BAB III

DERET ASYMTOTIK

3.2 Barisan Asymtotik

Definisi 3.2.1

Barisan fungsi berhingga atau tak berhingga $\langle \emptyset_n(z) \rangle$ dikatakan barisan asymtotik untuk $z \to z_o$ pada D, jika barisan tersebut memenuhi $\emptyset_{n+1} = o(\emptyset_n)$ dengan $z \to z_o$ pada D.

Contoh 3.1.1

(1). $\langle \emptyset_n(z) \rangle = \langle (z-z_o)^n \rangle$ dengan $z \to z_o$ adalah barisan asymtotik. Karena memenuhi $\emptyset_{n+1} = o(\emptyset_n)$ yang berarti $\emptyset_{n+1}/\emptyset_n \to 0$ atau $\lim\limits_{z \to z_o} (z-z_o)^{n+1}/(z-z_o)^n = \lim\limits_{z \to z_o} (z-z_o) = 0$.

(2). $\langle \emptyset(z) \rangle = \langle z^{-\lambda_n} \rangle$ dengan $z \to \infty$ adalah barisan asymtotik karena memenuhi $\emptyset_{n+1}(z) = o(\emptyset_n(z))$. Dan $\emptyset_{n+1}(z) = z^{-\lambda_{n+1}}$, sehingga $\lim\limits_{z \to \infty} \dfrac{\emptyset_{n+1}(z)}{\emptyset_n(z)} = \lim\limits_{z \to \infty} \dfrac{z^{-\lambda_{n+1}}}{z^{-\lambda_n}}$

$\lim\limits_{z \to \infty} z^{-\lambda_{n+1}+\lambda_n} = \lim\limits_{z \to \infty} z^{-(\lambda_{n+1}-\lambda_n)} = 0$ dengan $Re(\lambda_{n+1}) > Re(\lambda_n)$, untuk setiap n.

Definisi 3.2.2

Barisan fungsi $\langle \emptyset_n(z) \rangle$ dikatakan barisan asymtotik seragam dalam n, jika barisan tersebut tak berhingga dan memenuhi $\emptyset_{n+1} = o(\emptyset_n)$ juga seragam dalam n.

Contoh 3.1.2

Diketahui dua barisan fungsi $\langle \varnothing_n(z) \rangle$ dan $\langle \psi_n(z) \rangle$ yang didefinisikan oleh :

$\varnothing_n(z) = z^n(1 + 1/m)$, $z \in C$ untuk $z \to 0$

$$\psi_n(z) = \begin{cases} 1/m, & \text{jika } z=0 \text{ atau } z \text{ irasinal} \\ z_2 + 1/m, & \text{jika } z \text{ rasional, dengan bentuk } z = z_1/z_2, \text{ dengan } z_2 > 0. \end{cases}$$

Misalkan $\langle \xi_n(z) \rangle$ didefinisikan oleh :

$$\xi_n(z) = \varnothing_n(z) . \psi_n(z)$$

(a). Perlihatkan bahwa $\langle \varnothing_n(z) \rangle$ dan $\langle \psi_n(z) \rangle$ seragam dalam n dan merupakan barisan asymtotik.

(b). Perlihatkan bahwa $\langle \xi_n(z) \rangle$ merupakan barisan asymtotik yang tidak seragam dalam n.

Penyelesaian :

(a). Misalkan $\varepsilon > 0$ sebarang sehingga ada M sedemikian hingga $|z^n| < M$.

$$|\varnothing_\ell(z) - \varnothing_m(z)| = |z^n(1 + 1/\ell) - z^n(1 + 1/m)|$$
$$= |z^n| \, |1/\ell - 1/m|.$$

Karena $\langle 1/m \rangle$ suatu barisan Cauchy, maka ada N sehingga $|1/\ell - 1/m| < \varepsilon/M$ bila $\ell > N$ dan $m > N$. Jadi, $|\varnothing_\ell(z) - \varnothing_m(z)| = |z^n| \, |1/\ell - 1/m| < M . \varepsilon/M = \varepsilon$. Hal ini berarti $\langle \varnothing_n(z) \rangle$ merupakan barisan asymtotik seragam.

Karena $\varnothing_n(z)/\varnothing_n \to 0$ untuk $z \to 0$. Jika $z=0$ atau z tak rasional, maka dapat diperoleh,

$|g_\ell(z) - g_m(z)| = |1/\ell - 1/m|$. Jadi untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada N sedemikian hingga $|g_\ell(z) - g_m(z)| < \varepsilon$, bila $z=0$ atau z tak rasional $\ell>N$, $m>N$. Jika z rasional, yang bentuknya $z=z_1/z_2$, $z_2>0$ maka :

$$|\psi_\ell(z)-\psi_m(z)|=|[z_2+1/\ell]-[z_2+1/m]|$$
$$=|1/\ell-1/m|$$

Jadi untuk setiap $\varepsilon>0$ ada N sehingga $|\psi_\ell(z)-\psi_m(z)|<\varepsilon$, bila z rasional, $\ell>N$ dan $m>N$. Untuk setiap $\varepsilon>0$ ada N sehingga untuk setiap z dan $\ell>N$, $m>N$ berlaku : $|\psi_\ell(z)-\psi_m(z)|<\varepsilon$. hal ini berarti $\langle\psi_n(z)\rangle$ adalah barisan asymtotik seragam karena $\psi_{n+1}(z)/\psi_n(z)\to 0$ untuk $z\to 0$.

(b). $\emptyset_n(z)=z^n(1+1/m)$

$$\psi_n(z)=\begin{cases}1/m, \text{ jika } z=0 \text{ atau } z \text{ irasinal}\\ z_2+1/m, \text{ jika } z \text{ rasional, dengan bentuk } z=z_1/z_2, \text{ dengan } z_2>0.\end{cases}$$

$$\xi_n(z)=\emptyset_n(z).\psi_n(z)=\begin{cases}z^n(1/m+1/m^2), \text{ jika } z=0 \text{ atau } z \text{ irasional.}\\ (z_1/z_2)(1+1/m)(z_2+1/m), \text{ jika } z \text{ rasional.}\end{cases}$$

Jika z rasional, $z=z_1/z_2$, $z_2>0$, maka $|\xi_\ell(z)-\xi_m(z)|=|z_1||1/\ell-1/m||1+1/z_2+1/\ell+1/m|$. Dari hubungan ini N bergantung dari ε dan $z=z_1/z_2$; Jadi $\langle\xi_n(z)\rangle$ merupakan barisan asymtotik yang tidak seragam.

Teorema 3.1.1

Subbarisan dari barisan asymtotik adalah barisan asymtotik.

Bukti :

Misalkan $\langle \emptyset_n \rangle$ adalah barisan asymtotik, sehingga memenuhi $\emptyset_{n+1}=o(\emptyset_n)$ dengan $z \to z_o$ pada D. Ambil sebarang barisan $\langle \psi_m \rangle \leq \langle \emptyset_n \rangle$.

Menurut (ii) didapat :

$O(o(\emptyset_m))=o(o(\emptyset_m))=o(o(\psi_m))=o(\psi_m)$, dengan $\psi_m=o(\emptyset_m)$ (menurut *definisi 3.1.1*). Ternyata barisan $\langle \psi_m \rangle$ memenuhi syarat barisan asymtotik (menurut *teorema 3.2.1*). Karena $\langle \psi_m \rangle \leq \langle \emptyset_n \rangle$, maka terbukti bahwa $\langle \psi_m \rangle$ barisan asymtotik.

Teorema 3.1.2

Jika $\langle \emptyset_n \rangle$ barisan asymtotik dan $a>0$, maka $\langle |\emptyset_n|^a \rangle$ juga merupakan barisan asymtotik.

Bukti :

Diandaikan $\langle \emptyset_n \rangle$ bukan barisan asymtotik sehingga tidak memenuhi $\langle \emptyset_n \rangle = o(\langle \emptyset_n \rangle)$. Menurut *teorema 3.1.1* :

jika $\emptyset_n=O(\psi_n)$ dan $a>0$ maka $|\emptyset_n|^a=O(|\psi_n|^a)$

dengan $|\emptyset|^a=O(|\psi|^a)=o(|\psi|^a)$, sehingga $|\emptyset_n|^a=o(|\psi_n|^a)$ merupakan barisan asymtotik. Pengaaandaian salah.

Teorema 3.1.3

Dua barisan $\langle \emptyset_n \rangle$ dan $\langle \psi_n \rangle$ yang connected dan memenuhi $\emptyset_n=O\langle \psi_n \rangle$ dan $\psi_n=O\langle \emptyset_n \rangle$ untuk setiap n, maka kedua barisan tersebut dikatakan equivalen. Jika $\langle \emptyset_n \rangle$ dan $\langle \psi_n \rangle$ barisan equivalen dan $\langle \emptyset_n \rangle$ merupakan barisan asymtotik, maka $\langle \psi_n \rangle$ juga merupakan barisan asymtotik.

Bukti :

Untuk membuktikan $\langle\psi_n\rangle$ asymtotik, akan ditentukan $\psi_{n+1}=O(\emptyset_{n+1})=O(o(\emptyset_n)=O(o(O(\psi_n)))=o(\psi_n)$ sehingga menurut (ii) barisan $\langle\psi_n\rangle$ adalah assymtotik.

Teorema 3.1.4

Jika $\langle\emptyset_n\rangle$ dan $\langle\psi_n\rangle$ barisan asymtotik yang memuat bilangan yang sama pada fungsi, maka $\langle\emptyset_n\psi_n\rangle$ merupakan barisan asymtotik.

Bukti :

Karena memuat bilangan yang sama maka agar supaya memenuhi barisan asymtotik maka :

$\emptyset_{n+1}=o(\emptyset_n)$ dan $\psi_{n+1}=o(\psi_n)$ sehingga :

$\emptyset_{n+1}\psi_{n+1}=o(\emptyset_n).o(\psi_n)$. Dengan mengingat bahwa :

$O(\emptyset_n)=o(\emptyset_n)$ atau $O(\psi_n)=o(\psi_n)$ karena memuat bilangan yang sama. Maka menurut (iv) didapat :

$\emptyset\psi_{n+1}=\emptyset_{n+1}\psi_{n+1}=o(\emptyset_n)o(\psi_n)=o(\emptyset_n\psi_n)$.

Jadi terbukti bahwa :

$\langle\emptyset_n\psi_n\rangle$ merupakan barisan asymtotik.

Teorema 3.1.5

Jika $\langle\emptyset_n\rangle$, $n=1,2,\ldots,N$ barisan asymtotik, $a_{n,i}$, $n=1,2,\ldots,N$, $i=0,1,2,\ldots,k\leq N$ merupakan himpunan konstanta positif, $a_{n+1,i}\leq a_{n,i}$ untuk semua n,i dan

$$\psi_n=\sum_{i=0}^{k}a_{n,i}|\emptyset_{n+1}| \quad ,n=1,\ldots,N-k. \tag{1}$$

maka $\langle\psi_n\rangle$ merupakan barisan asymtotik.

Bukti :

Untuk membuktikan ini dapat diperhatikan bahwa dari k ada berhingga untuk n dan untuk $\varepsilon>0$ terdapaatlaah persekitaran U_ε pada z_o sedemikian hingga $|\varnothing_{r+1}|\le\varepsilon|\varnothing_r|$ pada persekutuan U_ε dan **D** untuk r=n,...,n+k sehingga

$$\text{didapat } \psi_{n+1}=\sum_{i=0}^{k} a_{n+1,i}|\varnothing_{n+i+1}|\le \sum_{i=0}^{k} a_{n,i}|\varnothing_{n+1}|=\varepsilon\psi_n \qquad (2)$$

Teorema 3.1.6

Misalkan $<\varnothing_n>$ barisan asymtotik seragam dalam n, dan $a_{n,i}$, n=1,2,... ; i=0,1,2,... adalah himpunan konstanta positif sedemikian hingga $a_{n+1,i}\le a_{n,i}$ untuk semua n, i dan

$$\psi_n= \sum_{i=0}^{\infty} a_{n,i}|\varnothing_{n+i}| \qquad n=1,2 \qquad (3)$$

jika barisan tak hingga untuk ψ_1 konvergen pada persekitaran z_o, maka terdapatlah sub himpunan D_o pada D sedemikian hingga z_o merupakan titik limit D_o dan semua deret tak hingga (2) konvergen pada D_o dan $<\psi_n>$ merupakan barisan asymtotik untuk $z\to z_o$ pada D_o seragam pada n.

Bukti :

Dari sifat-sifat asymtotik seragam pada $<\psi_n>$, selanjutnya terdapatlah sub himpunan D_1, pada D sedemikian sehingga z_o merupakan z_o titk akumulasi atau titik limit pada D_1 dan semua n. Untuk z pada D_1, akan didapatkan

$$\sum a_{n+1,i}|\varnothing_{n+1+i}|\le \sum a_{n,i} |\varnothing_{n+1}|<\ldots<\sum a_{1,i}|\varnothing_{i+1}|$$

sedemikian sehingga semua deret tak hingga (3) dapat dipengaruhi oleh deret untuk ψ_1.

Jika deret pada ψ_1 konvergen pada sub himpunan D_2 pada D, dan z_o titik limit pada D, sehingga dapat dibawa ke D_o yang merupakan persekutuan antara D_1 dan D_2. Semua fungsi $\psi_n(z)$ yang terdefinisi pada D_o, z_o titik limit pada D_o, dan mempunyai sifat-sifat asymtotik seragam pada $\langle \emptyset_n(z) \rangle$, sehingga persamaan (2) dengan $k = \infty$ dipenuhi seragam dalam n.

■

3.2 Deret Asymtotik

Definisi 3.2.1

Jika $\langle \emptyset_n(z) \rangle$ adalah barisan asymtotik tak hingga untuk $z \to z_o$ pada D dan $f(z) \sim \sum_{n=1}^{N} a_n \emptyset_n(z)$, untuk setiap N, maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \emptyset_n(z)$ merupakan ekspansi asymtotik atau deret asymtotik untuk $z \to z_o$, dan ditulis $f(z) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \emptyset_n(z)$

Jika $\emptyset_n(z) = z^{-\lambda_n}$, maka deret tersebut disebut deret asymtotik berpangkat. dan jika $\emptyset_n(z) = z^{\pm n}$, maka deret tersebut disebut deret kuasa asymtotik.

Contoh 3.2.1

$$\frac{z+1}{1-z} \sim 1 + 2z + 2z^2 + \ldots.$$

$$\frac{z+1}{1-z} = \frac{(z+1)^2}{1-z^2} \sim (z+1)^2 + (z+1)^2 z^2 + \ldots$$

kedua-duanya merupakan ekspansi asymtotik untuk $z \to 0$ dan konvergen untuk $|z|<1$, tetapi secara umum ekspansi asymtotik dapat konvergen atau divergen.

3.3 Ekspansi Asymtotik

Pandang deret dengan bentuk :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n} = a_0 + a_1/z + a_2/z^2 + \ldots$$

Dan dimisalkan jumlah parsial ke N adalah :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n} = a_0 + a_1/z + a_2/z^2 + \ldots + a_N z^N$$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$ terdefinisi untuk $z \neq 0$, sehingga deret tersebut konvergen. Secara umum dapat dikatakan bahwa, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$ asymtotik ke suatu fungsi f(z).

Definisi 3.3.1

f(z) disebut asymtotik ke $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$ *(atau* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$ *adalah ekspansi asymtotik pada f(z), jika,*

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{N} a_n z^{-n} = o(1/z^n)$$

untuk arg (z) terletak pada $[\alpha, \beta]$.

Contoh 3.2.1

Tunjukkan bahwa $\int_x^{\infty} t^{-1} e^{x-t} dt \sim 1/x - 1/x^2 + 2!/x^3 - \ldots$ untuk x riil dan x>0.

Penyelesaian :

Diketahui x riil, x>0, dan $f(x) = \int_x^{\infty} t^{-1} e^{x-t} dt$ (Fungsi ini bukan fungsi Gamma !). Integral bagiannya :

$$f(x)=1/x-1/x^2+2!/x^3-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}+(-1)^n\, n!\int_x^\infty \frac{e^{x-t}}{t^{n+1}}\,dt$$

Sehingga didapat,

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-n} = 1/x - 1/x^2 + 2!/x^3 - \ldots$$

Dengan catatan bahwa deret divergen pada sektor dengan $\alpha = \beta = 0$, sehingga z terbatas ke sumbu riil positif.

Jika

$$\sum_{n=0}^{N} a_n x^{-n} = 1/x - 1/x^2 + \ldots + \frac{(-1)^{N-1}(N-1)!}{x^N}$$

maka,

$$\left|x^n[f(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n x^{-n}]\right| = x^n n! \int_x^\infty \frac{e^{x-t}}{t^{n+1}}\,dt = n! \int_x^\infty \left(\frac{x}{t}\right)^n \frac{e^{x-t}}{t}\,dt$$

$$\leq n! \int_x^\infty \frac{e^{x-t}}{t}\,dt \leq \frac{n!}{x} \int_x^\infty e^{x-t}\,dt = \frac{n!}{x}$$

yang mendekati nol hingga $x \to \infty$. Dengan demikian,

$$f(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n x^{-n} \text{ adalah } o(1/x^n) \text{ dan } f(x) \sim \sum_{n=0}^{N} a_n x^{-n}$$

Dengan catatan bahwa :

Jika n! bertambah besar , maka masih dapat ditunjukkan suatu pendekatan (*Approximation*) secara teliti. Sebab,

$$\left|f(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n x^{-n}\right| \leq \frac{n!}{x^{n+1}} = O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right)$$

dan jika x lebih besar daripada n, maka $n!/x^{n+1}$ sangat kecil.

■

Definisi 3.3.2

Deret $\sum a_n\emptyset_n(z)$ *disebut ekspansi asymtotik ke N pada* $f(z)$, *dengan* $z\to z_o$, *jika* $f(z)=\sum_{n=0}^{N} a_n\emptyset_n(z) + o(\emptyset_N)$ *dengan* $z\to z_o$.

Definisi 3.3.3

Misalkan $f(z)$ *didefinisikan pada D da* $\langle\emptyset_n\rangle$ *adalah barisan asymtotik untuk* $z\to z_o$ *pada D. Deret* $\sum_{n=1}^{N} a_n\emptyset_n(z)$ *disebut ekspansi asymtotik ke N pada* $f(z)$ *untuk* $z\to z_o$ *pada D, jika* $f(z)=\sum_{n=1}^{N} a_n\emptyset_n(z) + o(\emptyset_N)$, *dengan* $z\to z_o$ *pada D. Sehingga deret tersebut merupakan representasi asymtotik sampai ke N, dapat ditulis* $f(z) \sim \sum_{n=1}^{N} a_n\emptyset_n(z)$. *Jika N=1, maka* $f(z) \sim a_1\emptyset_1(z) = g(z)$ *dan dikatakan bahwa* $g(z)$ *merupakan formula asymtotik untuk* $f(z)$, *dengan* $z\to z_o$ *pada D.*

Teorema 3.3.1

Koefisien pada ekspansi asymtotik $\sum_{n=1}^{N-1} a_n\emptyset_n(z)$ *untuk* $f(z)$, *dengan* $z\to z_o$ *dapat ditentukan sebagai berikut :*

$$a_N = \lim_{z\to z_o}\left(\frac{f(z) - \sum_{n=1}^{N-1} a_n\emptyset_n(z)}{\emptyset_N(z)}\right)$$

Bukti :

Untuk N=1, didapat $f(z)=a_1 \emptyset_n(z)+g_1(z)$, dengan $g_1(z)=o(\emptyset_1)$, hingga $z \to z_o$. Pembagian dengan $\emptyset_1$, didapat

$$a_1 = \frac{f(z)}{\emptyset_1(z)} - \frac{g_1(z)}{\emptyset_1(z)} = \lim_{z \to z_o} \frac{f(z)}{\emptyset(z_1)}$$

Kemudian ditentukan $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{N-1}$, didapat,

$$f(z)=a_N \emptyset_N(z)+\sum_{n=1}^{N-1} a_n \emptyset_n(z)+g_N(z),$$

dengan $g_N(z)=o(\emptyset_N)$, hingga $z \to z_o$.

Maka,

$$a_N = \frac{f(z) - \sum_{n=1}^{N-1} a_n \emptyset_n(z)}{\emptyset_N(z)} - \frac{g_N(z)}{\emptyset_N(z)}$$

$$= \lim_{z \to z_o} \left(\frac{f(z) - \sum_{n=1}^{N-1} a_n \emptyset_n(z)}{\emptyset_N(z)} \right)$$

Untuk N=k berlaku bahwa :

$$a_k = \frac{f(z) - \sum_{n=1}^{k-1} a_n \emptyset_n(z)}{\emptyset_k(z)} - \frac{g_k(z)}{\emptyset_k(z)}$$

$$= \lim_{z \to z_o} \left(\frac{f(z) \quad - \quad \sum_{n=1}^{k-1} a_n Ø_n(z)}{Ø_k(z)} \right)$$

Sehingga untuk N=k+1, didapat $f(z)= a_{k+1} Ø_n(z) + g_{k+1}(z)$, dengan $g_{k+1}(z)=o(Ø_{k+1})$, hingga $z \to z_o$. Pembagian dengan $Ø_{k+1}$,didapat :

$$a_{k+1} = \frac{f(z)}{Ø_{k+1}(z)} - \frac{g_{k+1}(z)}{Ø_{k+1}(z)} = \lim_{z \to z} \frac{f(z)}{Ø(z_{k+1})}$$

Kemudian ditentukan $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$, didapat,

$$f(z)=a_{k+1} Ø_{k+1}(z) + \sum_{n=1}^{k} a_n Ø_n(z) + g_{k+1}(z),$$

dengan $g_{k+1}(z)=o(Ø_{k+1})$, hingga $z \to z_o$.

$$a_{k+1} = \frac{f(z) \quad - \quad \sum_{n=1}^{k} a_n Ø_n(z)}{Ø_{k+1}(z)} - \frac{g_{k+1}(z)}{Ø_{k+1}(z)}$$

$$= \lim_{z \to z_o} \left(\frac{f(z) \quad - \quad \sum_{n=1}^{k} a_n Ø_n(z)}{Ø_{k+1}(z)} \right) \qquad ■$$

Teorema 3.3.2

Misalkan $f(z)$, $\emptyset_1(z), \emptyset_2(z), \ldots, \emptyset_N(z)$ *didefinisikan pada D dan,*

$$a_k = \lim_{z \to z_o} \left[\frac{f(z) - \sum_{n=1}^{k-1} a_n \emptyset_n(z)}{\emptyset_k(z)} \right]$$

didefinisikan pada D dan tidak nol untuk $k = 1, 2, 3, \ldots, N$, *maka* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \emptyset_n(z)$ *merupakan ekspansi asymtotik ke N untuk* $f(z)$ *hinggga* $z \to z_o$.

Bukti :

Pandang $\langle \emptyset_n \rangle$ merupakan barisan asymtotik. Selanjutnya dari definisi pada a_k didapatkan,

$$f(z) - \sum_{n=1}^{k} a_n \emptyset_n(z) = g_k(z) = o(\emptyset_k)$$

$$f(z) - \sum_{n=1}^{k} a_n \emptyset_n(z) = a_{k+1} \emptyset_{k+1}(z) + h_k(z),$$

dengan $h_k = o(\emptyset_{k+1})$. Oleh karena itu, $(a_{k+1} + h_k/\emptyset_{k+1})\emptyset_{k+1} = g_k = o(\emptyset_k)$. Tetapi $\lim_{z \to z_o} |h_k/\emptyset_{k+1}| = 0$ dan $a_{k+1} \neq 0$. Sehingga terdapatlah neighborhood ε pada z_o sedemikian sehingga bila z berada pada D dan pada neighborhood ε ini, maka

$$a_{k+1} + h_k/\emptyset_{k+1} \neq 0$$

Jadi $\emptyset_{k+1} = o(\emptyset_k)$, sehingga $f(z) = \sum_{n=1}^{k} a_n \emptyset_n(z) + o(\emptyset_k)$, $k = 1,2,3,4, \ldots, N$. ■

Teorema 3.3.3

Misalkan $\langle \emptyset_n \rangle$ *barisan asymtotik pada D untuk* $z \to z_o$ *dan* $\sum_{n=1}^{N} a_n \emptyset_n(z)$ *adalah ekspansi asymtotik ke N untuk* $f(z)$, *untuk* $z \to z_o$, *maka ekspansi tersebut adalah unik.*

Bukti :

Jika $\sum_{n=1}^{N} b_n \emptyset_n(z)$ ekpansi asymtotik yang lain, maka

didapat, $b_1 = \lim_{z \to z_1} \dfrac{f(z)}{\emptyset_1(z)} = a_1$

$$b_2 = \lim_{z \to z_1} \frac{f(z) - a_1\emptyset_1(z)}{\emptyset_2(z)} = a_2 \text{ dan seterusnya.}$$

Sehingga didapatkan $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2$, $b_3 = a_3$,... $b_N = a_N$, maka terbukti bahwa ekspansi asymtotik tersebut unik. ∎

Definisi 3.3.3

Misalkan $\emptyset_n(z) = (z - z_o)^n$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_o)^n$ *disebut ekspansi deret kuasa asymtotik untuk* $f(z)$, *dengan* $z \to z_o$ *pada D jika,*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n (z - z_o)^n + o[(z - z_o)^N],$$

untuk $N = 0, 1, 2, 3, \ldots$, *dengan* $z \to z_o$ *pada D dan dapat ditulis,*

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_o)^n$$

Hal ini hanya merupakan kejadian khusus dari definisi umum pada ekspansi asymtotik. Yang terpenting dari kejadian khusus tersebut adalah bila $z_o = \infty$, dan dapat ditulis,

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} \text{, untuk } z \to \infty \text{ pada } D,$$

jika $f(z) = \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{z^n} + o(z^{-N})$, untuk $z \to \infty$ pada D.

Demikian juga bila $z = 0$, maka dapat ditulis,

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_o)^n, \text{ untuk } z \to 0 \text{ pada } D,$$

jika $f(z) = \sum_{n=1}^{N} a_n z^n + o(z^N)$, untuk $z \to 0$ pada D.

3.4 Operasi Linier Pada Ekspansi Asymtotik

Teorema 3.4.1

Misalkan $f(z) \sim \sum_{n=1}^{N} a_n \emptyset_n(z)$ *dan* $g(z) \sim \sum_{n=1}^{N} b_n \emptyset_n(z)$ *kedua-duanya asymtotik ke N pada D, untuk* $z \to z_o$. *Jika* α *dan* β *adalah konstanta kompleks, maka:*

$$\alpha f(z) + \beta g(z) \sim \sum_{n=1}^{N} (\alpha a_n + \beta b_n) \emptyset_n(z) \text{ ke } N \text{ pada } D, \text{ untuk } z \to z_o.$$

Bukti :

$$f(z) = \sum_{n=1}^{N} a_n \emptyset_n(z) + o(\emptyset_n),$$

$$g(z) = \sum_{n=1}^{N} b_n \emptyset_n(z) + o(\emptyset_n),$$

Sehingga didapatkan,

$$\alpha f(z) + \beta g(z) \sim \sum_{n=1}^{N} (\alpha a_n + \beta b_n) \emptyset_n(z) + \alpha o(\emptyset_n) + \beta o(\emptyset_n),$$

Karena $\alpha o(\emptyset_n) + \beta o(\emptyset_n) = o(\emptyset_n)$, maka terbukti bahwa,

$$\alpha f(z) + \beta g(z) \sim \sum_{n=1}^{N} (\alpha a_n + \beta b_n) \emptyset_n(z) + \alpha o(\emptyset_n) + \beta o(\emptyset_n) \quad \blacksquare$$

Akibat 3.4.1

Jika $f(z) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \emptyset_n(z)$ dan $g(z) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \emptyset_n(z)$ pada D, untuk $z \to z_o$ maka,

$$\alpha f(z)+\beta g(z) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \alpha f(z)+\beta g(z) \emptyset_n(z)$$

Bukti :

Dari $f(z) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \emptyset_n(z)$ didapat $f(z)= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \emptyset_n(z)+o(\emptyset_n(z))$

dan $g(z) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \emptyset_n(z)$ didapat $g(z)= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \emptyset_n(z)+o(\emptyset_n(z))$

Sehingga,

$$\alpha f(z)+\beta(z) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n+\beta b_n)\emptyset_n(z)+\alpha o(\emptyset_n(z))+\beta o(\emptyset_n(z))$$

Karena $\alpha o(\emptyset_n(z))+\beta o(\emptyset_n(z))=o(\emptyset_n(z))$, maka terbukti bahwa :

$$\alpha f(z)+\beta(z) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n+\beta b_n)\emptyset_n(z) \qquad \blacksquare$$

Teorema 3.4.2

Misalkan $f(z) \sim \sum_{n=0}^{N} a_n(z-z_o)^n$ *dan* $g(z) \sim \sum_{n=0}^{N} b_n(z-z_o)^n$ *pada D untuk* $z \to z_o$, *maka* $f(z)g(z) \sim \sum_{n=0}^{N} c_n(z-z_o)^n$, *dengan* $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

Bukti :

Ambil $z_o=0$, maka $\sum_{n=0}^{N} a_n z^n+f_N(z)$ dan $\sum_{n=0}^{N} b_n z^n+g_N(z)$,

dengan $f_N(z)$ dan $g_N(z)$ adalah $o(z^N)$. Sehingga didapat,

$$f(z)g(z)=a_o b_o+(a_o b_1+ b_o a_1)z+\ldots$$
$$+(a_o b_N+a_1 b_{N-1}+\ldots+a_{N-1} b_1+a_N b_o)z^N$$

$$+g_N\sum_{n=0}^{N} a_n z^n + f_N\sum_{n=0}^{N} b_n z^n + f_N(z)g_N(z)$$

$$+(a_1b_N + a_2b_{N-1} + \ldots + a_{N-1}b_2 + a_Nb_1)z^{N+1}$$

$$+\ldots$$

semua pernyataan setelah $(a_0b_N + a_1b_{N-1} + \ldots + a_{N-1}b_1 + a_Nb_0)z^N$ adalah $o(z^N)$. Sehingga didapat,

$$f(z)g(z)\sim\sum_{n=0}^{N} c_n(z-z_0)^n, \text{ dengan } c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \qquad \blacksquare$$

Akibat 3.4.2 :

Misalkan $f(z)\sim\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ dan $g(z)\sim\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$ pada D untuk $z\to z_0$. Jika $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, maka $f(z)g(z)\sim\sum_{n=2}^{\infty} c_n(z-z_n)^n$ pada D, untuk $z\to z_0$.

Bukti :

Diambil $z_0=0$, maka didapatkan $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + f_\infty(z)$ dan $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n + g_\infty(z)$ dengan $f_\infty(z)$ dan $g_\infty(z)$ adalah $o(z^\infty)$

Sehingga didapat,

$$f(z)g(z)=a_0b_0 + (a_0b_1 + b_0a_1)z + (a_0b_\infty + a_2b_{\infty-1} + \ldots + a_{\infty-1}b_1 + a_\infty b_0)z^\infty + g_\infty\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + f_\infty\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n + f_\infty(z)\,g_\infty(z) + (a_1b_\infty + a_2b_{\infty-1} + \ldots + a_{\infty-1}b_2 + a_\infty b_1)z^{\infty+1}$$

Semua pernyataan setelah $(a_0b_\infty + a_2b_{\infty-1} + \ldots + a_{\infty-1}b_1 + a_\infty b_0)z^\infty$ adalah $o(z^\infty)$. Jadi $f(z)g(z)\sim\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ $\blacksquare$

Teorema 3.4.3

Misalkan $f(z) \sim \sum_{n=0}^{N} a_n (z-z_o)^n$ *dan* $g(z) \sim \sum_{n=0}^{N} b_n (z-z_o)^n$ *pada D hingga* $z \to z_o$, *dengan* $b_o \neq 0$, *maka deret asymtotik untuk* $f(z)$ *dapat dibagi dengan deret kuasa asymtotik untuk* $g(z)$, *sampai ke derajad N. Hasilnya adalah deret yang merupakan deret kuasa asymtotik ke N untuk* $f(z)/g(z)$.

Bukti :

Misalkan $z_o = 0$, maka di dapatkan $f(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n + f_N(z)$, $g(z) = \sum_{n=0}^{N} b_n z^n + g_N(z) = \left(\sum_{n=0}^{N} b_n z^n \right) [1 + G_N(z)]$, dengan f_N dan g_N adalah $o(z^N)$, hingga $z \to 0$, dan

$G_N(z) = g_N(z) / \sum_{n=0}^{N} b_n z^n$ merupakan $o(z^n)$, karena $b_n \neq 0$.

Oleh karena itu,

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{a_o + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_N z^N}{b_o + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots + b_N z^N} [1 + o(z^N)] + \frac{f_N(z)}{\sum_{n=0}^{N} b_n z^n} [1 + o(z^N)]$$

Oleh karena itu, sampai dengan $o(z^n)$,

$$f(z)/g(z) \sim = \frac{a_o + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_N z^N}{b_o + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots + b_N z^N}$$

■

Akibat 3.4.3

Misalkan $f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_o)^n$ dan $g(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_o)^n$, $b_o \neq 0$ pada D untuk $z \to z_o$, maka

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{a_o}{b_o} + \frac{a_1 b_o - a_o b_1}{b_o} + \ldots \text{pada D untuk } z \to z_o.$$

Bukti :

Misalkan $z_o=0$, maka $f(z)=\sum_{n=o}^{\infty} a_n z^n + f_{\infty}(z)$, $g(z)=\sum_{n=o}^{\infty} b_n z^n + g_{\infty}(z)$. $g(z)=\left(\sum_{n=o}^{\infty} b_n z^n\right)[1+G_{\infty}(z)]$ dengan f_{∞} dan g_{∞} adalah $o(z^{\infty})$ untuk $z\to 0$, dan $G_{\infty}(z)= g(z)/\sum_{n=o}^{\infty} b_n z^n$ adalah $o(z^{\infty})$ dengan $b_n\neq 0$. Sehingga didapat,

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{a_o+a_1z+a_2z^2+\ldots}{b_o+b_1z+b_2z^2+\ldots} \qquad [1+o(z^n)]+\frac{f_n(z)}{\sum_{n=o}^{\infty} b_n z^n}[1+o(z^{\infty})]$$

Dengan demikian $f(z)/g(z) \sim \dfrac{a_o}{b_o} + \dfrac{a_1b_o - a_ob_1}{b_o} + \ldots.$ ■

Teorema 3.4.4

Misalkan $f(z)\sim\sum_{n=o}^{N+1} a_n (z-z_o)^n$ *pada D untuk* $z\to z_o$. *Jika terdapat lintasan garis lurus dari* $z_o\to z$ *pada D dan bila z tertutup* z_o, *maka,*

$$\int_{z_o}^{z} f(\zeta)d\zeta \sim \sum_{n=1}^{N+1} \frac{a_n - 1}{n} (z-z_o)^n,$$

hingga $z\to z_o$ *pada D, dengan integrasi sepanjang lintasan garis lurus.*

Bukti :

$f(z)=\sum_{n=o}^{N} a_n (z-z_o)^n+g(z)$, dengan $g(z)=O[(z-z_o)^{N+1}]$,
hingga $z\to z_o$. Maka,

$$\int_{z_o}^{z} f(\zeta)d\zeta \sim \sum_{n=1}^{N+1} \frac{a_n - 1}{n} (z-z_o)^n + \int_{z_o}^{z} f(\zeta)d\zeta$$

Untuk z dipenuhi tertutup z_o, $|g(\zeta)| \le K|z-z_o|^{N+1}$ dan

$$\left| \int_{z_o}^{z} g(\zeta)d\zeta \right| \le K \int_{0}^{|z-z_o|} r^{N+1}dr$$

$$= K \frac{|z - z_o|^{N+2}}{N + 2}$$

Oleh karena itu,

$$\int_{z_o}^{z} f(\zeta)d\zeta = \sum_{n=1}^{N+1} \frac{a_{n-1}}{n}(z-z_o)^n + o[(z-z_o)^{N+1}]$$

Sehingga terbukti bahwa $\int_{z_o}^{z} f(\zeta)d\zeta \sim \sum_{n=1}^{N+1} \frac{a_{n-1}}{n}(z-z_o)^n$ ■

Akibat 3.4.4

Misalkan $f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_o)^n$ pada D untuk $z \to z_o$.

Jika terdapat lintasan garis lurus z_o ke z pada D bila z tertutup pada z_o, maka

$$\int_{z_o}^{z} f(\zeta)d\zeta \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n}(z-z_o)^n$$

pada D, untuk $z \to z_o$.

Bukti :

Di ambil $N=\infty$, sehingga didapat :

$f(z)=\sum_{n=0}^{N} a_n(z-z_o)^n + g(z)$, dengan $g(z)=O[(z-z_o)^{N+1}]$,
untuk $z \to z_o$. Maka,

$$\int_{z_o}^{z} f(\zeta)d\zeta \sim \sum_{n=1}^{N+1} \frac{a_n - 1}{n}(z-z_o)^n + \int_{z_o}^{z} f(\zeta)d\zeta$$

Untuk z dipenuhi tertutup z_o, $|g(\zeta)| \le K|z-z_o|_o^{N+1}$ dan

$$\left|\int_{z_o}^{z} g(\zeta)d\zeta\right| \le K \int_{o}^{|z-z_o|} r^{N+1} dr$$

$$= K \frac{|z - z_o|^{N+2}}{N + 2}$$

Oleh karena itu,

$$\int_{z_o}^{z} f(\zeta)d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} (z-z_o)^n + o[(z-z_o)^{N+1}]$$

Sehingga terbukti bahwa $\int_{z_o}^{z} f(\zeta)d\zeta \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} (z-z_o)^n$ ■

Teorema 3.4.5

Jika $f(z) \sim \sum_{n=0}^{N+1} a_n z^{-n}$ *untuk* $z \to \infty$ *untuk* $\alpha \le arg(z) \le \beta$, *maka,*

$$\int_{z}^{\infty} [f(z) - a_o - \frac{a_1}{\zeta}] d\zeta \sim \sum_{n=1}^{N-1} \frac{a_{n+1}}{n} z^{-n},$$

dengan integrasi sepanjang garis dengan argumen tetap antara α *dan* β.

Bukti :

$f(\zeta)-a_o-a_1\zeta^{-1} = a_2\zeta^{-2}+a_3\zeta^{-3}+\ldots+a_N\zeta^{-N}+g(\zeta)$, dengan $g(\zeta)=O[\zeta^{-(N+1)}]$, untuk $\zeta \to \infty$. Maka,

$$\int_{z_o}^{z} [f(\zeta)-a_o-a_1\zeta^{-1}]d\zeta = \frac{a_2}{z} + \frac{a_3}{2z^2} + \ldots + \frac{a_N}{(N-1)z^{N-1}} + \int_{z}^{\infty} g(\zeta)d\zeta$$

Untuk $|\zeta|$ yang besar sehingga memenuhi $|g(\zeta)| \le K|\zeta^{-(N+1)}$ dan

$$\left|\int_{z_o}^{\infty} g(\zeta)d\zeta\right| \le K \int_{z}^{\infty} r^{-(N+1)} dr = \frac{K}{N} |z|^{-N}$$

Sehingga didapat,

$$\int_{z_o}^{z} [f(\zeta)-a_o-a_1\zeta^{-1}]d\zeta = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{a_{n+1}}{n} z^{-n} + o(z^{-(N-1)}).$$ ■

Akibat 3.4.5

Jika $f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$, untuk $z\to\infty$ untuk $\alpha \le \arg(z) \le \beta$, maka,

$$\int_{z_o}^{z} [f(\zeta)-a_o-a_1\zeta^{-1}]d\zeta \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{n} z^{-n}$$

dengan integrasi sepanjang garis dan argumen tetap antar α dan β.

Bukti :

Di ambil $N=\infty$, sehingga didapat :

$f(\zeta)-a_o-a_1\zeta^{-1} \quad = a_2\zeta^{-2}+a_3\zeta^{-3}+\ldots+a_N\zeta^{-N}+g(\zeta)$, dengan $g(\zeta)=O[\zeta^{-N}]$, hingga $\zeta\to\infty$. Maka,

$$\int_{z_o}^{z} [f(\zeta)-a_o-a_1\zeta^{-1}]d\zeta = \frac{a_2}{z} + \frac{a_3}{2z^2} + \ldots + \int_{z}^{\infty} g(\zeta)d\zeta$$

Untuk $|\zeta|$ yang besar sehingga memenuhi $|g(\zeta)| \le K|\zeta^{-N}$ dan

$$\left|\int_{z_o}^{\infty} g(\zeta)d\zeta\right| \le K\int_{z}^{\infty} r^{-(N+1)}dr = \frac{K}{N}|z|^{-N} = \infty$$

Sehingga didapat,

$$\int_{z_o}^{z} [f(\zeta)-a_o-a_1\zeta^{-1}]d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{n} z^{-n} + o(z^{-N} \quad). \qquad \blacksquare$$

Teorema 3.4.6

Misalkan $f(z) \sim \sum_{n=0}^{N} a_n(z-z_o)^n$ *pada D untuk* $z\to z_o$ *dan* $f'(z)$ *ada pada D. Misalkan juga* $f'(z) \sim \sum_{n=0}^{N-1} b_n(z-z_o)^n$ *hingga* $z\to z_o$ *dan D memnuhi kondisi pada* (teorema 3.4.5) *untuk integrasi suku demi suku pada deret kuasa asymtotik, maka* $b_o=a_1$, $b_1=2a_2$, $b_2=3a_3,\ldots,$ $b_{N-1}=Na_N$.

Bukti :

Integrasi deret untuk $f'(z)$, didapatkan

$$f(z)-\lim_{z\to z_o} f(z)=\int_{z_o}^{z} f'(\zeta)d\zeta \sim \sum_{n=1}^{N} \frac{b_{n-1}}{n}(z-z_o)^n$$ dan dengan

keunikan deret kuasa asymtotik didapat,

$a_o=\lim_{z\to z_o} f(z)$, $b_o=a_1$, $b_1=2a_2$, ..., $b_{N-1}=Na_N$ ∎

Akibat 3.4.6

Misalkan $f(z)\sim\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_o)^n$ pada D untuk $z\to z_o$ dan $f'(z)$ ada pada D. Misalkan juga $f'(z)\sim\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_o)^n$ hingga $z\to z_o$ dan D memnuhi kondisi pada (*teorema 3.4.5*) untuk integrasi suku demi suku pada deret kuasa asymtotik, maka $b_o=a_1$, $b_1=2a_2$, $b_2=3a_2$, ...

Bukti :

Integrasi deret untuk $f'(z)$, didapatkan

$$f(z)-\lim_{z\to z_o} f(z)=\int_{z_o}^{z} f'(\zeta)d\zeta \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{n-1}}{n}(z-z_o)^n$$ dan dengan

keunikan deret kuasa asymtotik didapat,

$a_o=\lim_{z\to z_o} f(z)$, $b_o=a_1$, $b_1=2a_2$, ... ∎

Akibat 3.4.7

Misalkan $f(z)\sim\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$ untuk $z\to\infty$ untuk $\alpha\le\arg(z)\le\beta$. Misalkan juga $f'(z)$ ada pada region yang sama dan,

$f'(z)\sim -\sum_{n=1}^{\infty} nb_n z^{-(n+1)}$ hingga $z\to\infty$, maka $a_n=b_n$, $n=1,2,3,\ldots$

Bukti :

Integrasi deret untuk $f'(z)$, didapatkan

$$f(z)-\lim_{z\to z_o} f(z)=\int_{z_o}^{z} f'(\zeta)d\zeta \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{n-1}}{n} z^{-(n+1)}$$ dan dengan

$z\to 0$, maka $a_n = b_n$, n=1,2,3,..... ∎

Teorema 3.4.7

Misalkan $f(z)$ analitik pada D yang didefinisikan $\{z \mid |z|>r,\ \alpha\le \arg(z)\le\beta\}$ dan $f(z) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$ pada D, hingga $z\to\infty$, maka,

$f'(z) \sim -\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{-(n+1)}$ untuk $z\to\infty$ pada D' yang didefinisikan $\{z \mid |z|>r,\ \alpha<\alpha_1\le \arg(z)\le\beta_1<\beta\}$.

Bukti :

Pandang $g(z)=f(z)-a_o-a_1z^{-1}-...-a_Nz^{-N}$, untuk N tetap. Fungsi ini analitik pada D dan $O[z^{-(N+1)}]$, hingga $z\to\infty$. Oleh karena ada $r^*\ge r$ sedemikian sehingga $|g(z)|\le M|z|^{-(N+1)}$ untuk $|z|>r^*$. Dipilih z pada D' yang memenuhi modulus yang besar, sehingga mempunyai jarak minimum ke boundary pada D yang merupakan jarak dan tegak lurus dengan suatu garis $\arg(z)=\alpha$ atau $\arg(z)=\beta$. Misalkan jaraknya adalah δ. Dengan catatan bahwa δ sesuai dengan $|z|$ dan $\delta\to\infty$, hingga $|z|\to\infty$. Misalkan $\delta=k|z|$, dengan pusat z dapat dibuat lingkaran C_z dengan radius δ, sehingga didapat,

$$g'(z)= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_z} \frac{g(\zeta)}{(z-\zeta)^2}\, d\zeta ,$$

$$|g'(z)| \le \frac{M}{\delta(|z|-\delta)^{N+1}} = \frac{M}{k|z|^{N+2}(1+k)^{N+1}},$$

$$\lim_{z\to\infty} |z|^{N+1}|g'(z)|=0.$$

Hal ini membuktikan bahwa $g'(z)=o[z^{-(N+1)}]$, karena ,

$$g'(z)=f'(z)+a_1z^{-2}+2a_2z^{-3}+ \ldots +Na_Nz^{-(N+1)}.$$

Sehingga didapat :

$$f'(z)= -a_1z^{-2} - 2a_2z^{-3} - \ldots - Na_Nz^{-(N+1)} + g'(z)$$

$$f'(z)= -a_1z^{-2} - 2a_2z^{-3} - \ldots - Na_Nz^{-(N+1)} + o[z^{-(N+1)}]$$

maka $f'(z) \sim -\sum_{n=1}^{N} a_n z^{-(n+1)}$. Untuk $n=\infty$ maka terbukti bahwa :

$$f'(z) \sim -\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{-(n+1)} \text{ untuk } z\to\infty \text{ pada } D'.$$

■

Contoh dan Penyelesaian :

(1). Tunjukkan bahwa $1/z - 2!/z^2 + 4!/z^5 - \ldots$ merupakan ekspansi asymtotik untuk $\int_0^{\infty} e^{-2t}(1+t^2)dt$ dengan $z \to \infty$ pada $D := \{z \mid z \neq 0, -\pi/2 + \alpha \leq \arg(z) \leq \pi/2 - \alpha\}$ $0 < \alpha < \pi/2$.

Penyelesaian :

Misal $f(t) = (1+t^2)^{-1}$, ekspansi dari $f(t) = (1 + t^2)^{-1}$ $= 1 - t^2 + t^4 - \ldots$ yang konvergen hanya untuk $|t| < 1$, dan deret tersebut konvergen untuk semua z. Sehingga dapat ditulis :

$$\frac{1}{1 + t^2} = 1 - t^2 + t^4 - \ldots + (-1)^{n-1} t^{2n-2} + \frac{(-1)^n t^{2n}}{1 + t^2}$$

Jadi integral bagiannya adalah,

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-zt}}{1 + t^2} dt = 1/z - 2!/z^2 + 4!/z^5 - \ldots + \frac{(-1)^{n-1} (2n-2)!}{z^{2n-1}} + R_n(z),$$

$$\text{dengan } R_n(z) = (-1)^n \int_0^{\infty} \frac{e^{-zt} t^{2n}}{1 + t^2} dt$$

$$\text{Sekarang } |R_n| = \left| \int_0^{\infty} \frac{e^{-zt} t^{2n}}{1 + t^2} dt \right| \leq \int_0^{\infty} e^{-zt} t^{2n} dt$$

$= (2n)!/x^{2n+1}$ Karena $z \neq 0$ dan $-\pi/2 + \alpha \leq \arg(z) \leq \pi/2 - \alpha$ $0 < \alpha < \pi/2$, maka $x \geq |z| \sin\alpha$. Jadi ,

$$|R_n| \le \frac{(2n)!}{(\sin \alpha)^{2n+1}} \quad \frac{1}{|z|^{2n+1}}$$

Untuk n tetap, didapat $\lim_{|z|\to\infty} |R_n(z)| = 0$, sehingga deret divergen untuk semua z. Untuk $|z|$ yang cukup besar dengan bilangan berhingga pada suku suatu deret dapat didekati ke fungsi.

Sehingga dapat dikatakan,

$1/z - 2!/z^2 + 4!/z^5 - \ldots$ adalah ekspansi asymtotik pada suatu fungsi dan dapat ditulis :

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-zt}}{1 + t^2}\, dt \sim 1/z - 2!/z^2 + 4!/z^5 - \ldots,$$

untuk $z \neq 0$ dan $-\pi/2 + \alpha \le \arg(z) \le \pi/2 - \alpha$. ∎

(2). Misalkan $f(z) \sim g(z)$, untuk $z \to z_0$ pada D. Apakah hal ini juga berlaku bahwa :

$[f(z)]^n \sim [g(z)]^n$, $e^{f(z)} \sim e^{g(z)}$, dan $\log f(z) \sim \log g(z)$.

Penyelesaian :

Pandang $\sum_{n=0}^{N} a_n \emptyset_n(z)$ adalah ekspansi deret asymtotik. Deret tersebut dikatakan ekspansi asymtotik ke suku N pada $f(z)$ untuk $z \to z_0$ pada D, jika :

$f(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n \emptyset_n(z) + o(\emptyset_N)$, dengan $z \to z_0$ (*Menurut definisi 3.3.3*). Sehingga dapat ditulis :

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{N} a_n \Theta_n(z)$$

dan deret tersebut merupakan representasi asymtotik ke N. Untuk N=1 maka didapat :

$$f(z) \sim a_1 \Theta_1(z) = g(z)$$

sehingga g(z) merupakan formula asymtotik untuk f(z) dengan $z \to z_0$. Jadi berlaku bahwa hanya untuk N=1, sehingga didapat

$[f(z)]^n \sim [g(z)]^n$, $e^{f(z)} \sim e^{g(z)}$, dan log f(z) $\sim$ log g(z). ∎