BAB II
MATERI DASAR

II.1 PEMETAAN

DEFINISI II.1.1

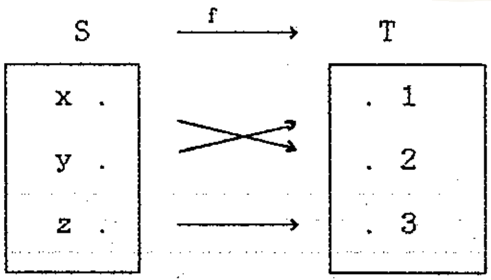
Pemetaan dari himpunan S ke himpunan T adalah suatu relasi dimana untuk setiap elemen dari S menentukan dengan tunggal satu anggota dalam T . S disebut domain (daerah asal) dan T disebut daerah hasil (kodomain).

$$f : S \longrightarrow T \text{ , bhb. } (\forall s \in S)(\exists! t \in T).f(s) = t$$

Contoh :

1. Ambil S = {x,y,z} dan T = {1,2,3}.

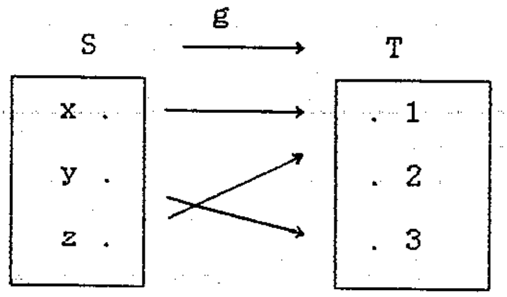
   f :didefinisikan dengan f(x)= 2, f(y)=1, f(z)= 3 adalah pemetaan dari S ke T.



domainnya {x,y,z}

co-domainnya {1,2,3}

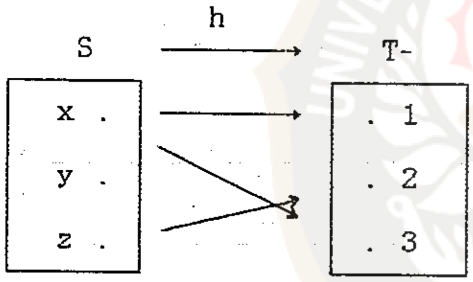
2. g : S $\longrightarrow$ T didefinisikan dengan g(x) = 1 g(y) = 3 dan g(z) = 1 adalah suatu pemetaan.



domain : (x, y, z)

co-domain : (1,2)

3 . h : S ⟶ T didefinisikan dgn h(x)= 1, h(x)= 3 dan h(z)= 2 adalah bukan merupakan suatu pemetaan, seperti pada gambar di bawah ini :



domain : {x,y,z}

co-domain :{1,2,3}

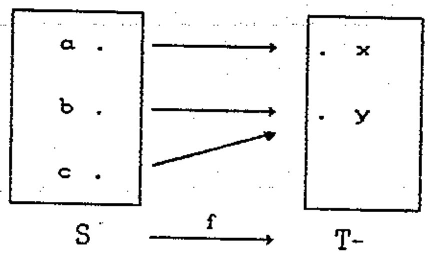
Alasan :

- x dipetakan ke dua elemen dalam T
- ada elemen dari S yang tidak punya kawan di T.

DEFINISI II.1.2 Surjektif

Suatu pemetaan dari S ke T dimana elemen-elemen dari T dihabiskan (punya kawan di S) disebut *surjektif* atau pemetaan dari S onto T.

$f: S \longrightarrow T$ surjektif bhb $(\forall t \in T)(\exists s \in S)\ f(s)=t$



$f : s \longrightarrow$ adalah pemetaan *surjektif*

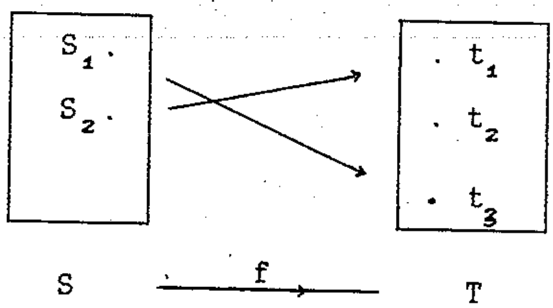
DEFINISI II.1.3 Injektif

Suatu pemetaan dimana untuk setiap $t \in T$ yang mempunyai kawan hanya mempunyai satu kawan saja di S disebut *injektif* atau pemetaan dari S one-to-one T. Sehingga pada suatu pemetaan yang injektif, untuk setiap pasangan $s_1, s_2 \in S$ berlaku $f(s_1) = f(s_2) \Rightarrow s_1 = s_2$

$(\forall S_1, S_2 \in S)\ f(S_1) = f(S_2) \Rightarrow S_1 = S_2$

dengan kontra posisi :

$(\forall S_1, S_2 \in S)\ S_1 \neq S_2 \Rightarrow f(S_1) \neq f(S_2)$

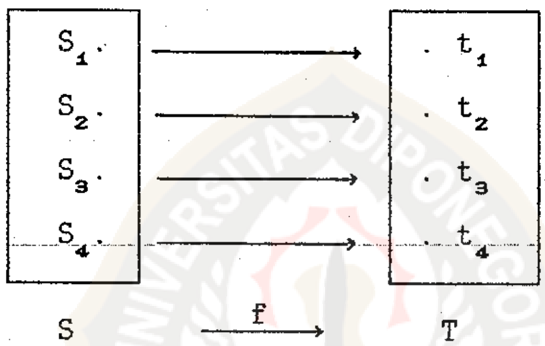


$f: S \longrightarrow T$ adalah pemetaan injektif

DEFINISI II.1.4 Bijektif

Pemetaan yang sekaligus surjektif dan injektif disebut *bijektif* dimana setiap elemen dari S menentukan dengan tunggal satu elemen dari T daan sebaliknya.

contoh :

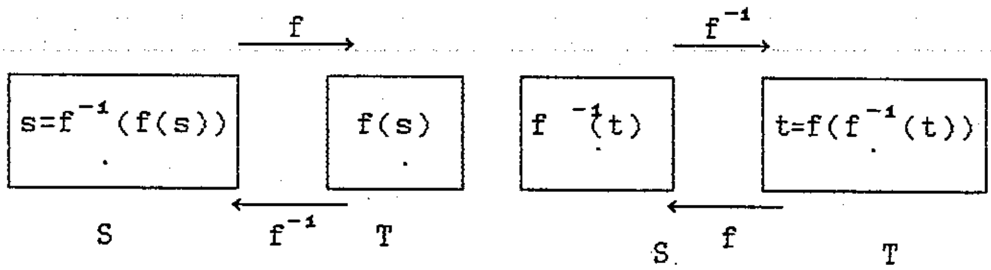


$f : S \longrightarrow T$ adalah bijektif

Bila dan hanya bila f suatu pemetaan yang bijektif maka f^{-1} dapat dipandang suatu pemetaan dari T ke S , dimana f^{-1} juga bijektif dan dinamakan pemetaan invers.

Pada pemetaan invers ini berlaku :

1. $(\forall\ s \in S).f^{-1}\ (f(s)) = s$
2. $(\forall\ t \in T).f\ (f^{-1}(t)) = t$



Suatu fungsi bijektif yang penting adalah fungsi Identitas (I).

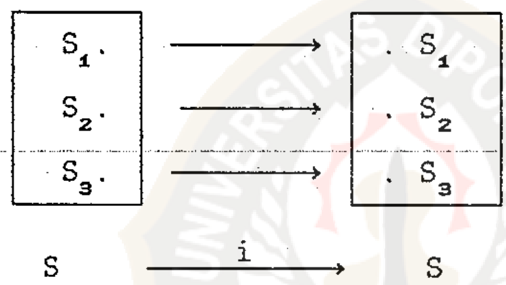
DEFINISI II.1.5 Identitas

Suatu pemetaan yang memetakan setiap s ke dirinya sendiri.

$i : S \longrightarrow s$ adalah identitas bhb.($\forall s \in S$).

$(s) = s$

contoh :



Contoh :

1. Misal S himpunan bilangan bulat non negatif sedang T adalah himpunan bilangan bulat (positif, nol dan negatif) maka pemetaan :

   $f : S \longrightarrow f(s) = s+1$ adalah injektif (one-one) tapi tidak surjektif (onto) sebab ada elemen dari T yang tidak punya kawan di S yaitu bilangan negatif.

2. S adalah himpunan bilangan bulat (positif, nol, negatif). T juga himpunan bilangan bulat, maka pemetaan

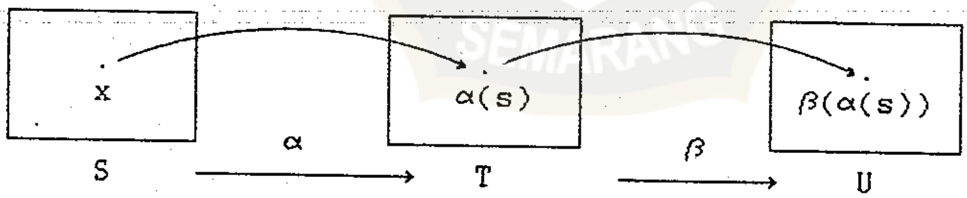
$$f : S \longrightarrow f(s) = 0 \quad \text{, untuk n ganjil}$$
$$= \frac{n}{2} \quad \text{, untuk n genap}$$

adalah pemetaan surjektif (onto) tapi tidak injektif (one-one).

3. S himpunan bilangan alam , sedang T bilangan genap positif, maka pemetaan $f : S \longrightarrow f(s) = 2s$ adalah pemetaan yang bijektif (one - one and onto).-

KOMPOSISI PEMETAAN

Bila $\alpha : S \longrightarrow T$ dan $\beta : T \longrightarrow U$, kemudian $\alpha(s) \in T$ untuk setiap $s \in S$, maka dapat ditulis $\beta(\alpha(s))$, adalah suatu elemen dari U.



Terlihat bahwa α dilanjutkan β merupakan pemetaan dari S ke U. Pemetaan semacam ini dinamakan komposisi dari α dan β, dan dinotasikan dengan β,α. (dibaca β dot α).

Sehingga dapat didefinisikan :

$$(\beta,\alpha((s) = \beta (\alpha(s) , (\nabla s \in s)$$

Contoh :

Ambil α dan β suatu pemetaan dari himpunan-himpunan golongan Real untuk domain dan Codomainnya. dimana :

$$\alpha(x) = x^2 + 2 \quad \text{dan } \beta(x) = x - 1$$

maka : $(\alpha,\beta)(x) = \alpha\beta(x)$

$$= \alpha(x-1)$$

$$= (x-1)^2 + 2$$

$$= x^2 - 2x + 3$$

sementara $(\beta\ \alpha)(x) = \beta(\alpha(x))$

$$= \beta(x^2 + 2)$$

$$= (x^2 + 2) - 1$$

$$= x^2 + 1$$

misal : $(\alpha\ \beta)(0) = 3$, tapi $(\beta\ \alpha)(0) = 1$

Jadi $(\alpha\ \beta)(x) \neq (\beta\ \alpha)\ (x)$

Jadi komposisi (pergandaan) pemetaan pada umumnya tidak bersifat komutatif.

THEORMA II.1.1.

Komposisi pemetaan bersifat assosiatif, yaitu :

$$(f.g)\ h = f(g.h)$$

Bukti :

Harus dibuktikan bahwa untuk setiap s berlaku

$$\overline{(f\ g)}\ h(s) = \overline{f\ (g\ h)}\ (s)$$

$\overline{(f\ g)\ h}(s) = \overline{(fg)}\ (h(s)) \quad = f(g(h(s)))$

$\overline{f\ (gh)}(s) \quad = f\ \overline{(gh)}(s) \quad = f\ (g(h(s))$

Jadi terbukti

$(f\ g)\ h \ = f\ (gh)$

THEOREMA II.1.2

Diasumsikan bahwa $\alpha : s \longrightarrow T$ dan $\beta : T \longrightarrow U$

a) Jika α dan β Surjektif maka $\beta \cdot \alpha$ adalah surjektif

b) Jika $\beta\alpha$ surjektif maka β surjektif

c) Jika α dan β injektif maka $\beta \cdot \alpha$ adalah injektif

d) jika $\beta \cdot \alpha$ injektif maka α adalah injektif.

Bukti :

a) Diasumsikan α dan β surjektif

untuk membuktikan $\beta\ \alpha$ surjektif, harus ditetapkan

$(\forall u \in U)(\exists s \in s)\ (\beta\ \alpha)(s) = u$

ambil $u \in U$, karena β surjektif maka

$(\exists t \in T)\ \beta(t) = u$

juga untuk α surjektif maka $(\exists s \in S)\ \alpha(s) = 1$

sehingga berlaku :

$(\beta\ \alpha)(s) = \beta(\alpha(s))$

$= \beta(t)$

$= u$

sehingga terbukti $\beta.\alpha$ adalah surjektif.

b) Diasumsikan $\beta.\alpha$ surjektif dan

$$(\forall u \in u)(\exists s \in S)(\beta\alpha)(s) = u$$

sehingga untuk $(\beta\alpha)(s) = \beta(\alpha(s)) = u$

dimana $\alpha(s) \in T$

Oleh karena itu β adalah surjektif

c) Diasumsikan α dan β injektif

untuk membuktikan $\beta\ \alpha$ injektif akan dibuktikan

$$(\forall s_1, s_2 \in s)(\beta\alpha)(s_2) = (\beta\alpha) \Longrightarrow s_1 = s_2$$

$\circ$ $(\beta\alpha)(s_1) = (\beta\alpha)(s_2) \Longrightarrow \alpha(s_1) = \alpha(s_2)$, β injektif

$\circ\circ$ $\alpha(s_1) = \alpha(s_2) \Longrightarrow s_1 = s_2$, α injektif

dari $\circ$ dan $\circ\circ$ maka β a injektif

d) Diasumsikan $\beta\ \alpha$ injektif

$(\forall\ s_1, s_2 \in S)\ \alpha(s_1) = \alpha(s_2) \Longrightarrow \beta(\alpha(s_1)) = \beta(\alpha(s_2))$

dari (c) diketahui $(\beta\alpha)(s_1) = (\beta\alpha)(s_2) \Longrightarrow s_1 = s_2$

$\beta\alpha$ injektif karenanya α adalah injektif

DEFINISI II.1.6

Elemen $e \in S$ adalah identitas (elemen identitas) untuk operasi dot ($\circ$) ada s, jika

$$e\ .\ a = a\ .\ e = a \quad \forall\ a \in S$$

dimana

$\circ$) 0 adalah elemen identitas untuk penjumlahan

$\circ\circ$) 1 adalah elemen identitas untuk pergandaan

DEFINISI II.1.7

Diasumsikan bahwa untuk operasi dot ($\circ$) pada s, dengan $e, a \in s$, maka $b \in s$ disebut invers dari a jika $\quad a\ .\ b = b\ .\ a = e$

DEFINISI II.1.8

Suatu dot (∘) pada s disebut komutatif jika

$$a \cdot b = b \cdot a \qquad \forall\, a,b \in s$$

II. 2. RELASI EQUIVALENSI

DEFINISI II.2.1

Suatu relasi R dikatakan determinatif pada semesta s atau antara elemen-elemen s bhb kalimat "a R b" (dibaca : a berada dalam relasi R dengan b) adalah kalimat deklaratif untuk setiap a,b dalam s

R determinatif bhb $(\forall a,b \in s)\ aRb \vee a \not R\, b$

DEFINISI II.2.2

Relasi R disebut reflektif bhb untuk setiap elemen dari semestanya berlaku a R a

R reflektif bhb $(\forall\ a \in S)\ aRa$

DEFINISI II.2.3

Relasi R disebut symetris bhb untuk setiap a,b dari semestanya berlaku : apabila a R b maka b R a

R symetris bhb $(\forall\ a,b \in S)\ aRb \Longrightarrow b\ R\ a$

DEFINISI II.2.4

Relasi R disebut transitif bhb untuk setiap tripel a,b,c dari semestanya berlaku, apabila a R b dan b R c maka a R c.

DEFINISI II.2.5

Suatu relasi R yang sekaligus memiliki sifat-sifat reflektif symetris dan transitif disebut relasi equivalensa.

II. 3. G R O U P

DEFINISI II.3.1

Suatu group abstrak s<G,*> adalah suatu himpunan G yang terdiri dari elemen-elemen beserta operasi binair "*" yang didefinisikan pada G dan mempunyai axioma-axioma sebagai berikut :

a) Tertutup

Untuk setip pasangan elemen a dan b (berlainan atau sama) dapat ditemukan dengan tunggal s`tu elemen c dalam G sedemikian sehingga a * b = c

$(\forall a,b \in G)(\exists!\ c \in G)\ a * b = c \quad c$

b) Assosiatif

Untuk tripel a, b, c dalam G berlakulah

$(a*b)*c = a*(b*c)$

$(\forall a,b,c \in G)\ (a * b) * c = a* (b * c)$

c) Mempunyai elemen netral/identitas

Yaitu ada elemen c dalam e * a = a * e = a

$(\exists e \in G)\ (\forall a \in G)\ e * a = a * e = a$

d) Mempunyai elemen invers

untuk setiap a dalam G dapat ditemukan a' dalam G sedemikian sehingga $a' * a = a * a' = e$

Keempat sifat di atas disebut axioma dari group, jika dipenuhi pula axioma

e) komutatif

yaitu setiap pasangan a dan b dalam G, maka berlaku $a * b = b * a$

$(\forall\ a,b \in G)\ a * b = b * a$

Maka groupnya disebut komutatif atau group abelian.

Catatan : 1. untuk operasi pergandaan $* = \circ$

2. Untuk operasi penjumlahan $* = +$

Contoh :

Himpunan bilangan real terhadap penjumlahan $\langle R,* \rangle$ adalah group.

Bukti :

$\langle z,+ \rangle \Longrightarrow$ 1. $(\forall a,b \in R)(\exists!\ c \in R).\ a+b = c$ terpenuhi

2. $(\forall a,b,c \in R).\ (a+b)+c = a+(b+c)$ terpenuhi

3. $(\forall a \in R)(\exists!\ 0 \exists R).\ 0+a = a+0 = a$ terpenuhi

4. $(\forall a \in R)(\exists! -a \in R).\ -a+a = a+(-a) = 0$ terpenuhi

karena semua axioma group terpenuhi, maka $\langle R,+ \rangle$ adalah suatu group.

II.4 SUB GROUP

DEFINISI II.4.1

Koompleks dalam trheorema group adalah himpunan bagian sebarang dari group G, biasa disajikan dengan huruf besar A,b,...

DEFINISI II.4.2

Hasil ganda dari dua komplek A dan B adalah himpunan elemen a.b dengan $a \in A$ $b \in B$.

$AB = df. \{\alpha \in G \mid x = ab.\ a \in A \ \&\ b \in B\}$.

DEFINISI II.4.3

Apabila A suatu komplek maka A' dimaksud suatu himpunan elemen-lemen a^{1} dengan $a \in A$

$A^{1} = df\ \{ x \in G \mid x = a^{1} \ \&\ a \in A\}$

DEFINISI II.4.4

Apabila A suatu kompleks dari group G disebut subgroup dari G bhb terhadap hukum komposisi yang sama dengan hukum komposisinya G.

TEOREMA II.4.1

Syarat perlu dan cukup agar supaya kompleks H merupakan subgroup dari G adalah adalah berlakunya $\forall$ a,b $\in$ G

(i) $a,b \in H \Rightarrow a * b \in H$

(ii) $a \in H \Rightarrow a' \in H$

BUKTI :

Akan dibuktikan dua langkah :

(i) Berdasarkan syarat 1 dan 2 diatas harus dapat dibuktikan bahwa H merupakan group, jadi H harus memenuhi axioma group.

a). $a,b \in H \Rightarrow a*b \in H$

b). Karena $H \in G$ maka setiap anggota H merupakan anggota G.

Padahal $(\forall\ a,b,c \in H)$. $a * (b * c *)$

$= (a * b) * c$

maka $(\forall\ a,b,c \in H). a*(b * c *)=(a * b) * c$

c). $a \in H \Rightarrow a' \in H$ punya invers

d). $a \in H$ dan $a' \in H$, karena sifat tertutup maka

$a' * a = e \in H$. Jadi punya elemen netral.

Axioma group terpenuhi maka H subgroup.

(ii) Dengan berdasar axioma group, harus dapat dibuktikan H memenuhi kedua syarat diatas.

BUKTI : a). Karena H punya sifat tertutup, maka

$a,b \in H \Rightarrow a * b \in H$

b). Karena H punya invers maka berlaku

$a \in H \Rightarrow a' \in H$

Dari (i) dan (ii) terbukti theorema diatas.

DEFINISI II.4.5 Group berhingga

Suatu group dimana jumlah (banyaknya) elemen-elemen himpunan yang dikenakan pada operasi binair berhingga banyaknya, dan dinotasikan $Z_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n}\}$.

Contoh II. 4.5

$Z_4 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$ dengan operasi "*" adalah penjumlahan bilangan bulat modulo 4.

DEFINISI II.4.6

Order dari suatu group G dinotasikan dengan $|G|$ atau θ (G) adalah banyaknya anggota G.

Contoh : Z_4 mempunyai order $\theta(G) = |G| = 4$

THEOREMA II.4.2 THEOREMA LAGRANGE.

Misal G group berhingga dan g subgroup dari G yang berorder m, maka m membagi $|G|$.

BUKTI :

Order dari g adalah $\theta(g)$ merupakan subgroup dari G maka $\theta(g) = |g|$ membagi $\theta(G) = |G|$

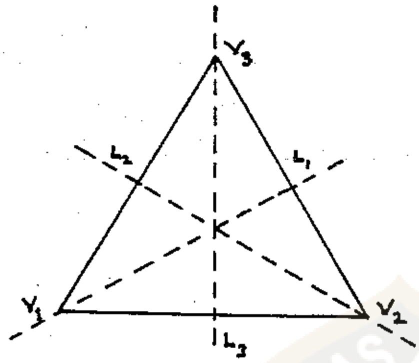
karena $m = |g|$ maka m membagi $|G|$

DEFINISI II.4.7 GROUP CYCLIC

Group yang dapat dibangun oleh elemen tunggal dikatakan sebagai group cyclic. Jadi group H adalah cyclic jika bisa ditemukan sebuah elemen, $x \in H$ sehingga $H = \theta((\{x\}) = \theta(x)$, dimana jika $\theta(x) = H$ maka dikatakan H dibangun oleh x.

II.5. ISOMORHISMA

Sebelum kita pelajari konsep dari isomorphisma, terlebih dulu kita pandang beberapa contoh berikut.



Dari segitiga sama kaki diatas kita peroleh himpunan dari semua titik pada tiga sisi segitiga tersebut. Dengan pengeseran kaku (rigidmotion) dari segitiga, kita maksudkan suatu bijektif dari himpunan titik-titik segitiga ke dirinya sendiri dengan ditandai jarak antar dua titik yang tetap. Dengan kata lain, pergeseran kaku dari segitiga adalah bijektif yang mana mengandung suatu jarak.

Rigias Motion ini (atau biasa disebut symetry) merupakan group sehubung dengan composisi pemetaan (mapping). Dari sini terdapat seluruhnya b elemen dari group sebagai berikut :

1. e , pemetaan identitas
2. r , rotasi 120^o terhadap pusat O pada bidang segitiga
3. $r^2 = r \cdot r$, rotasi 240^o terhadap pusat O

4. f , refleksi terhadap garis L_1 melalui V_1 dan 0

5. g , refleksi terhadap garis L_2 melalui V_2 dan 0

6. h , refleksi terhadap garis L_3 melalui V_3 dan 0

Rigid motion dapat di diskripsikan dari indikasi nilai-nilai berikut :

$$e : \begin{cases} e\ (V_1) = V_1 \\ e\ (V_2) = V_2 \\ e\ (V_3) = V_3 \end{cases} \qquad h : \begin{cases} h\ (V_1) = V_1 \\ h\ (V_2) = V_2 \\ h\ (V_3) = V_3 \end{cases}$$

$$r : \begin{cases} r\ (V_1) = V_1 \\ r\ (V_2) = V_2 \\ r\ (V_3) = V_3 \end{cases} \qquad g : \begin{cases} g\ (V_1) = V_1 \\ g\ (V_2) = V_2 \\ g\ (V_3) = V_3 \end{cases}$$

$$r^2 : \begin{cases} r^2\ (V_1) = V_1 \\ r^2\ (V_2) = V_2 \\ r^2\ (V_3) = V_3 \end{cases} \qquad f : \begin{cases} f\ (V_1) = V_1 \\ f\ (V_2) = V_2 \\ f\ (V_3) = V_3 \end{cases}$$

Kita peroleh group G = $\{e, r, r^2, h, g, f\}$

Sedang tabel multiplikasi dari G adalah :

0	e	r	r^2	h	g	f
e	e	r	r^2	h	g	f
r	r	r^2	e	g	f	h
r^2	r^2	e	r	f	h	g
h	h	f	g	e	r^2	r
g	g	h	f	r	e	r^2
f	f	g	h	r^2	r	e

Kita bandingakan dengan suatu contoh lain yaitu group S(A), dimana A= {1,2,3} dengan pemetaan bijektif sebagai berikut :

$$I : \begin{cases} I(1) = 1 \\ I(2) = 2 \\ I(3) = 3 \end{cases} \qquad \sigma : \begin{cases} \sigma(1) = 2 \\ \sigma(2) = 1 \\ \sigma(3) = 3 \end{cases}$$

$$\rho : \begin{cases} \rho(1) = 2 \\ \rho(2) = 3 \\ \rho(3) = 1 \end{cases} \qquad \gamma : \begin{cases} \gamma(1) = 3 \\ \gamma(2) = 2 \\ \gamma(3) = 1 \end{cases}$$

$$\rho^2 : \begin{cases} \rho^2(1) = 3 \\ \rho^2(2) = 1 \\ \rho^2(3) = 2 \end{cases} \qquad \delta : \begin{cases} \delta(1) = 1 \\ f(2) = 3 \\ f(3) = 2 \end{cases}$$

Kita peroleh group S(A) = $\{I, \rho, \rho^2, \sigma, \gamma, \delta\}$

Sedang tabel multiplikasi dari S(A) adalah :

0	I	ρ	ρ^2	σ	γ	δ
I	I	ρ	ρ^2	σ	γ	δ
ρ	ρ	ρ^2	I	γ	δ	σ
ρ^2	ρ^2	I	ρ	δ	σ	γ
σ	σ	δ	γ	I	ρ^2	ρ
γ	γ	σ	δ	ρ	I	ρ^2
δ	δ	γ	σ	ρ^2	ρ	I

Ambil element dari G berkorespondensi dengan element dari S(A) , dengan suatu pemetaan :

$\phi : G \longrightarrow S(A)$ yang diberikan oleh :

$\phi(e) = I$

$\phi(r) = \rho$

$\phi(r^2) = \rho^2$

$\phi(h) = \sigma$

$\phi(g) = \gamma$

$\phi(f) = \delta$

Maka pemetaan ini adalah bijektif dari G ke S(A) dimana ϕ mempunyai sifat :

$\phi(x \circ y) = \phi(x) \circ \phi(y)$

Pemetaan semacam ini disebut Isomorphisma.

Contoh :

$\circ>$ $\phi(r \circ h) = \phi(g) = \gamma$

$\circ\circ>$ $\phi(r) \circ \phi(h) = \rho \circ \sigma = \gamma$

Dari $\circ>$ dan $\circ\circ>$ maka :

$\phi(r \circ h) = \phi(r) \circ \phi(h)$

II.6. GROUP-GROUP PERMUTASI BERHINGGA

Anggap A suatu himpunan berhingga dari n elemen

$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

Setiap permutasi f pada A ditentukan dengan n pilihan untuk harga-harga dari $f(a_1)$, $f(a_2)$, ...$f(a_n)$

Untuk mendapatkan harga-harga tersebut, terdapat n pilihan untuk $f(a_1)$,(n-1) pilihan untuk $f(a_2)$, (n-2) pilihan untuk $f(a_3)$ dan seterusnya.

Jadi terdapat n(n-1)(n-2) ... 3.2.1 = n! cara yang berbeda dalam menentukan f, dan S(A) mempunyai n elemen. Setiap elemen f dari S(A) dinyatakan dalam matrik, dimana bayangan dari a_i terletak di bawah a_i.

$$f = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots\ldots & a_n \\ f(a_1) & f(a_2) & \ldots\ldots & f(a_n) \end{bmatrix}$$

Setiap permutasi pada A dapat dihubungkan ke permutasi f' pada B = {1,2,...,} dengan perpindahan ak, k = 1,2,.....,

$$f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \ldots\ldots & n \\ f'(1) & f'(2) & \ldots\ldots & f'(n) \end{bmatrix}$$

Pemetaan $f \longrightarrow f'$ adalah suatu isomorphisma dari S(A) ke S(B) dari groupnya sama kecuali pada notasinya. Untuk inilah dapat dipandang suatu permutasi pada himpunan n elemen sedemikian rupa sehingga dapat ditulis sebagai himpunan B = {1,2,......,n}

Group S(B) ini dikenal sebagai group simetris pada n elemen dan dinotasikan dengan S_n atau sym (s).

Contoh :

Disajikan suatu matriks dengan notasi :

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

merupakan suatu permutasi f yang adalah elemen dari S_5 dimana f(1) = 3, f(2) = 5, f(3) = 1, f(4) = 4 dan f(5) = 2

DEFINISI II. 6.1

Suatu elemen f dari Sn adalah Cycle (perputaran) jika terdapat suatu himpunan $\{i_1, i_2, \ldots i_r\}$ dari 2 baris integer sedemikian sehingga :

$f(i_1) = i_2$, $f(i_2) = i_3$, ...$f(i_r) = i_r$ dan $f(i_r) = i$ dan f berlaku untuk semua elemen.

Dari definisi tersebut, f adalah Cycle jika terdapat 2 barisan integer 1_1, i_2, ...i_r $\exists$ f memetakan elemennya sesuai suku yang melingkar, sehingga :

$$i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow i_3 \rightarrow \ldots\ldots\ldots \rightarrow i_{r-1} \rightarrow i_r$$

dan f berjalan dari titik tetap satu ke titik tetap lainnya. Suatu cycle semacam ini dapat ditulis :

$f = (i_1, i_2, \ldots, i_r)$

dimana dapat dimengerti bahwa

$f(i_k) = i_{k+1}$ untuk $1 \leq k < r$ dan $f(i_r) = i_1$.

Contoh :

Dari permutasi $f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 6 & 3 & 7 & 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

dapat disederhanakan menjadi :

$f = [\ 2,\ 6,\ 4,\ 7]$

Akan tetapi, expresi tersebut tidaklah unique (tunggal) untuk

$$\begin{aligned} f &= (2,\ 6,\ 4,\ 7) \\ &= (6,\ 4,\ 7,\ 2) \\ &= (4,\ 7,\ 2,\ 6) \\ &= (7,\ 2,\ 6,\ 4) \end{aligned}$$

f kuasa-kuasa lengkap yang positif (the positive integral powers)(*) dari cycle f adalah mudah untuk menghitungnya selama f^m akan dipetakan dari setiap integer dalam cycle ke integer m tempat dibelakangnya dalam cycle, misal untuk :

$f = (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9)$

maka

f^2 memetakan setiap elemen ke elemen 2 tempat dibelakangnya sehingga urutannya menjadi :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

$\therefore\ f^2 = (1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8)$

selanjutnya f^3 adalah memetakan setiap ke elemen 3 tempat dibelakangnya sehingga :

$$f^3 = (1, 4, 7)(2, 5, 8)(3, 6, 9)$$

$$f^4 = (1, 5, 9, 4, 8, 3, 7, 2, 6)$$

dan seterusnya. Dari hubungan ini dapat diperlihatkan bahwa order dari r cycle (cycle dengan r elemen) adalah r.

Catatan : (*) positive integral power adalah sebagai berikut :

$$f^2 = f \circ f$$

$$f^3 = f \circ f^2 = f \circ f \circ f$$

$$\vdots$$

$$f^m = f \circ f^m = \underbrace{f \circ f \circ f \circ \ldots \circ f}_{m \text{ faktor}}$$

Invers dari elemen permutasi adalah dengan membaca dari baris bawah dan dipetakan ke baris atasnya :

Contoh :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

sedang composisi dari permutasi selalu mengikuti hukum yang sama.

Sebagaimana komposisi pemetaan, yaitu di baca dari kanan ke kiri.

Contoh :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

tetapi :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Jadi tidak berlaku sifat komulatif.

II.7. GROUP SYMMETRY

Group symmetry adalah himpunan dari semua isometri yang terdapat pada suatu bidang. Sebelum membicarakan Group symmetry, akan kita bahas terlebih dahulu "isometry" atau disebut juga "motion".

Ambil : P = adalah himpunan semua titik dalam bidang

M = adalah himpunan semua permutasi dari P yang mempertahankan jaraknya.

Misal bila p dan q di dalam P μ di dalam M, maka jarak antara permutasi p atau $\mu(p)$ dan permutasi q atau $\mu(q)$ adalah sama dengan jarak antara p dan q. Permutasi dalam P disebut motions atau isometri dari bidang.

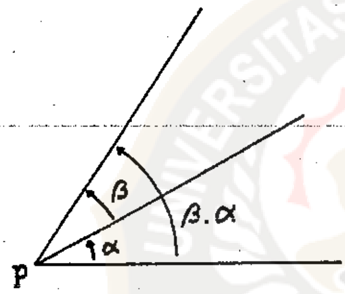
DEFINISI II.7.1

Suatu isometri dari ruang dimensi-n (R^n) adalah fungsi satu-satu dan onto dari R^n ke R^n yang mempertahankan jaraknya.

Terdapat 3 tipe dasar dari isometri, yaitu :

1. Rotasi

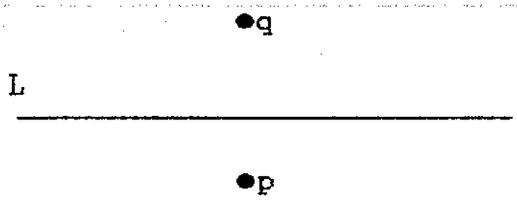
   Jika P adalah titik tetap dibidang P dan G adalah himpunan semua rotasi dari bidang terhadaap titik tetap P. Setiap elemen G disimbolkan M(P). Jika α dan β merupakan rotasi terhadap p, maka rotasi $\beta.\alpha$ adalah rotasi sebesar α kemudian dilanjutkan dengan rotasi sebesar β.



Gambar 1. rotasi

2. Refleksi

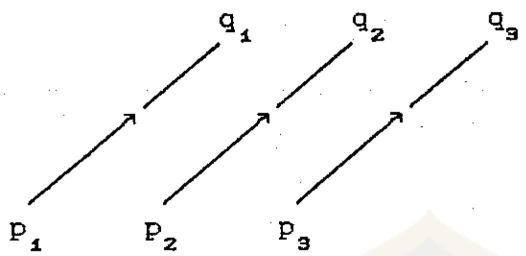
   Refleksi pada bidang P terhadap garis L di dalam p adalah pemetaan yang membawa setiap titik di p ke titik q sedemikian sehingga ∠ tegak lurus segment garis pq dan jarak p ke ∠ = jarak dari q ke ∠.



Gambar 2. Refleksi

3. Translasi

Translasi pada bidang P adalah pemetaan yang membawa semua titik dari P dengan jarak yang sama dan dengan arah yang sama.



Gambar 3. Translasi

TEOREMA II.7.1

Himpunan M semua isometri dari bidang P merupakan sub group dari symmetry P dan dinotasikan sym(P).

BUKTI :

Untuk $p.q \in P$

Ambil $d(p,q)$ sebagai jarak antara p dan q, dengan notasi tersebut, jika $\alpha \in$ sym(P) maka :

$$\alpha \in M \qquad \text{jika} \quad d(\alpha(p),\alpha(q)) = d(p,q)$$

Untuk membuktikan M subgroup harus diselidiki dengan teorema dari subgroup.

Pertama, i identitas dari sym(P), jelas di dalam M. sehingga M tak kosong.

Assumsikan $\alpha \in M$ dan $\beta \in M$, jika $p,q \in P$, maka :

$$d[(\alpha,\beta)(p),\ (\alpha.\beta)\ (q)] = d[(\alpha(\beta)(p),\alpha(\beta)(q)]$$

$$= d[(\beta(p),(\beta(q)]$$

dimana $\alpha \in M$

$\beta(p) \in P$ dan $\beta(q) \in P$

sehingga :

$d[(\alpha,\beta)(p), (\alpha.\beta)(q)] = d(p,q)$

dimana $\beta \in M$

Dengan demikian :

$\alpha.\beta \in M$ ....(i)

Dan akhirnya dapat dibuktikan adanya elemen invers.

$$
\begin{aligned}
d(p,q) &= d[i(p),i(q)] \\
&= d[\alpha(\alpha^{-1}(p), \alpha(\alpha^{-1}(q)] \\
&= d[\alpha^{-1}(p), \alpha^{-1}(q)] \\
&= d(\alpha^{-1}(p),\alpha^{-1}(q)]
\end{aligned}
$$

dimana : $i \in M$, $\alpha \in M$

$\alpha.\alpha^{-1}(p) \in M$

$\alpha^{-1}(q) \in M$

dengan demikian $\alpha^{-1} \in M$ ....(ii)

sekarang ambil i sebarang subset P.

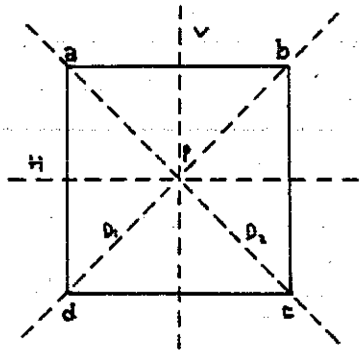
M group permutasi pada P yang berarti M subgroup dari sym(P), sehingga M dapat dipakai pada tempat G yang menunjukkan subgroup $G_{(T)}$, jadi

$M_{(T)} = (\alpha = M ; \alpha(i) = i\}$ dimana $M_{(T)}$ subgroup dari M

DEFINISI II.7.2

Jika T adalah himpunan titik pada bidang, kemudian $M_{(T)}$ adalah group dari semua isometry terhadap titik tetap T,M disebut Group Symmetry dari T.

Contoh :



Group symmtery dari gb. bujur sangkar tersebut terdiri dari :

μ_1 = permutasi identitas

μ_2 = rotasi 90^o searah jarum jam mengelilingi P

μ_3 = rotasi 180^o searah jarum jam mengelilingi P

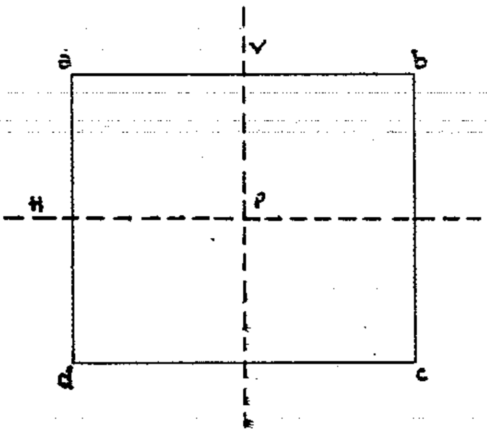
μ_4 = rotasi 270^o searah jarum jam mengelilingi P

μ_5 = refleksi terhadap H

μ_6 = refleksi terhadap V

μ_7 = refleksi terhadap D_1

μ_8 = refleksi terhadap D_2



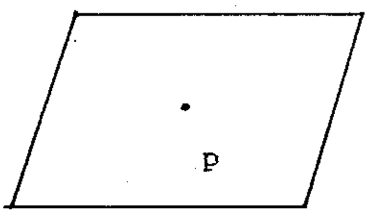
Group symmetry dari gambar persegi panjang terdiri atas :

μ_1 = permutasi identitas

μ_2 = rotasi 180^o searah jarum jam mengelilingi P

μ_3 = refleksi terhadap H

μ_4 = refleksi terhadap V



Group symmetry dari gambar disamping terdiri atas :

μ_1 = permutasi identitas

μ_2 = rotasi 180^o searah jarum jam mengelilingi P

II. 8. MATRIKS

DEFINISI II.3.1

Matriks adalah suatu kumpulan dari angka-angka (sering disebut elemen-elemen) yang disusun menurut baris dan kolom sehingga berbentuk empat persegi panjang, dimana panjang dan lebarnya ditunjukkan oleh banyaknya kolom dan baris.

Notasi :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} \cdots\cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [\, a_{ij}]$$

dimana : $i = 1, 2, 3, \ldots\ldots m$

$j = 1, 2, 3, \ldots\ldots n$

DEFINISI II.8.2

Ukuran atau ordo matriks adalah banyaknya baris (m) dan banyaknya kolom (n) ditulis (m x n)

DEFINISI II.8.3

Matriks symetry adalah suatu matriks yang elemen-elemennya apabila direfleksikan terhadap diagonal matrikss adalah sama yaitu $a_{ij} = a_{ji}$

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

dimana : $a_{12} = a_{21}$

$a_{13} = a_{31}$

$a_{23} = a_{32}$

DEFINISI II.8.4

Tranpose suatu matriks $A = (a_{ij})$ adalah suatu matriks baru yang elemen-elemennya diperoleh dari elemen-elemen matriks A dengan syarat bahwa baris dan kolom matriks tersebut menjadi kolom dan baris dari matriks yang baru itu.

Transpose dari matrks A diberi simbol A′ dimana

$A' = a'_{ij} = a_{ij}$

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 2 \\ 5 & 7 & 1 \end{bmatrix} , \quad A' = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

OPERASI DENGAN MATRIKS

Ada beberapa metode kombinasi dari matriks, diantaranya merupakan kombinasi degan operasi addisi, multiflikasi.

1. Addisi

   Dua matriks dapat dikombinasikan dengan suatu operasi penjumlahan atau pengurangan hanya apabila keduanya mempunyai ordo/ukuran yang sama. Pada matriks berordo sama, matriks U disajikan oleh suatu jumlahan atau pengurangan dari matriks A dan B adalah :

   $U_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$

   Dua matriks disebut sama atau identik apabila mempunyai keidentikan elemen, yaitu :

   $A = B$

   $a_{ij} = b_{ij}$

2. Multiplikasi (perkalian)

DEFINISI 36

Apabila $A_{mn} = [a_{ij}]$ yaitu matriks dengan ordo m x n, $B_{np} = [b_{ij}]$ yaitu matriks dengan ordo n x p, kemudian diperkalian matriks

$A \times B = A \,.\, B$

kita maksudkan suatu matrik C_{mp}, dimana

$AB = C$

yaitu matrik dengan ordo m x p , dimana elemen C dari baris ke-i kolom-j diperoleh dengan rumus :

$$C_{ij} = a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + \ldots + a_{in} b_{nj}$$

atau dapat ditulis sebagai :

$$\boxed{C_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}\ b_{lj}}$$

dimana :

$i = 1,2,\ldots.,m.$

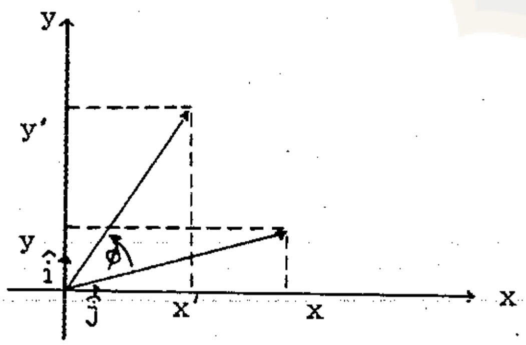
$j = 1,2,\ldots.,p.$

MATRIKS SEBAGAI PERWAKILAN DARI OPERASI

Dalam mendiskripsikan suatu gropu symmetry, operasi matrks benar-benar ditemukan kegunaanya. Dapat dibangun matriks untuk bermacam-macam operasi point group, diantaranya :

1. Rotasi C_n

   Pandang vektor dimensi dua $\bar{r}$ seperti gambar berikut :



$\hat{i}$ = vektor satuan terhadap sb x

$\hat{j}$ = vektor satuan terhadap sb y

$\emptyset$ = besar sudut rotasi

Vektor $\bar{r}$ dapat disajikan suatu persamaan dengan komponen x dan y serta vektor satuan $\hat{i}$ dan $\hat{j}$ yaitu :

$$\bar{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

vektor $\bar{r}$ dapat juga disajikan sebagai matriks kolom

$$\bar{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Sekarang pandang rotasi dari $\bar{r}$ sebesar sudut Ø operasi rotasi dapat disimbolkan sebagai

$$C_n \cdot \bar{r} = \bar{r}'$$

simbol C_n menunjuk pada rotasi terhadap suatu proses, dimana $n = \frac{2\pi}{Ø}$, vektor $\bar{r}$ dapat disajikan dalam suatu persamaan dengan komponen x' dan y'

$$\bar{r}' = x'\hat{i} + y'\hat{i}$$

sedang komponen $\bar{r}'$ merupakan hasil rotasi $\bar{r}$ sebesar sudut Ø. Jika terhadap rotasi tersebut maka komponen x dan y menempati posisi x' dan y' dan disajikan sebagai berikut :

$$x' = x \cos Ø + y \sin Ø$$

$$y' = -x \sin Ø + y \cos Ø$$

Himpunan dari persamaan tersebut dapat diformulasikan dalam notasi matriks :

$$\bar{r}' = C\bar{r}$$

dimana :

$$C = \begin{bmatrix} \cos \emptyset & \sin \emptyset \\ -\sin \emptyset & \cos \emptyset \end{bmatrix}$$

atau

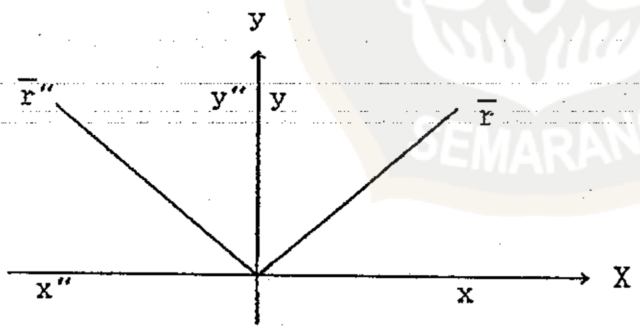
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \emptyset & \sin \emptyset \\ -\sin \emptyset & \cos \emptyset \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Jadi C adalah matriks yang dapat mewakili rotasi vektor dimensi dua sebesar sudut Ø.

Dengan demikian C adalah matriks perwakilan yang dimaksud.

2. Refleksi R

Pandang vektor dimensi dua $\bar{r}$ seperti gambar berikut :



Hubungan antara vektor $\bar{r}$ dan operasi dari refleksi $\bar{r}$ memotong sumbu y (memotong bidang yz) adalah :

$$\sigma_{yz} \cdot \bar{r} = \bar{r}''$$

dapat pula ditulis dalam notasi

$$\sigma_{yz}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix}$$

Komponen dari $\bar{r}''$ dapat ditulis dalam persamaan dari komponen $\bar{r}$. Persamaan ini dapat dinyatakan secara sederhana dari refleksi pada komponen x dan y :

$x'' = -1\ x + 0\ y$

$y'' = \ 0\ x + 1\ y$

Dalam notasi matriks, persamaan ini dapat dikombinasikan sebagai :

$$\bar{r}'' = \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \sigma\bar{r}$$

dimana

$$\sigma = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

merupakan matriks perwakilan dari refleksi vektor dimensi dua memotong sumbu y

Secara umum R adalah matriks perwakilan dari refleksi bentuk-bentuk berdimensi dua terhadap sumbu y.

Dengan cara yang sama untuk refleksi terhadap sumbu x, diwakili oleh matriks σ'

dimana :

$$\sigma' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$