BAB II
MATERI PENUNJANG

2.1. Konsep Matriks Secara umum

Matriks adalah susunan suatu bilangan - bilangan yang disejajarkan secara empat persegi panjang yang dibentuk menurut baris - baris dan kolom - kolom.

Pemberian nama dari suatu matriks dengan menggunakan hurup besar. Bentuk secara umum matriks A yang memiliki m baris dan memiliki n kolom bisa digambarkan sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \dots a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \dots a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,2} \dots a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} \dots a_{m,n} \end{bmatrix}$$

dimana $a_{i,j}$ menyatakan suatu elemen yang terletak pada baris ke i dan pada kolom ke j dengan :

$i = 1,2,3,\dots,m$

$j = 1,2,3,\dots,n$

Mariks dikatakan memiliki dimensi mxn, untuk matriks yang memiliki m baris dan n kolom sebagai dimensi dari matriks tersebut juga disebut order dari matriks itu.

Disamping disajikan seperti bentuk di atas yaitu dalam bentuk blok, penulisan suatu matriks dapat dinyatakan secara ringkas dengan :

$$A = (a_{i,j})$$

dengan $i = 1,2,3,\ldots,m$

dan $j = 1,2,3,\ldots,n$

Definisi 2.1 :

Suatu matriks yang memiliki banyak baris sama dengan banyak kolom = n sering disebut matriks bujur sangkar ukuran n.

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

merupakan matriks bujur sangkar dengan order 2(dua).

Definisi 2.2 :

Matriks bujur sangkar yang semua elemen di luar diagonal utama adalah 0(nol), atau dengan perkataan lain $a_{i,j} = 0$ untuk $i \neq j$ disebut matriks diagonal.

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.3 :

Suatu matriks diagonal yang elemen diagonal utamanya semua sama dengan satu disebut matriks identitas. Atau dengan kata lain :

$a_{i,j}$ adalah matriks identitas jika $a_{i,j}=1$ dan sama dengan nol untuk $i \neq j$.

Penulisan matriks identitas biasanya dengan I atau dengan I_n, dengan n menyatakan ukuran dari matriks tersebut.

Contoh :

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sifat dari matriks identitas seperti bilangan 1 (satu) dalam operasi perkalian dengan bilangan biasa. Yaitu : AI = A atau IA = A.

2.2. Transpose Matriks

Diberikan suatu matriks A = $(a_{i,j})$ yang berukuran (mxn), yang menjadi transpose dari matriks A adalah suatu matriks yang disimbulkan dengan A^T yang berukuran (nxm). Untuk mendapatkan matriks transpose dengan cara menuliskan baris ke i dari matriks A, untuk i = 1,2,3,...,m sebagai kolom ke i dari matriks A^T. Atau secara singkat dapat dikatakan untuk matriks A $(a_{i,j})$ maka matriks $A^T=(a_{j,i})$.

atau misal :

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \cdots\cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} \cdots\cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \text{ maka } A^T = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{n,1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Untuk mendapatkan A^T dengan cara :

-. baris I dituliskan sebagai kolom I

-. baris II dituliskan sebagi kolom II

-. baris ke III dituliskan sebagai kolom III

Sehingga didapatkan :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

2.3. Minor Dan Kofaktor.

Misalkan a suatu matriks bujur sangkar ukuran NxN atau A = $(a_{i,j})$ dan $M_{i,j}$ sautu submatriks dari a dengan ukuran (N-1)(N-1) dimana baris ke-i dan kolom ke-j (dari matriks A dihilangkan).

Contoh :

$$\text{misalkan } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$M_{1,1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(baris ke 1 dan kolom ke 1 dihilangkan).

$$M_{3,3} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

(baris ke 3 dan kolom ke 3 dihilangkan).

Definisi 2.4

Minor dari elemen $a_{i,j}$ suatu matriks A adalah dituliskan dalam $|M_{i,j}|$.

Contoh :

dari matriks A diatas

$$|M_{1,2}| = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 12 - 6 = 6$$

Definisi 2.5

Kofaktor dari elemen $a_{i,j}$ ditulisakan dalam bentuk $A_{i,j} = (-1)^{i+j}\ |M_{i,j}|$.

Contoh :

dari matriks A diatas kofaktor dari elemen $a_{1,1}$ dituliskan dengan $A_{1,2} = (-1)^{1+2}.6 = -6$

Matriks yang ellemen-elemennya berupa kofaktor-kofaktor dari matriks A dituliskan dengan :

$$A_{i,j} = \begin{bmatrix} A_{1,2} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1,2} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,n} \end{bmatrix}$$

Minor dan kofaktor akan berguna juga dalam mencari determinan suatu matriks dan invers suatu matriks.

Suatu matriks bujursangkar selalu dikaitkan dengan sautu skalar yang biasa disebut determinan dari matriks tersebut. Determinan dari suatu matriks misalnya matriks Abiasanya dituliskan dengan det(A) atau $|A|$.

Determinan dari suatu matriks dapat dinyatakan sama dengan jumlah perkalian elemen-elemen dari sebarang baris/kolom dengan kofaktor-kofaktornya atau dengan perkataan lain

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}.A_{i,j} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots a_{in}A_{in}$$

untuk sembarang i.

Contoh :

akan dicari determinan dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$ misalkan daiambil $i = 1$

dicari kofaktor-kofaktor sebagai berikut :

$A_{11} = (-1)^{1+1}|M_{1,1}|. = 1.(21-20) = 1$

$A_{12} = (-1)^{1+2}|M_{1,2}|. = -1.(14-4) = -10$

$A_{13} = (-1)^{1+3}|M_{1,3}|. = 1.(10-3) = 7$

$|A| = a_{1,1}A_{1,1} + a_{1,2}A_{1,2} + a_{1,3}A_{1,3}$

$= 1.1 + 2.-10 + 3.7 = 2$

Definisi 2.6 :

Suatu matriks bujur sangkar yang memiliki determinan sama dengan 0(nol) disebut matriks singular.

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

misal diambil $i = 1$

$A_{11} = -8$, $A_{12} = 1$, $A_{13} = 12$.

jadi $\det(A) = 2.-8 + 4.1 + 1.12 = 0$

merupakan matriks singular karena determinannya = 0.

Definisi 2.7

Sebuah matriks bujur sangkar $A = (a_{i,j})_1^n$ disebut matriks invers bila ada suatu matriks B, sehingga $AB = BA = I_n$. Matriks B ini disebut matriks invers dari A dan dapat dituliskan dalam bentuk $B = A^{-1}$, yang merupakan matriks berordo n.

Contoh :

Misalkan $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ maka inversnya dapat dicari.

dimisalkan $A^{-1} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ sehingga berlaku

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ diperoleh

$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ yang merupakan invers dari A.

Disamping dengan cara di atas dapat juga dengan menggunakan rumus :

$$A^{-1} = \text{adj } A/\det(A)$$

dengan syarat $\det(A) \neq 0$.

dimana Adj A merupakan transpose dari matriks $A_{i,j}$ atau dituliskan dengan

$$A_{i,j} = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \cdots\cdots & A_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} \cdots\cdots & A_{n,n} \end{bmatrix}$$ maka diperleh :

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} \cdots\cdots & A_{n,1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1,n} & A_{2,n} \cdots\cdots & A_{n,n} \end{bmatrix}$$

seperti contoh diatas, det(A) = 2

$A_{11} = 3$, $A_{12} = -4$, $A_{21} = -1$ dan $A_{22} = 1$ maka

$$A^{-1} = 1/2 \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.4. Operasi Perkalian Pada Matriks.

Pada operasi perkalian antara matriks A dengan matriks B, ada dua kemungkinan hasil yaitu AB $\neq$ BA atau AB=BA. Yang pertama disebut dua matriks yang tidak komutatif sedangkan yang kedua disebut matriks yang komutatif terhadap operasi perkalian.

Pada perkalian AB, matriks A disebut matriks pertama dan matriks B disebut matriks kedua. Untuk dapat diadakan operasi perkalian antara kedua matriks tersebut maka harus dipenuhi syarat untuk perkalian dua matriks, yaitu jumlah banyaknya kolom matriks pertama harus sama dengan jumlah banyaknya baris matriks kedua.

Definisi 2.8

Diberikan matriks A = ($a_{i,j}$) yang berukuran (pxq) dan matriks b = ($b_{i,j}$) yang berukuran (qxr). maka perkalian dari matriks A dan matriks B yaitu AB adalah matriks C = $c_{i,j}$) yang berukuran (pxr). Yang dapat juga dituliskan :

$C_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j}+a_{i,2}b_{2,j}+...+a_{i,q}b_{q,j}$(7)

untuk setiap i = 1,2,3,...,p

dan j = 1,2,3,...,r

Contoh :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$ matriks ukuran (1x3).

$$B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$ matriks ukuran (3x1).

Karena banyaknya kolom matriks A sama dengan banyaknya baris matriks B, maka kedua matriks tersebut dapat dioperasikan dengan perkalian.

$$C_{1,1} = [\, a_{1,1}b_{1,1}+a_{1,2}b_{2,1}+...+a_{1,3}b_{3,1}]$$
$$= [4.2 + 5.1 + 1.3]$$
$$= [16]$$

atau bisa dituliskan sebagai :

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4.2 + 5.1 + 1.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \end{bmatrix}$$

hasilnya merupakan matriks yang berukuran (1x1).

2.5. VEKTOR

Definisi 2.9

Vektor adalah matriks yang hanya memiliki satu baris atau satu kolom, yang biasa disebut vektor baris atau vektor kolom. Vektor - vektor ini dituliskan dengan huruf kecil. Jumlah baris atau jumlah kolom merupakan dimensi dari vektor tersebut.

Transpose dari vektor kolom merupakan vektor baris demikian juga untuk sebaliknya.

Misalnya vektor $v = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ menyatakan vektor berdimensi n, dengan elemen $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

Contoh :

$u = (1 \quad 3 \quad 0 \quad 4)$ adalah vektor baris berdimensi 4.

$u = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ adalah vektor kolom berdimensi 2.

$$u^T = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}^T = [3 \quad 4]$$

2.6 Persamaan Metode Iterasi

Bila terdapat matriks bujur sangkar A sebagai matriks koefisien dari n persamaan linier dengan n anu yang dituliskan dalam bentuk sederhana

$$Ax = k$$

dimana k adalah vektor kolom. Dan bila A merup[akan matriks non-singualar sehingga terdapat solusi x atau dapat dituliskan sebagai berikut : $x = A^{-1}k$.

Dengan langkah-langkah tertentu bila dapat ditemukan suatu matriks misalkan B dan vektor kolom c sedemikian sehingga terdapat persamaan metode iterasi sebagai berikut :

$$x^{(m+1)} = Bx^{(m)} + c \qquad (2.1)$$

yang selanjutnya dapat dihitung vektor-vektor $x^{(0)}$,$x^{(1)}$,$x^{(3)}$,..., dengan mengambil sembarang harga tafsiran awal $x^{(0)}$ .Sedangakn vektor kesalahan dinyatakan dalam bentuk $\varepsilon^{(m)} = x^{(m)} - x$.

Langkah-langkah khusus dalam pembentukan persaman metode iterasi diatas antar metode yang satu dengan yang lainnya tidak sama. .Misalkan anatar metode iterasi Jacobidan matode iterasi Gauss--Seidelitu tidak sama. Demikian juga dengan iterasi Peaceman-Rachford seperti yang kan dibahas pada bab inti khususnya bagian 3.1.

iterasi Jacobi dan metode iterasi Gauss-Seidel.

Metode iterasi Jacobi :

Misalkan diberikan n persamaan linier dengan n anu seperti dibawah ini

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = k_1$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n = k_n$$

yang dapat dituliskan dalam bentuk sederhana

$$Ax = k$$

A merupakan matriks bujur sangkar, yang bisa dinyatakan sebagai jumlahan matriks diagonal, matriks segitiga atas dan matriks segitiga bawah.

$A = D + E + F$ disubtitusikan ke $Ax = k$ sehingga menjadi $(D+E+F)x = k$. Yang dapat dibuat menjadi

$Dx = (-E-F)x + k$.

Untuk matriks D yang non-sigular maka dapat dituliskan dalam bentuk $x = D^{-1}(-E-F)x + D^{-1}k$.

Dari sini Jacobi mendefinisikan persamaan iterasi yang selanjutnya dikenal dengan nama metode iterasi Jacobi sebagai berikut : $x^{(m+1)} = D^{-1}(-E-F)x^{(m)} + D^{-1}k$.

didapatkan $B = D^{-1}(-E-F)$ sebagai matriks Jacobi.

$c = D^{-1}k$.

Metode iterasi Gauss-Seidel :

Pada metode iterasi ini lengkahnya hampir sama dengan metode iterasi Jacobi. setelah diperoleh bentuk A = D + E + F yang disubstitusikan ke Ax = k

(D+E+F)x = k, selanjutnya oleh Gauss-Seidel dituliskan dalam bentuk (D + E)x = -Fx + k.

Untuk matriks (D + E) yang non-singular diperoleh :

$x = (D + E)^{-1}(-F)x + (D + E)^{-1}k.$

Yang selanjutnya diperoleh persamaan iterasi Gauss-Seidel sebagai berikut :

$x^{(m+1)} = (D + E)^{-1}(-F)x^{(m)} + (D + E)^{-1}k.$

Dan diperoleh

$B = (D + E)^{-1}(-F)$ sebagai matriks Gauss-Seidel.

$c = (D + E)^{-1}k.$

Untuk metode iterasi Peaceman-Rachford uraian secara lengkap dapat dilihat pada bab 3 dalam tulisan ini.

Contoh untuk metode iterasi Jacobi dan Gauss-Seidel :

Misalkan diberikan 2 persamaan linier dengan 2 anu seperti di bawah ini

$2x_1 + 3x_2 = 5$

$x_1 + 4x_2 = 3$

diperoleh matriks bujur sangkar A,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

dan selanjuntnya dicari matriks segitiga atas segitiga bawah serta matriks diagonal dari matriks A tadi.

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$ sebagai matriks digonal dari matriks A,

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sebagai matriks segitiga atas dari matriks A, dan

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

sebagai matriks segitiga bawah dari matriks A.

1. Metode iterasi Jacobi.

$Dx = (-E - F)x + k$

matriks D dicari terlebih dahulu determinannya, dengan cara seperti pada bagian 2.5 diperoleh

$\det(D) = 2.4 - 0.0 = 8$

Jadi merupakan matriks non-singular karena determinannya samadengan 8 atau tidak samadengan 0.

$$adj(D) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Dan diperoleh matriks invers dari matriks D yaitu D^{-1} adalah

$$D^{-1} = (1/8)\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$x^{(m+1)} = D^{-1}(-E-F)x^{(m)} + D^{-1}k.$$

$$x^{(m+1)} = (1/8)\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\left\{-\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}x^{(m)}$$

$$+ (1/8)\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}x^{(m)} + \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -3/2 \\ -1/4 & 0 \end{bmatrix}x^{(m)} + \begin{bmatrix} 5/2 \\ 3/4 \end{bmatrix}$$

diperoleh :

$B = \begin{bmatrix} 0 & -3/2 \\ -1/4 & 0 \end{bmatrix}$ sebagai matriks Jacobi.

$$c = \begin{bmatrix} 5/2 \\ 3/4 \end{bmatrix}$$

2. Persamaan iterasi Gauss-Seidel.

$$x^{(m+1)} = (D + E)^{-1}(-F)x^{(m)} + (D + E)^{-1}k.$$

$$\text{matriks } (D + E) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{maka diperoleh } (D + F)^{-1} = 1/8\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$x^{(m+1)} = (1/8)\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\left\{-\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}x^{(m)} + (1/8)\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}k$$

$$= (1/8)\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}x^{(m)} + (1/8)\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}k$$

$$= (1/8)\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}x^{(m)} + (1/8)\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= (1/8)\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}x^{(m)} + (1/8)\begin{bmatrix} 20-9 \\ 0+6 \end{bmatrix}$$

$$= (1/8)\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}x^{(m)} + (1/8)\begin{bmatrix} 11 \\ 6 \end{bmatrix}$$

sehingga diperoleh

$$B = (1/8)\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$ sebagai matriks Gauss Seidel.

$$c = (1/8)\begin{bmatrix} 11 \\ 6 \end{bmatrix}$$