BAB II
KONSEP DASAR

Dalam bab ini akan dibicarakan tentang bidang kompleks, fungsi holomorfik, deret kuasa dan relasi order yang merupakan konsep dasar dari deret kuasa asymtotik. Sedangkan domain dari deret tersebut adalah kompleks.

2.1 Bidang Kompleks

Definisi 2.1.1

Jika $r>0$ dan a bilangan kompleks dengan a dalam C, maka $D(a;r):=\{z\in C: |z-a|<r\}$ disebut cakram terbuka (Open Circular Disc) *dengan pusat a dan radius r. $\bar{D}(a;r):=\{z\in C: |z-a|\le r\}$ disebut cakram tertutup* (Close Circular Disc) *yang merupakan penutup* (Closure) *dari $D(a;r)$, dan $D'(a;r):=\{z\in C: 0<|z-a|<r\}$ disebut cakram berlubang* (Punctured Disc) *dengan pusat a dan radius r.*

Definisi 2.1.2

Himpunan $A\subseteq C$ adalah himpunan terbuka, jika untuk setiap $z\in A$, ada $r>0$ (yang tergantung pada z) sedemikian sehingga $D(z;r)\subseteq A$.

Contoh 2.1.1

1 Untuk sebarang $a\in C$ dan $r>0$, $D(a;r)$ merupakan himpunan terbuka. Untuk mengerti ini, terlebih dahulu ditentukan titik tetap $z\in D(a;r)$, dan

kemudian dapat diperhatikan bahwa $D(z;\delta)\subseteq D(a;r)$, jika $0<\delta<r-|z-a|$.

2. Kuadran $Q=\{z\in C: Re(z)>0, Im(z)>0\}$ merupakan himpunan terbuka, karena untuk $z\in Q$, $D(z;\delta)\subseteq Q$ apabila $0<\delta<\min\{Re(z), Im(z)\}$. Demikian pula, daerah persegi panjang, juring lingkaran, dan cincin, jika batasnya tidak termasuk, merupakan himpunan terbuka.

Definisi 2.1.3

Misalkan $A\subseteq C$ adalah himpunan terbuka dan dimisalkan $f:A\to C$ merupakan suatu fungsi. Fungsi f dikatakan kontinyu pada $z_o\in A$ jika dan hanya jika $\lim_{z\to z_o} f(z)=f(z_o)$ dan f kontinyu pada A jika f kontinyu pada setiap titik z_o pada A.

Definisi 2.1.4

Misalkan $A\subseteq C$. Titik $z\in C$ dikatakan titik limit $A\subseteq C$, jika $D'(z;r)\cap A\neq\emptyset$ untuk setiap $r>0$. Himpunan titik limit A dinyatakan dengan A'. Jadi $z \subseteq A'$, jika untuk setiap $r>0$ berlaku $D'(z;r)\cap A\neq\emptyset$.

Contoh 2.1.2

Sebarang cakram tertutup $D(a;r)$ merupakan himpunan tertutup. Buktikan!

Peyelesaian :

Untuk membuktikan ini, diambil titik tetap $z\in\bar{D}(a;r)$

Himpunan semua titik limit dari $D(a;r)$ adalah $\bar{D}(a;r)$, maka klosur dari $D(a;r)$ adalah $\bar{D}(a;r)$.

Teorema 2.1.1

Himpunan $A \subseteq C$ merupakan himpunan tertutup jika dan hanya jika A memuat semua titik limitnya.

Bukti :

Diketahui bahwa $z \notin C$, $D(z;r) \cap S = D'(z;r) \cap S$ dari definisi tersebut,

($\Longrightarrow$)

S tertutup $\Rightarrow$ $C \setminus S$ terbuka $\Rightarrow$ $z \notin S$, ada $r>0$ sedemikian sehingga $D(z;r) \subseteq C \setminus S$ $\Rightarrow z \notin S$ ada $r>0$ sedemikian sehingga $D'(z;r) \cap S = \emptyset$ $\Rightarrow$tidak ada titik dari $C \setminus S$ yang menjadi titik limit dari S.

■

($\Longleftarrow$)

Tidak ada titik dari $C \setminus S$ yang menjadi titik limit dari S $\Rightarrow$ $z \notin S$ ada $r>0$ sedemikian sehingga $D'(z;r) \cap S = \emptyset$ $\Rightarrow z \notin S$ ada $r>0$ sedemikian sehingga $D(z;r) \subseteq C \setminus S$ $\Rightarrow$ $C \setminus S$ terbuka $\Rightarrow$ S tertutup.

Contoh 2.1.2

Himpunan $S = \{z : 1 \leq |z| < 2\}$ tidak terbuka dan tidak tertutup, karena tidak ada cakram $D(1;r) \subseteq S$ dan tidak ada cakram $D(2;r) \subseteq C \setminus S$.

Definisi 2.1.5

Himpunan $A \subseteq C$ dikatakan terbatas jika terdapat tetapan M sedemikian sehingga $|z| \leq M$, untuk semua $z \in A$. Himpunan yang sekaligus tertutup dan terbatas dikatakan kompak.

Definisi 2.1.6

Himpunan K dikatakan Kompak, jika setiap permukaan terbuka (Open Cover) dari K mempunyai permukaan bagian (Sub Cover) berhingga.

Definisi 2.1.7

Misalkan $A \subseteq C$. Jika $f: A \to C$ dan $g: A \to C$ dua fungsi, maka dari kedua fungsi tersebut dapat dibuat fungsi-fungsi baru

(1) $s: A \to C$ dengan $s(z)=f(z)+g(z)$, $z \in A$ dinamakan jumlah dari f dan g, notasi $f+g=s$.

(2) $p: A \to C$ dengan $p(z)=f(z).g(z)$, $z \in A$ dinamakan hasil kali dari f dan g, notasi $f.g=p$.

(3) $q: A \to C$ dengan $q(z)=f(z)/g(z)$, $g(z) \neq 0$, $z \in A$ dinamakan hasil bagi dari f dan g, notasi $f/g=q$.

Hasil kali skalar $\lambda \in C$ dengan fungsi f didefinisikan $\lambda f: A \to C$ yang artinya $(\lambda f)(z)=\lambda f(z)$.

Contoh 2.1.3

Jika $f(z)=z^2$, $z \in C$ dan $g(z)=z^3$, $z \in C$, maka $(f+g)(z)=z^2+z^3$, $(fg)(z)=z^2 z^3=z^5$, $(f/g)(z)=1/z$, $(2f)(z)=2z^2$, $(-3g)(z)=-3z^3$ dan $(2f-3g)(z)=2z^2-3z^3$.

Definisi 2.1.8

Fungsi $f:A\to C$ *dikatakan kontinyu seragam* (Uniform Continue) *pada A, jika untuk setiap* $\varepsilon>0$ *terdapatlah* $\delta>0$ *sedemikian hingga* $|f(s)-f(t)|<\varepsilon$ *dengan s dan t berada pada A dan* $|s-t|<\delta$.

Proposisi 2.2.1

Fungsi kontinyu pada himpunan kompak adalah kontinyu seragam.

Bukti :

Dianggap f adalah fungsi kontinyu pada himpunan kompak K, dan dimisalkan $\varepsilon>0$. Untuk setiap titik t pada K terdapatlah bilangan $\delta(t)$ sedemikian hingga $|f(s)-f(t)|<\varepsilon/2$ dengan $|s-t|<\delta$. Himpunan terbuka $D(t;\delta(t)/2)$ merupakan permukaan K, yang bersifat Kompak (*Compactness*), sehingga terdapat bilangan berhingga pada titik-titik $t_1,t_2,t_3,\ldots,t_N$. sedemikian hingga himpunan $D_k=D(t_k;\delta(t_k)/2)$ juga merupakan permukaan K. Dimisalkan $\delta=\delta(t_k)/2$ dan himpunan δ sama dengan minimum dari $\delta_1,\delta_2,\delta_3,\ldots,\delta_N$. Jika $|s-t|<\delta_k$, maka t berada pada D_k untuk sebarang k dan $|t-t_k|<\delta$. Oleh karena itu $|f(t)-f(t_k)|<\varepsilon/2$. Tetapi juga,

$$\begin{aligned}|s-t_k| &= |s-t+t-t_k| \\ &\le |s-t|+|t-t_k| \\ &\le \delta+\delta_k \\ &\le \delta(t_k)\end{aligned}$$

dan $|f(s)-f(t_k)|\le\varepsilon/2$.

Sehingga,

$$|f(s)-f(t)|=|f(s)-f(t_k)+f(t_k)-f(t)|$$
$$\le|f(s)-f(t_k)|+|f(t_k)-f(t)|$$
$$\le\varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

Karena telah menghasilkan δ tunggal yang dipenuhi di mana-mana pada K, maka f adalah kontinyu seragam.

2.2 Fungsi holomorfik

Definisi 2.2.1

Misalkan $f: A \to C$ dengan $A \subseteq C$ adalah himpunan terbuka. Maka f dikatakan differensiabel kompleks (Differentiable in Complex sense) *pada $z_o \in A$, jika*

$$\lim_{z \to z_o} \frac{f(z)-f(z_o)}{z - z_o}$$

ada. Limit ini dinyatakan dengan $f'(z_o)$, atau kadang-kadang dinyatakan dengan $df/dz(z_o)$. Jadi $f'(z_o)$ merupakan bilangan kompleks. f dikatakan analitik pada A, jika f differensiabel kompleks pada setiap $z_o \in A$. Istilah "holomorfik", yang kadang-kadang digunakan merupakan sinonim dengan istilah "analitik". Istilah "analitik pada z_o" berarti analitik pada persekitaran z_o (Neighborhood of z_o).

Definisi 2.2.2

Misalkan f adalah fungsi kompleks yang didefinisikan pada Ω, dimana Ω adalah himpunan bidang terbuka pada C. Jika $z_o \in \Omega$, dan $\lim\limits_{z \to z_o} \dfrac{f(z) - f(z_o)}{z - z_o}$ ada, maka harga limit *ini disebut derivatif f di titik z_o dan dinyatakan dengan $f'(z_o)$ atau* $\left.\frac{df}{dz}\right|_{z=z_o}$.

Jika $f'(z_o)$ ada untuk setiap $z_o \in \Omega$, maka f dikatakan holomorfik (atau analitik) pada Ω. Koleksi dari semua fungsi holomorfik pada Ω dinyatakan dengan $H(\Omega)$.

Contoh 2.2.1

1. Fungsi $f(z)=z^n$ yang terdefinisi pada C dengan $z\in C$, $n\geq 0$, n adalah bilangan bulat. Fungsi diatas merupakan fungsi holomorpik pada C, karena $f'(z)=nz^{n-1}$ ada untuk setiap $z\in C$.
2. Fungsi $f(z)=(1+z^2)^{-2}$ yang terdefinisi pada C dengan $z\in C$ merupakan fungsi holomorfik pada $A\subseteq C$ dengan $A=\{z\in C:\ z^2+1\neq 0\}$, karena $f'(z)=-4z(1+z^2)^{-3}$ ada untuk setiap $z\in C$, kecuali di titik $z=\pm i$.

Definisi 2.2.3

Misalkan A sebarang himpunan bagian dari C dengan $z\in C$, f dikatakan holomorfik pada A jika $f\in H(\Omega)$ untuk $A\subseteq C$.

Contoh 2.2.2

Fungsi $f(z)=\dfrac{z^3+2z+1}{z^3+1}$ yang terdefinisi pada C dengan $z\in C$ merupakan fungsi holomorfik pada Ω dengan $\Omega\subseteq C$.

$\Omega=\{z\in C:\ z^3+1\neq 0\}$, $f'(z)=\dfrac{(z^3+1)(3z^2+2)-(z^3+2z+1)(3z^2)}{(z^3+1)^2}$

Karena $f'(z)$ ada untuk setiap $z\in C$, kecuali di titik $z=-1$. Ambil sebarang S pada Ω, misalkan $S=\{z\in C: z^3+1>0\}$

dari $f(z)= \dfrac{z^3+2z+1}{z^3+1}$ maka $f'(z)$ ada untuk setiap $z \in C$, dengan $z^3+1>0$. Jadi f holomorfik pada S.

Proposisi 2.2.1

Jika $f'(z_o)$ ada, maka f dikatakan kontinu pada z_o.

Bukti :

Menurut aturan penjumlahan pada limit, hanya diperlukan untuk menunjukkan bahwa, $\lim\limits_{z\to z_o} [f(z) - f(z_o)]=0$. Tetapi,

$$\lim_{z\to z_o} [f(z) - f(z_o)] = \lim_{z\to z_o} \left[\frac{f(z)-f(z_o)}{z - z_o} (z-z_o)\right].$$

Menurut aturan hasil kali pada limit didapatkan $f'(z_o).0=0$. ■

Proposisi 2.2.2

Misalkan f dan g fungsi-fungsi holomorfik pada Ω dengan $\Omega \subseteq C$. Maka :

(i). $(f+g)(z)$ merupakan fungsi holomorfik pada Ω dan, $(f+g)'(z)=f'(z)+g'(z)$.

(ii). $(fg)(z)$ merupakan fungsi holomorfik pada Ω dan $(fg)'(z)=f'(z)g'(z)$.

(iii). Jika $g(z)\neq0$ untuk semua $z\in\Omega$, maka $(f/g)(z)$ merupakan fungsi holomorfik pada Ω dan $(f/g)'(z)=$

$$\frac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{[g(z)]^2}$$

(iv). $(\lambda f)(z)$ merupakan fungsi holomorfik pada Ω dan $(\lambda f)'(z)$ dengan $\lambda\in C$ adalah skalar.

Bukti :

(i). $$(f+g)'(z_o)=\lim_{z\to z_o}\frac{(f+g)(z)-(f+g)(z_o)}{z-z_o}$$

$$=\lim_{z\to z_o}\frac{[f(z)+g(z)]-[f(z_o)+g(z_o)]}{z-z_o}$$

(menurut definisi 2.1.7)

$$=\lim_{z\to z_o}\left[\frac{f(z)-f(z_o)}{z-z_o}+\frac{g(z)-g(z_o)}{z-z_o}\right]$$

$$=\lim_{z\to z_o}\frac{f(z)-f(z_o)}{z-z_o}+\lim_{z\to z_o}\frac{g(z)-g(z_o)}{z-z_o}$$

Menurut *proposisi 2.2.1* bahwa $\lim_{z\to z_o} f(z)=f(z_o)$ dan

$\lim_{z\to z_o}\frac{f(z)-f(z_o)}{z-z_o}=f'(z_o)$, maka $(f+g)'(z_o)=f'(z_o)+g'(z_o)$

Karena $f'(z_o)$ dan $g'(z_o)$ ada untuk setiap $z_o\in\Omega$, maka $(f+g)'(z_o)$ juga ada untuk setiap $z_o\in\Omega$. Jadi $(f+g)(z)$ holomorfik pada Ω.

(ii). $(fg)'(z_o)=\lim\limits_{z\to z_o} \dfrac{(fg)(z) - (fg)(z_o)}{z - z_o}$

$$=\lim_{z\to z} \frac{f(z)g(z) - f(z_o)g(z_o)}{z - z}$$

(menurut definisi 2.1.7)

$$=\lim_{z\to z_o}\left[\frac{f(z)g(z) - f(z)g(z_o)}{z - z_o} + \frac{f(z)g(z_o)- f(z_o)g(z_o)}{z-z_o}\right]$$

$$=\lim_{z\to z_o}\left[f(z)\frac{g(z)-g(z_o)}{z - z_o}\right] + \lim_{z\to z_o}\left[\frac{f(z)-f(z_o)}{z - z_o}\, g(z_o)\right]$$

Menurut *proposisi 2.2.1*, maka $(fg)'(z_o)=f(z_o)g'(z_o) + f'(z_o)g(z_o)$. Karena $f'(z_o)$ dan $g'(z_o)$ ada untuk setiap $z_o\in\Omega$, maka $(fg)'(z_o)$ juga ada untuk setiap $z_o\in\Omega$. Jadi $(fg)(z)$ holomorfik pada Ω.

(iii). $(f/g)'(z_o)=\lim\limits_{z\to z_o} \dfrac{(f/g)(z)-(f/g)(z_o)}{z - z_o}$

$$(f/g)'(z_o) =\lim_{z\to z_o} \frac{f(z)/g(z) - f(z_o)/g(z_o)}{z - z_o}$$

(menurut definisi 2.1.7)

$$=\lim_{z\to z_o}\left[\frac{f(z)/g(z)-f(z)/g(z_o)+f(z)/g(z_o)- f(z_o)/g(z_o)}{z - z_o}\right]$$

$$=\lim_{z\to z_o} \frac{f(z)}{g(z)g(z_o)} \frac{g(z_o)-g(z)}{z - z_o} +$$

$$\lim_{z\to z} \frac{f(z)-f(z_o)}{z - z_o} \frac{g(z_o)}{g(z_o)g(z_o)}$$

$$=\lim_{z\to z_o} -\frac{f(z)}{z - z_o} \frac{g(z_o)-g(z)}{z - z_o} +$$

$$\lim_{z\to z_o} \frac{f(z)-f(z_o)}{z_o - z} \frac{g(z_o)}{g(z_o)g(z_o)}$$

$$= -\frac{f(z_o)}{[g(z_o)]^2} g'(z_o)+ \frac{g(z_o)}{[g(z_o)]^2} f'(z\ )$$

Menurut *proposisi 2.2.1*, maka :

$$(f/g)'(z_o)= \frac{f'(z_o)g(z_o)-f(z_o)g'(z_o)}{[g(z_o)]^2}$$

Kareena $f'(z_o)$ dan $g'(z_o)$ ada untuk setiap $z_o\in\Omega$ maka $(f/g)'(z_o)$ juga ada untuk setiap $z_o\in\Omega$. Jadi $(f/g)(z)$ holomorfik pada Ω.

(iv). $(\lambda f)'(z_o) =\lim_{z\to z_o} \frac{(\lambda f)(z) - (\lambda f)(z_o)}{z - z_o}$

$$=\lim_{z\to z} \frac{\lambda f(z)-\lambda f(z_o)}{z - z}$$ (menurut definisi 2.1.7)

$$=\lim_{z\to z_o} \lambda \frac{f(z) - f(z_o)}{z - z_o}$$

$$= \lambda \lim_{z\to z_o} \frac{f(z) - f(z_o)}{z - z_o}$$

Menurut *proposisi 2.2.1* maka $(\lambda f)'(z_o)=\lambda f'(z_o)$. Karena $f'(z_o)$ ada di setiap $z_o \in \Omega$, maka $(\lambda f)'(z_o)$ juga ada untuk setiap $z_o \in \Omega$. Jadi $(\lambda f)(z)$ holomorfik pada Ω, λ skalar dengan $\lambda \in \Omega$.

Proposisi 2.2.3

Misalkan $f:\Omega_1 \to C$ dan $g:\Omega_2 \to C$ fungsi-fungsi holomorfik dengan Ω_1,Ω_2 adalah himpunan bidang terbuka pada C dan misalkan $f(\Omega_1) \subseteq \Omega_2$, maka $g \circ f:\Omega_1 \to C$ yang didefinisikan oleh $(g \circ f)(z)=g(f(z))$ adalah holomorfik pada Ω_1 dan

$$\frac{d}{dz}(g \circ f)(z)= g'(f(z)).f'(z).$$

Bukti :

Misalkan $f(z_o)=w_o$ dan didefinisikan,

$$h(w)=\begin{cases} \dfrac{g(w)-g(w_o)}{w-w_o} - g'(w_o) & , w \neq w_o \\ 0 & , w=w_o \end{cases}$$

untuk $w \in \Omega$. Jika $g'(w_o)$ ada, maka $h(w)$ kontinyu di titik $w=w_o$ dan $\lim_{z \to z_o} h(f(z)=h(w_o)=0$. Dari definisi $h(w)$ dan dimisalkan $w=f(z)$ maka didapat,

$$(g \circ f)(z)-g(w_o)=[h(f(z)+g'(w_o)][f(z)-w_o]$$

Persamaan ini dipenuhi jika $f(z)=w_o$. Sedangkan untuk $z \neq z_o$, maka didapat,

$$\frac{(g \circ f)(z)-(g \circ f)(z_o)}{z-z_o} = [h(f(z))+g'(w_o)]\,\frac{f(z)-f(z_o)}{z-z_o}$$

Untuk $z \to z_o$, persamaan pada ruas kanan konvergen ke,

$[0+g'(w_o)][f'(z_o)]$. Jadi terbukti bahwa $(g\circ f)(z)$ ada untuk $z\in\Omega$.

2.3. Deret Kuasa

Definisi 2.3.1 (Definisi Barisan Tak Hingga)

Jika setiap bilangan bulat positif n, terdapat bilangan z_n, maka bilangan z_n dikatakan barisan tak hingga, dan ditulis :

$$z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n, z_{n+1}, \ldots$$

Contoh 2.3.1

$$z_n = i^n$$

$$z_n = \frac{n(1-i)}{1+n^2}$$

$$z_n = \left(1+\frac{i}{n}\right)^n$$

Definisi 2.3.2 (Definisi Limit Barisan)

Barisan $\langle z_n \rangle$ dikatakan konvergen ke z_o atau mempunyai limit z_o $:= \lim_{n\to\infty} z_n = z_o$, jika untuk setiap $\varepsilon>0$, dapat ditemukan N sedemikian sehingga $|z_n - z_o| < \varepsilon$ untuk $n>N$.

Definisi 2.3.3

Barisan $\langle f_n(z) \rangle$ dikatakan konvergen ke fungsi f jika untuk setiap $z\in C$ dan untuk setiap $\varepsilon>0$ ada bilangan asli N sehingga $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ untuk $n>N$.

Contoh 2.3.2

$f_n(z)=z^n,\ z\in C$

Jika $z>1$, maka $\lim_{n\to\infty} f_n(z)=\infty$, jika $z=1$, maka $\lim_{n\to\infty} f_n(z)=1$.

Jika $-1>z>1$, maka $\lim_{n\to\infty} f_n(z)=0$, jika $z<-1$, maka $\lim_{n\to\infty} f_n(z)$ tidak ada.

$$\text{Jadi } f(z)=\begin{cases} 1, \text{ jika } z=1 \\ 0, \text{ jika } -1<z<1 \end{cases}$$

Sehingga f_n kontinyu untuk setiap z, tetapi f tidak kontinyu untuk $z=1$.

Definisi 2.3.4

Barisan fungsi $\langle f_n \rangle$ *dikatakan konvergen seragam ke suatu fungsi* f *pada* Ω, *jika untuk setiap* $\varepsilon>0$ *ada bilangan asli* N *sehingga untuk setiap* $z\in\Omega$ *berlaku* $|f_n(z)-f(z)|<\varepsilon$ *bila* $n>N$. *Konvergen seragam dinyatakan dengan* $f_n\to f$ *(seragam) atau* $\lim_{n\to\infty} f_n=f$ *(seragam) pada* Ω.

Definisi 2.3.5

Barisan fungsi $\langle f_n \rangle$ *dikatakan terbatas seragam, jika ada suatu bilangan positif* M *sehingga untuk setiap* n *dan untuk setiap* $z\in\Omega$ *berlaku* $|f_n(z)|<M$, *dengan* Ω *adalah daerah definisi* f_n.

Contoh 2.3.3

Barisan $\langle f_n \rangle$ didefinisikan oleh :

$$f_n(z)=n^2z(1-z)^n$$

jika $0\le|z|\le1$, maka $\lim_{n\to\infty} f_n(z)=0$. Karena f_n mempunyai maksimum relatif untuk $z=1/(n+1)$ dan $\lim_{n\to\infty} f_n(1/(n+1))=\infty$, maka tak mungkin f_n konvergen seragam ke fungsi nol pada setiap himpunan bagian dari C yang mengandung titik nol.

Definisi 2.3.6

Barisan $\langle z_n\rangle$ dikatakan terbatas jika ada konstanta berhingga M sedemikian seh8ingga $|z_n|\le M$, untuk semua n.

Definisi 2.3.7

Barisan $\langle z_n\rangle$ konvergen ke limit a (ditulis $z_n\to a$) untuk $n\to\infty$, jika, untuk setiap $\varepsilon>0$ yang ditentukan, terdapat bilangan asli N (tergantung pada ε) sedemikian sehingga $n\ge M$ selalu menghasilkan $|z_n-a|<\varepsilon$.

Definisi 2.3.8

Barisan $\langle w_n\rangle$ dikatakan barisan bagian dari barisan $\langle z_n\rangle$ apabila terdapat bilangan asli $n_1<n_2<n_3<\ldots..$ sehingga $w_k=z_{n_k}$, $(k=1,2,3,\ldots..)$.

Definisi 2.3.9

Deret $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ dikatakan konvergen ke z_0 jika dan hanya jika jumlah parsial dari barisan $\langle S_n\rangle$ konvergen.

Jika $\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\sum z_n=S$, maka deret tersebut konvergen ke S.

Definisi 2.3.10

Deret $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ *dikatakan konvergen seragam pada* Ω *untuk setiap* $\varepsilon>0$ *dan dapat ditemukan* N *untuk semua titik pada* Ω, *sedemikian sehingga* $|S_n(z)-S(z)|<\varepsilon$, *untuk* $n\geq N$ *dan* $z\in\Omega$.

Definisi 2.3.11

Misalkan untuk setiap n, $g_n : A\to C$ *menyatakan suatu fungsi. Barisan fungsi* $\langle f_n\rangle$ *yang didefinisikan oleh :*

$f_1(z)=g_1(z)$, $f_2(z)=g_1(z)+g_2(z)$, ..., $f_n(z)=g_1(z)+g_2(z)+\ldots+g_n(z)$, *dinamakan deret fungsi* f_n *sebagai suku ke-n. Deret ini dinyatakan dengan,*

$g_1(z)+g_2(z)+\ldots+g_n(z)+\ldots$ *atau* $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(z)$ *atau* $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$

Deret $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(z)$ *dikatakan konvergen ke fungsi* $f(z)$, *jika barisan* $\langle f_n\rangle$ *konvergen ke fungsi* f. *Deret* $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ *dikatakan konvergen seragam ke fungsi* f, *jika barisan* $\langle f_n\rangle$ *konvergen seragam ke fungsi* f.

Definisi 2.3.12

Deret $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(z)$ *dikatakan konvergen seragam pada* Ω, *untuk setiap* $\varepsilon>0$ *dan dapat ditemukan* N *untuk semua titik pada* Ω, *sedemikian hingga* $|f_n(z)-f(z)|<\varepsilon$, *untuk* $n>N$ *dan* $z\in\Omega$.

Deret kuasa kompleks adalah deret dengan suku-suku yang banyaknya tak berhingga dan berbentuk :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n = a_0+a_1(z-c)+a_2(z-c)^2+\ldots+a_n(z-c)^n+\ldots$$

dengan z adalah variabel kompleks, $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ adalah konstanta kompleks dan disebut koefisien deret, sedangkan c adalah sebarang bilangan kompleks yang merupakan pusat dari deret.

Konsep konvergensi suatu deret kuasa didefinisikan sebagai berikut :

Deret kuasa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ dikatakan konvergen pada titik $z=z_0$ jika dan hanya jika deret $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_0-c)^n$ konvergen.

Jika deret kuasa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ konvergen di setiap titik pada himpunan A, maka deret tersebut dikatakan konvergen ke A dan sebaliknya dikatakan divergen ke A, jika deret tersebut divergen di setiap titik pada A.

Contoh 2.3.2

Pandang deret kuasa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$, dengan menggunakan tes rasio didapat $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)^2} \frac{n^2}{z^n}\right| = \lim_{n\to\infty} |z| \frac{n^2}{(n+1)^2} = |z|$, sehingga deret konvergen untuk $|z|<1$ dan divergen untuk $|z|>1$. Untuk $z=\pm i$, didapat deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^2}$ sehingga bila dibandingkan dengan deret harmonik orde 2, $\left|\frac{(\pm i)^n}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$, maka deret tersebut konvergen absolut. Jadi deret konvergen pada $-i \leq |z| \leq i$. Akibatnya deret kuasa tersebut konvergen.

Definisi 2.3.13

Deret kuasa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *dikatakan konvergen seragam pada A jika dan hanya jika untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *dapat ditemukan konstanta M sedemikian sehingga* $\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \right| < \varepsilon$, *untuk setiap* $z \in S$ *dan* $n > M$.

Definisi 2.3.14

Misalkan fungsi f didefinisikan pada Ω *yang dapat direpresentasikan* (representable) *dengan deret kuasa pada* Ω, *jika untuk setiap cakram* $D(c;r) \subseteq \Omega$, *maka deret kuasa* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-c)^n$ *konvergen ke* $f(z)$ *untuk semua* $z \in D(c;r)$.

Teorema 2.3.1

Jika f dapat direpresentasikan dengan deret kuasa pada Ω, *maka* f' *juga dapat direpresentasikan dengan deret kuasa pada* Ω. *untuk* $f \in H(\Omega)$.

Jika $f(z) = \sum a_n (z-c)^n$ (*)

untuk $z \in D(c;r)$, *maka untuk z ini juga mempunyai*

$f'(z) = \sum n a_n (z-c)^{n-1}$ (**)

Bukti :

Jika deret (*) konvergen pada D(c;r), maka dengan uji akar deret (**) juga konvergen. Ambil c=0, sehingga dapat dinyatakan sebagai jumlah antara deret (**) dengan g(z). Selanjutnya ditentukan $w \in D(c;r)$ dan dipilih ρ

sedemikian sehingga $|w|<\rho<r$.

Jika $z\neq w$, maka didapat,

$$\frac{f(z)-f(w)}{z-w} - g(z)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left[\frac{z^n - w^n}{z-w} - nw^{n-1}\right]$$

Pernyataan dalam kurung sama dengan nol, jika n=1 dan didapat,

$$(z-w)\sum_{n=1}^{\infty} kw^{k-1}\ z^{n-k-1} \qquad (***)$$

jika $n\geq 2$.

Jika $|z|<\rho$, maka harga mutlak jumlah pada (***) lebih kecil daripada $\frac{n(n-1)}{2}\ \rho^{n-2}$

Demikian juga,

$$\left|\frac{f(z) - f(w)}{z - w} - g(w)\right| \leq |z-w|\sum_{n=2}^{\infty} n^2|a_n|^{n-2} \qquad (****)$$

Karena $\rho<r$, paling tidak deret tersebut konvergen. Jadi pernyataan dari (****) yang di ruas kiri mendekati nol hingga $z\to w$. Sehingga dikatakan bahwa $f'(w)=g(w)$.

Akibat 2.3.1

Karena f′ memenuhi hipotesa yang sama sebagai f, maka teorema di atas dapat diaplikasikan ke f′. Dan selanjutnya bahwa f mempunyai derivatif pada semua orde, sedemikian sehingga setiap derivatif f dapat direpresentasikan dengan deret kuasa pada Ω, dan di dapat,

$$f^k(z)=\sum n(n-1)\ldots(n-k+1)a_n(z-c)^{n-1}$$

Jika $\sum a_n(z-c)^n$ dipenuhi, maka didapat,

$$k!a_k=f^k(c), \qquad (k=0,1,2,\ldots\ldots\ldots)$$

sedemikian sehingga untuk setiap $c\in\Omega$ terdapat barisan yang unik (khas) $\langle a_n \rangle$ untuk $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ yang memenuhi.

Teorema 2.3.2 (Teorema Taylor)

Misalkan $f \in H(D(c;R))$. Maka ada tetapan a_n yang tunggalunutk setiap n sedemikian sehingga,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n, \qquad (z \in D(c;R))$$

Tetapan a_n adalah tertentu dengan formula :

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{(w-c)^{n+1}}\, dw = \frac{1}{n!} f^n(c), \qquad n=0,1,2,\ldots$$

Jika Γ merupakan lingkaran $\Gamma(c;r)$, $(0<r<R)$.

Bukti :

Misalkan $z \in D(c;R)$ dan dipilih r sedemikian sehingga $|z-c|<r<R$. Ditentukan $\Gamma=\Gamma(c;r)$ maka didapat,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw$$

Karena $|z-c|<|w-c|$ untuk semua $w \in \Gamma^*$ (Γ^* adalah himpunan peta $\Gamma([\alpha,\beta]):=\{\Gamma(t):t\in[\alpha,\beta]\}$, maka

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-c} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-c}{w-c}}$$ dapat dinyatakan dalam ekpansi binomial untuk menghasilkan

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-c)^n}{(w-c)^{n+1}} f(w)\,dw$$

Sebagai peta kontinu dari selang kompak, Γ^* merupakan himpunan bagian kompak dari C. Pada himpunan ini, fungsi kontinu f terbatas. Maka didapatkan,

$$\left| \frac{(z-c)^n}{(w-c)^{n+1}} f(w) \right| \le \frac{M}{r} \left(\frac{|z-c|}{r} \right)^n =: M_n,$$

Untuk suatu tetapan M.

$\sum M_n$ konvergen, Karena $|z-c|<r$, sehingga didapatkan,

$$f(z)= \sum \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{(w-c)^{n+1}}\, dw \right\}(z-c)^n$$

Jadi terbukti bahwa,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{(w-c)^{n+1}}\, dw = \frac{1}{n!} f^n(c), \quad n=0,1,2,\ldots \blacksquare$$

Dari pernyataan teorema ini dapat disimpulkan bahwa koefisien-koefisien dalam ekpansi ini unik.

Contoh 2.3.4,

Fungsi f holomorfik dalam C. Buktikan bahwa jika ada tetapan positif M dan K dapat ditemukan bilangan bulat positif K sedemikian sehingga $|f(z)|\le M|z|^k$, untuk semua $|z|\ge K$, maka f merupakan polinomial berderajad paling tinggi k.

Penyelesaian :

Berdasarkan teorema Taylor, f mempunyai ekpansi deret kuasa $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, yang berlaku dalam setiap cakram yang berpusatkan 0, dengan $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(0;R)} f(z) z^{-n-1} dz$

Maka dengan memilih R≥K, didapatkan

$$|a_n| \le \frac{1}{2\pi} \sup \{|f(z)z^{-n-1}| : |z|=R\} \text{x panjang } \Gamma(0;R)$$
$$\le \frac{1}{2\pi} M R^{k-n-1} 2\pi R.$$

Karena R dapat dipilih sebarang, maka $c_n=0$ untuk $n>k$, sehingga f merupakan polinomial berderajad tidak lebih daripada k. ■

Teorema 2.2.3 menunjukkan bahwa deret kuasa yang konvergen menentukan fungsi holomorfik. Sedangkan teorema Taylor menyajikan kebalikannya. Kedua hasil itu bersama-sama menunjukkan bahwa suatu fungsi merupakan fungsi holomorfik di dalam himpunan terbuka jika dan hanya jika fungsi tersebut analitik, artinya, di setiap titik yang ditentukan dapat disajikan sebagai deret kuasa.

Postulat 2.3.1

Andaikan $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *dan* $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ *deret kuasa kompleks dengan radius konvergensi berturut-turut* R_1 *dan* R_2. *Maka deret* $h(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, *dengan* $c_n=\sum_{n=0}^{\infty} a_r b_{n-r}$ *mempunyai radius konvergensi paling sedikit* $R := \min\{R_1, R_2\}$ *dan* $h(z)=f(z)g(z)$, *untuk* $|z|<R$.

Bukti :

Dalam D(0;R), f dan g holomorfik, dan didapat, $a_n = f^n(0)/n!$ dan $b_n = g^n(0)/n!$ (menurut teorema 2.2.3 dan akibat). Hasil kali fg juga holomorfik dalam D(0;R) dan dapat dinyatakan sebagai deret Taylor,

$$f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

$$\text{dengan } c_n = \frac{(fg)^{(n)}\ (n)}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\ \frac{n!}{r!(n-r)!}\ f^{(n)}(0)g^{(n)}(0)$$

$= \sum_{n=0}^{\infty} a_r b_{n-r}$ Berdasarkan rumus Leibniz untuk turunan ke-n dari hasil kali tersebut.

Definisi 2.3.15

Jika $a \in \Omega$ dan $f \in H(\Omega-\{a\})$, maka f dikatakan mempunyai singularitas terasing (Isolated Singularitas) pada titik a Jika f dapat didefinisikan pada a dengan perluasan fungsinya adalah holomorfik pada Ω, sehingga singularitas tersebut dapat dikatakan removabel.

Teorema 2.3.5

Dianggap $f \in H(\Omega-\{a\})$ dan f terbatas pada $D'(a;r)$, untuk $r>0$, maka f mempunyai singularitas removabel.

Bukti :

Didefinisikan $h(a)=0$, dan $h(z)=(z-a)^2 f(z)$ pada $\Omega-\{a\}$. Asumsi keterbatasan ini menunjukkan bahwa $h'(a)=0$. Karena h terbukti differensiabel pada setiap titik yang lain pada Ω, sehingga $h \in H(\Omega)$, dan didapat

$$h(a)= \sum_{n=2}^{\infty} c_n (z-a)^n, \qquad (z \in D(a;r))$$

yang diperoleh dari perluasan holomorfik pada f dengan $f(a)=c_2$, untuk,

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2} (z-a)^n \qquad (z \in D(a;r)).\blacksquare$$

2.4 Relasi Order

Definisi 2.4.1

Relasi $\emptyset=O(\psi)$ pada D dikatakan relasi order, jika terdapat konstanta A (yang tidak bergantung pada z) sedemikian sehingga $|\emptyset|\le A|\psi|$ untuk semua z pada D.

Definisi 2.4.2

Relasi $\emptyset=O(\psi)$ dengan $z\to z_o$ dikatakan relasi order, jika terdapat konstanta A dan neighborhood U pada z_o sedemikian sehingga $|\emptyset|\le A|\psi|$ untuk semua z pada persekutuan U dan D.

Definisi 2.4.3

Relasi $\emptyset=o(\psi)$ dengan $z\to z_o$ dikatakan relasi order, jika diberikan $\varepsilon>0$ terdapatlah neighborhood U_ε pada z_o sedemikian sehingga $|\emptyset|\le\varepsilon|\psi|$ untuk semua z pada persekutuan U_ε dan D dengan z_o adalah titik interior dan D adalah bidang kompleks.

Jika $\psi\neq0$ pada D, maka ketiga definisi di atas dapat diformulasikan sebagai berikut :

$\emptyset=O(\psi)$ dengan $z\to z_o$ pada D, jika $\emptyset/\psi$ terbatas pada D dengan $z\to z_o$ pada D. Dan $\emptyset=o(\psi)$ dengan $z\to z_o$ pada D, jika $\emptyset/\psi\to0$ dengan $z\to z_o$ pada D.

Sektor S adalah sektor yang didefinisikan pada $0<|z|<\infty$, $|\arg(z)|<\pi/2-\theta$. Hal ini dapat diterangkan sebagai berikut :

(1). $e^{-z}=O(z^a)$, $e^{-z}=o(z^a)$ dengan $z\to\infty$ pada S, $\theta>0$ dan a sebarang; pada relasi order ini keduanya tidak dipenuhi (untuk sebarang a) bila $\theta \le 0$.

(2). $e^{-z}=O(z^{a})$ dengan $z \to \infty$ pada S, dengan syarat $Re(a) \ge 0$; relasi order ini tidak dipenuhi bila $Re(a)<0$.

(3). $e^{-z}=O(z^{a})$ pada S, dengan syarat bahwa salah satu dipenuhi yaitu $\theta=0$ dan $Re(a)=0$.

Teorema 2.4.1

Jika $\emptyset=O(\psi)$ dan $a>0$, maka $|\emptyset|=O(|\psi|^{a})$.

Bukti :

Jika $\emptyset=O(\psi)$ berarti terdapatlah konstanta A dan B sedemikian sehingga untuk setiap $|z| \ge A$ didapatkan $|\emptyset| \le B|\psi|$, bila dipangkatkan ke a, $a>0$, maka didapat $|\emptyset| \le B^{a}|\psi|^{a}$. Dari pertidaksamaan ini dapat berarti pula bahwa $|\emptyset|^{a}=O(|\psi|^{a})$. ∎

Teorema 2.4.2

Jika $\emptyset_i=O(\psi_i)$, $i=1,2,3,\ldots,k$ dan a_i konstanta, maka k $\sum_i a_i\emptyset_i=O(\sum |a_i||\psi_i|)$.

Bukti :

Dianggap ada bilangan A dan neighborhood U_i pada z_o yang digabungkan dengan $\emptyset_i$. Jika bilangan pada $\emptyset_i$ berhingga, maka terdapatlah bilangan A yang lebih besar dari semua A_i dan neighborhood U yang memuat semua U_i, sehingga didapatkan,

$$|\sum a_i\emptyset_i| \le \sum |a_i|A_i|\psi_i| \le A\sum |a_i||\psi_i|$$

bila z terdapat pada persekutuan R dan U. ∎

Teorema 2.4.3

Jika $\emptyset_i = O(\psi_i)$, $i=1,2,3,\ldots,k$; a_i *konstanta, dan* $|\psi_i| \le \psi$ *untuk* $i=1,2,3,\ldots,k$ *dan untuk semua* z *pada persekutuan R dan beberapa neighborhood* U_o *pada* z_o, *maka* $\sum_i a_i \emptyset_i = O(\psi)$.

Bukti :

Jika terdapat bilangan tak berhingga pada $\emptyset_i$, maka keberadaan A dan U selanjutnya berasal dari keseragaman pada i di dalam relasi order. Sehingga dapat disimpulkan dari (*teorema 3.1.2*) yang sebenarnya dapat dipandang bahwwa neighborhood U yang memeuat U_o, maka didapat,

$$A \sum |a_i| |\psi_i| \le A \sum |a_i| \psi = A_1 \psi$$

dengan $A_i = A \sum |a_i|$ adalah konstanta berhingga. ∎

Pada sub-bab ini dapat dijelaskan dengan formula baru tentang kombinasi relasi order sebagai berikut :

(i). $O(O(\emptyset)) = O(\emptyset)$

(ii). $O(o(\emptyset)) = o(O(\emptyset)) = o(o(\psi)) = o(\psi)$

(iii). $O(\emptyset) O(\psi) = O(\emptyset\psi)$

(iv). $O(\emptyset) o(\psi) = o(\emptyset) o(\psi) = o(\emptyset\psi)$

(v). $O(\emptyset) + O(\psi) = O(\emptyset) + o(\emptyset) = O(\emptyset)$

(vi). $o(\emptyset) + o(\emptyset) = o(\emptyset)$