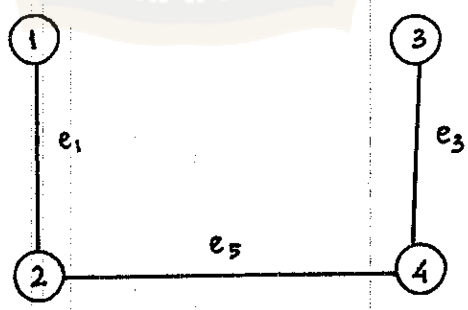


gambar 33. T_2

3. Major ketiga dari A yang dibentuk dari kolom 1,3,5

adalah : $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$

Spanning-treenya adalah seperti gambar 34.

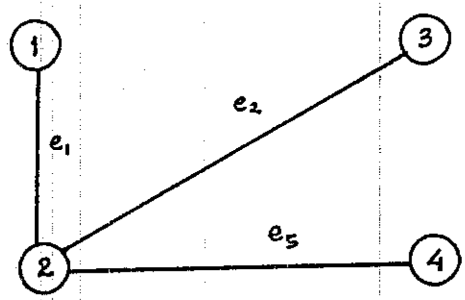


gambar 34. T_3

4. Major keempat dari A yang dibentuk dari kolom 1,2,5

adalah : $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$

Spanning-treenya adalah seperti gambar 35



gambar 35. T_4

5. Major kelima dari A yang dibentuk dari kolom 1,2,4

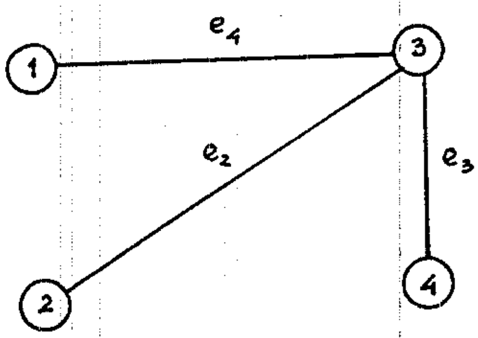
adalah : $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$

karena harga determinan = 0 maka tidak ada spanning-tree

6. Major keenam dari A yang dibentuk dari kolom 2,3,4

adalah : $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1$

Spanning-treenya adalah seperti gambar 36.



gambar 36. T

7. Major ketujuh dari A yang dibentuk dari kolom 2,3,5

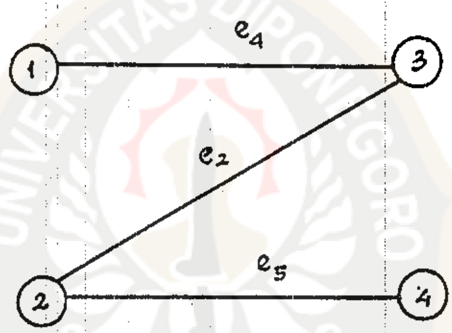
adalah :
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

karena harga determinan = 0 maka tidak ada spanning-tree.

8. Major kedelapan dari A yang dibentuk dari kolom 2,4,5

adalah :
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

Spanning-treenya adalah seperti gambar 37

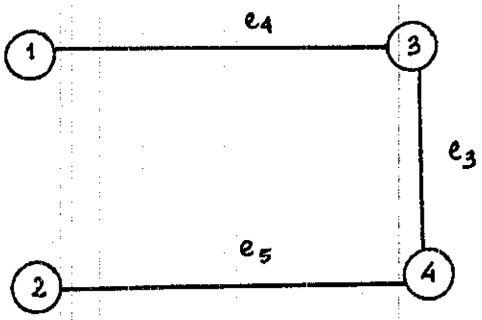


gambar 37. T_6

9. Major kesembilan dari A yang dibentuk dari kolom 3,4,5

adalah :
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

Spanning-treenya adalah seperti gambar 38.

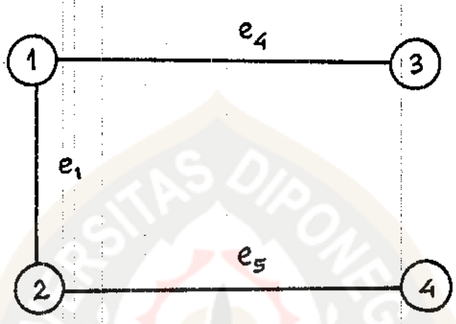


gambar 38. T_7

10. Major kesepuluh dari A yang dibentuk dari kolom 1,4,5

adalah : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$

Spanning-treenya adalah seperti gambar 39.



gambar 39. T_8

Sedangkan jumlah spanning-tree tersebut dapat dicari sebagai jumlah haslkali major bersesuaian A dan A^t sesuai teorema yaitu :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$= 1.1 + 0.0 + 1.1 + -1.-1 + -1.-1 + 1.1 + 1.1 + 0.0 + 1.1$
$+ 1.1 + -1.-1$

$= 1 + 0 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 0 + 1 + 1 + 1$

$= 8$

Dengan demikian terlihat bahwa jumlah spanning-tree yaitu **8** sama dengan det(**AA**^{t}) atau jumlah hasilkali major bersesuaian matriks **A** dan matriks **A**^{t}.