

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Matriks Peaceman - Rachford merupakan suatu matriks yang dituliskan dalam bentuk Γ_r . Di mana matriks tersebut dibentuk dengan matriks bujur sangkar A yang diperoleh dari n Persamaan linier dengan n anu yang dituliskan dalam bentuk persamaan matriks

$$\begin{aligned} a_{1,1}u_1 + a_{1,2}u_2 + \dots + a_{1,n}u_n &= k_1 \\ a_{2,1}u_1 + a_{2,2}u_2 + \dots + a_{2,n}u_n &= k_2 \\ \vdots & \\ a_{n,1}u_1 + a_{n,2}u_2 + \dots + a_{n,n}u_n &= k_n \end{aligned}$$

Yang dapat dituliskan dalam bentuk sederhana :

$$Au = k \quad (1)$$

A adalah matriks bujur sangkar yang merupakan jumlahan dari matriks segitiga atas, matriks segitiga bawah dan matriks diagonal. Dan dapat dituliskan dalam bentuk

$$A = H + V + E \quad (2)$$

Dengan mensubstitusi (2) ke (1) dan mengambil $V_1 = V + 1/2E$ dan $H_1 = H + 1/2E$ dengan ini Peaceman-Rachford

mendefinisikan sautau persamaan yang dituliskan dalam bentuk :

$$\begin{aligned}(H_1 + rI)u^{(m+1/2)} &= (rI - V_1)u^{(m)} + k \\ (V_1 + rI)u^{(m+1)} &= (rI - H_1)u^{(m+1/2)} + k\end{aligned}$$

untuk matriks $(H_1 + rI)$ dan matriks $(V_1 + rI)$ yang non-singular diperoleh :

$$u^{(m+1/2)} = (H_1 + rI)^{-1}(rI - V_1)u^{(m)} + (H_1 + rI)^{-1}k$$

dan

$$u^{(m+1)} = (V_1 + rI)^{-1}(rI - H_1)u^{(m+1/2)} + (V_1 + rI)^{-1}k$$

$u^{(m+1/2)}$ disubstitusikan ke $u^{(m+1)}$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}u^{(m+1)} &= (V_1 + rI)^{-1}(rI - H_1)(H_1 + rI)^{-1}(rI - V_1)u^{(m)} + \\ &\quad (V_1 + rI)^{-1}(rI - H_1)(H_1 + rI)^{-1}k + \\ &\quad (V_1 + rI)^{-1}k\end{aligned}$$

yang akhirnya diperoleh persamaan iterasi Peaceman-Rachford yang didefinisikan sebagai berikut :

$$u^{(m+1)} = \Gamma_r u^{(m)} + g_r(k)$$

dimana :

$$\Gamma_r = (V_1 + rI)^{-1}(rI - H_1)(H_1 + rI)^{-1}(rI - V_1) \quad (3)$$

dan

$$g = (V_1 + rI)^{-1}\{(rI - H_1)(H_1 + rI)^{-1} + I\}k$$

yang selanjutnya Γ_r dinamakan matriks Peaceman - Rachford. Matriks Γ_r ini digunakan untuk mencari solusi dengan iterasi, dengan mengambil harga tafsiran awal yang dituliskan dengan $u^{(0)}$.

Disamping itu untuk memeperjelas pembentukan diberi contoh sederhana sebagai gambaran.

Contoh :

Misalkan diberikan 2 persamaan linier dengan 2 anu seperti dibawah ini

$$6u_1 + 8u_2 = 3$$

$$8u_1 + 10u_2 = 3$$

maka diperoleh matriks A yaitu

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Maka H_1 dan V_1 dapat diperoleh sehingga dengan mengingat (3) Matriks Peaceman-Rachford dapat dibentuk yaitu :

$$\Gamma_r = \begin{bmatrix} 19/12 & 2/3 \\ -11/9 & -4/9 \end{bmatrix}$$

Untuk lebih jelasnya tentang penguaraian dan contoh dapat dilihat pada bab 3 (inti).

1.2. Permasalahan/Pembatasan.

Pada tulisan ini yang akan dibahas adalah Matriks Peaceman - Rachford.

Dari n persamaan linier dengan n anu diperoleh matriks A ukuran $n \times n$ dan matriks ini dapat untuk membentuk matriks Peaceman-Rachford yang dituliskan dalam bentuk Γ_r seperti (3).

Untuk memperjelas pembentukan matriks Γ_r dari matriks A akan diberi contoh-contoh sederhana dimaksudkan sebagai gambaran. Disamping itu dari pengembangan matriks Peaceman - Rachford akan dibuktikan teorma - teorema yang berhubungan dengan matriks Peaceman-Rachford.

Jadi permasalahan-permasalahan yang akan dibahas dalam tulisan ini adalah :

- Bagaimana proses pembentukan matriks Peaceman-Rachford sehingga diperoleh bentuk Γ_r (seperti (3)).
- Bagaimana pembentukan matriks Γ_r dari matriks A ukuran $n \times n$.
- Bagaimana contoh sederhana perhitungan iterasi untuk mencari solusi yang melibatkan matriks Peaceman-Rachford.

1.3. Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan pada tugas akhir ini terdiri dari 4(empat) bab dengan pokok pembahasan pada bab III. Secara singkat dapat dijelaskan sebagai berikut:

Bab I merupakan pendahuluan yang meliputi latar belakang, permasalahan, dan sistematika penulisan.

Bab II menguraikan materi penunjang yang antara lain mengenai persamaan iterasi, matriks secara umum maupun hal-hal yang berhubungan dengan matriks, vektor.

Bab III membicarakan matriks Peaceman-Rachford berisi penguraian diperolehnya bentuk matriks tersebut.

Pembentukan matriks Peaceman-Rachford dengan matriks A , iterasi dengan matriks Peaceman-Rachford.

BabIV berisi kesimpulan.