BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 SISTEM BILANGAN KOMPLEKS

Diperkenalkannya himpunan bilangan kompleks karena tidak ada bilangan riil x yang memenuhi persamaan polinomial $x^2+1=0$ atau persamaan yang serupa dengan persamaan polinomial tersebut. Ditinjau sebuah bilangan kompleks berbentuk a+bi dimana a dan b bilangan-bilangan riil yang dinamakan bagian riil dsan $i = \sqrt{-1}$ dinamakan bagian imaginair, juga dinamkan bagian satuan imaginair.

Dua bilangan kompleks a+bi dan c+di dikatakan sama jika dan hanya jika a=c dan b=d. Dapat ditinjau bilangan-bilangan riil sebagai sub himpunan dari himpunan bilangan kompleks dengan b=0. Bilangan kompleks 0+0i bersesuaian dengan bilangan riil 0. Nilai absolut atau modulus dari a+bi didefinisikan sebagai $|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$.

konjugate komplek (complex conjugate) dari a+bi didefinisikan sebagai a-bi. Konjugate kompleks dari bilangan kompleks z seringkali ditunjukkan dengan z^* atau $\bar{z}$.

Dalam melakukan operasi dengan bilangan kompleks dapat dilakukan operasi seperti dalam aljabar bilangnan riil, dengan menggantikan i^2 dengan -1 bilamana terdapat i^2.

Dari segi pandangan pondasi aksiomatik bilangan kompleks, maka untuk memperlakukan sebuah bilangan kompleks sebagai pasangan berurutan (ordered pair) (a,b) dari bilangan-bilangan ril a dan b yang menuruti kaidah operasional tertentu, ternyata ekivalen dengan kaidah yang diatas.

2.2 FUNGSI

Jika dengan setiap himpunan bilangan kompleks yang dapat menyatakan nilai sebuah variabel z terdapat satu atau lebih nilai variabel w maka w dinamakan fungsi dari varibel kompleks z, ditulis sebagai $w=f(z)$.

Sebuah fungsi bernilai tunggal jika untuk setiap nilai z terdapat hanya satu nilai w. Bisa juga sebuah fungsi bernilai rangkap atau bernilai banyak. Pada umumnya dapat ditulis $w=f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, dimana u dan v fungsi bilangan riil dari x dan y.

contoh: 2.1

$$w=z^2= (x+iy)^2=x^2-y^2+2ixy$$

$$w=(x^2-y^2)+2ixy = u+iv$$

dimana $u=x^2-y^2$

$v=2xy$

Definisi 2.2.1

$f(z)$ dikatakan mempunyai limit L untuk $z \to z_o$ jika diberikan sebarang $\varepsilon>0$ maka terdapat $\delta>0$ sehingga $|f(z)-L|<\varepsilon$ bilamana $0<|z-z_o|<\delta$.

Definisi 2.2.2

$f(z)$ dikatakan kontinu di z_o jika diberikan sebarang $\varepsilon>0$ maka terdapat $\delta>0$ sehingga $|f(z)-f(z_o)|<\varepsilon$ bilamana $|z-z_o|<\delta$.

f(z) kontinu di z_o jika $\lim_{z \to z_o} f(z) = f(z_o)$.

Jika f(z) berharga tunggal dalam suatu region dari bidang z maka turunan dari f(z) didefinisikan sebagai

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} \qquad (2.2.1)$$

asalakna limitnya ada dan tak tergantung dari mana cara $\Delta\xi \to 0$.

Jika limitnya ada untuk $z \to z_o$ maka f(z) dinamakan deferensiabel di z_o. Jika limitnya ada untuk semua z dalam sebuah R maka f(z) dinamakan analitik dalam R. Supaya analitik maka f(z) harus berharga tunggal dan kontinu.

Syarat perlu suapaya $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ analitik dalam sebuah daerah R adalah bahwa u dan v memenuhi persamaan Cauchy Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (2.2.2)$$

bukti:

$f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$

$f(z+\Delta z)=f(x+\Delta x+i(y+\Delta y))=u(x+\Delta x,y+\Delta y)+iv(x+\Delta x,y+\Delta y)$

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{u(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y)+i(v(x+\Delta x,y+\Delta y)-v(x,y)}{\Delta x+i\Delta y}$$

jika $\Delta y=0$

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)+i(v(x+\Delta x,y)-v(x,y)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x} + \frac{iv(x+\Delta x,y)-v(x,y)}{\Delta x}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}$$

Jika $\Delta x = 0$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)+i(v(x,y+\Delta y)-v(x,y)}{i\ \Delta y}$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)}{i\ \Delta y} + \frac{v(x,y+\Delta y)-v(x,y)}{\Delta y}$$

$$= \frac{1}{i}\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{i}\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{i^2}{i}\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\ \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\ ,\ \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{\partial u}{\partial y}$$

Jadi syarat cukup supaya f(z) analitik dalam R adalah

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\ ,\ \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{\partial u}{\partial y} \text{ kontinu dalam R}$$

Jika turunan kedua dari u dan v ada dan kontinu maka dapat dibuktikan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ dan } \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \qquad (2.3.3)$$

bukti:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\ , \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y\ \partial x} \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = - \frac{\partial^2 u}{\partial y\ \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\ \partial y} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = - \frac{\partial^2 v}{\partial x\ \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y\ \partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x\ \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = - \frac{\partial^2 u}{\partial y\ \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x\ \partial y} = 0$$

Jika f(z) berharga tunggal dan kontinu dalam sebuah daerah R maka integral dari f(z) sepnajang suatu jalan c dalam R dari titik z_1 ke titik z_2, dimana $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$ adalah

$$\int_c f(z)\,dz = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} (u+iv)\,(dx+idy)$$

$$= \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} (udx-vdy) + i \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} (vdx+udy)$$

$$\left|\int_c f(z)\,dz\right| \le \int_c |f(z)|\,|dz| \le M \int_c ds \le ML$$

dimana M adalah batas atas $|f(z)|$ pada c yakni $|f(z)| \le M$

L adalah panjang jalan c

Teorema 2.2.1

Misalkan c adalah sebuah kurva tertutup sederhana.

Jika f(z) analitik dalam daerah yang dibatasi oleh c maka

$$\oint_c f(z)\,dz = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.2.4)$$

bukti:

$$\oint_c f(z)\,dz = \oint_c udx - vdy + i\oint_c vdx+udy$$

menurut teorema Green:

$$\oint_c Pdx + Qdy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$\oint_c udx - vdy = \iint_R \left(-\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy$$

$$\oint_c vdx - udy = \iint_R \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy$$

dimana R adalah daerah yang dbatasi oleh c.

f(z) analitik maka $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$

jadi $\displaystyle\oint_c udx - vdy = \iint_R \left(-\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy$

$$= \iint_R \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) dxdy$$

$$= 0$$

$$\oint_c vdx + udy = \iint_R \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy$$

$$= \iint_R \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy$$

$$= 0$$

sehingga

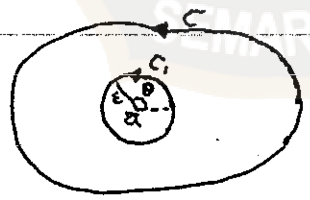
$$\oint_c f(z) = \oint_c udx - vdy + i\oint_c vdx+udy = 0$$

Teorema 2.2.2

Jika f(z) analtik didalam daerah yang dibatasi oleh dan pada sebuah kurva tertutup sederhana c dan a adalah sebarang titik di dalam c maka

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z)}{z - a} dz \quad \text{..................(2.2.5)}$$

bukti:



$$\oint_c \frac{f(z)}{z - a} dz = \oint_{c_1} \frac{f(z)}{z - a} dz$$

misal $z-a = \varepsilon e^{i\Theta}$

$$z = a + \varepsilon e^{i\Theta}$$

$$dz = i \varepsilon e^{i\Theta} d\Theta$$

$$\oint_c \frac{f(z)}{z - a} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(a+\varepsilon e^{i\Theta})}{\varepsilon e^{i\Theta}} i\varepsilon e^{i\Theta} d\Theta$$

$$= i\int_0^{2\pi} f(a+\varepsilon e^{i\theta})\, d\theta$$

f(z) analitik maka f(z) kontinu

$$\lim_{\varepsilon\to 0} i\int_0^{2\pi} f(a+\varepsilon e^{i\theta})\, d\theta = i\int_0^{2\pi} \lim_{\varepsilon\to 0} f(a+\varepsilon e^{i\theta})\, d\theta$$

$$= i\int_0^{2\pi} f(a)\, d\theta$$

$$\oint_c \frac{f(z)}{z-a}\, dz = i\, f(a)\, 2\pi$$

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \frac{f(z)}{z-a}\, dz$$

juga turunan ke n dari f(z) di z=a adalah

$$f^n(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz \qquad (2.2.6)$$

contoh: 2.2

Hitunglah

a. $\oint_c \frac{\cos z}{z-\pi}\, dz$

b. $\oint_c \frac{e^z}{z(z+1)}\, dz$

dimana c dalah lingkaran $|z-1| = 4$

jawab

a) $\oint_c \frac{\cos z}{z-\pi}\, dz$, $f(z)=\cos z$, $a=\pi$

$f(\pi) = \cos \pi = -1$

$\oint_c \frac{\cos z}{z-\pi}\, dz\ 2\pi i\ f(\pi) = -2\pi i$

b) $\oint_c \frac{e^z}{z(z+1)}\, dz = \oint_c e^z \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} \right) dz$

$$= \oint \frac{e^z}{z}\,dz - \oint \frac{e^z}{z+1}\,dz$$

$$\oint \frac{e^z}{z}\,dz \longrightarrow f(z) = e^z \ , \ a=0$$

$$f(a) = 1$$

$$\oint \frac{e^z}{z}\,dz = 2\pi i\ f(0) = 2\pi i$$

$$\oint \frac{e^z}{z+1}\,dz \longrightarrow f(z) = e^z \ , \ a=-1$$

$$f(a) = e^{-1}$$

$$\oint \frac{e^z}{z+1}\,dz = 2\pi i\ e^{-1}$$

jadi

$$\oint_c \frac{e^z}{z(z+1)}\,dz = 2\pi i - 2\pi i\ e^{-1} = 2\pi i(1-e^{-1})$$

Contoh 2.3.

Hitung $\oint_c \frac{6z^3-3z+5}{(z-1)^3}\,dz$

dimana c adalah sebarang kurva tertutup sederhana yang mencakup z=1.

jawab

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz$$

$$\oint_c \frac{6z^3-3z+5}{(z-1)^3}\,dz \longrightarrow n=2,\ f(z) = 6z^3-3z+5$$

$$f'(z) = 18z^2-3$$

$$f''(z) = 36z$$

$$f''(2) = 72$$

$$f''(2) = \frac{2!}{2\pi i} \oint \frac{6z^3-3z+5}{(z-1)^3}\,dz$$

$$72 = \frac{1}{2\pi} \quad \frac{6z^3-3z+5}{(z-1)^3}$$

$$\oint \frac{6z^3-3z+5}{(z-1)^3} = 72\ \pi i$$

2.3. DERET LAURENT

Jika f(z) mempunyai sebuah kutub berorde n di z=a tetapi analitik ditiap-tiap titik lain didalam dan pada sebuah lingkaran c yang pusatnya di a, maka $(z-a)^n$ f(z) analitik di semua titik di dalam dan pada C dan mempunyai deret taylor di sekitar z=a sehingga

$$f(z)=\frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \ldots + \frac{a_{-1}}{(z-a)} + a_o + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \ldots$$

$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\ (z-a)^k$ dinamakan deret Laurent ....(2.3.1)

dengan koefisienya diberikan oleh rumus :

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz \ , \ n=0,\pm1,\pm2,\ldots \qquad (2.3.2)$$

dimana Γ adalah sembarang lintasan tertutup sederhana yang berorientasi positif yang terletak didalam anulus konvergensi dan memuat pusat penguraian a dibagian dalamnya.

2.4 SINGULARITAS

Suatu titik z_o dinamakan singularitas atau titik singular dari suatu fungsi f(z) , jika dan hanya jika f(z) gagal menjadi analitik pada z_o dan setiap lingkungan z_o memuat paling sedikit satu titik yang membuat f(z) analitik.

Jika f(z) analitik di semua titik dalam suatu daerah kecuali disebuah titik interior z=a maka titik z=a dinamakan sebuah singularitas yang terisolasi dari f(z).

Ada tiga bentuk singularitas.

1. Singularitas kutub (non essential singularity)
2. Singularitas pokok (essential singularity)
3. Singularitas titik cabang.

Jika $f(z) = \dfrac{\phi(z)}{(z-a)^n}$, $\phi(a)\neq 0$ dimana $\phi(z)$ analitik disemua titik dalam sebuah daerah termasuk z=a dan jika n adalah bilangan bulat positif maka f(z) mempunyai sebuah singularitas yang terisolasi di z=a yang dinamakan singularitas kutub orde n.

Titik-titik cabang merupakan sifat-sifat dari fungsi bernilai banyak. Oleh definisi , suatu titik cabang bernilai satu sedemikian sehingga jika suatu titik melintasi suatu lintasan yang kecil(yaitu suatu lingkaran) tetapi bukan termasuk titik singular, maka nilai dari fungsi setelah putaran penuh panjang tidak sama seperti pada mulanya.

Contoh 2.5

Fungsi $f(z)=\sqrt{z-z_o}$

Jika $z-z_o = re^{i\theta}$ maka f(z) merupakan fungsi bernilai ganda yang mana nilainya $f_1(z)=r^{1/2}e^{i\theta/2}$ dan $f_2(z) = r^{1/2}e^{i(\theta/2+\pi)}$

$f_2(z) = -r^{1/2}e^{i\theta/2} = -f_1(z)$.Fungsi tersebut dinamakan cabang pada fungsi bernilai ganda f(z).

Andaikan bahwa C_o merupakan suatu lingkaran dengan pusat pada z_o dan radius r. Misalkan z berada pada titik P pada lingkaran itu dengan $\theta=0$ maka $f_1(z)=r^{1/2}$. Apabila z berputar satu kali lagi maka $\arg(z-z_o)$ yaitu θ akan berubah menjadi 2π dan arg f(z) akan menjadi π. Dengan demikian selama proses melintasi pertama kali nilai dari f(z) merupakan cabang $f_1(z)$. Akan tetapi setelah berputar satu kali nilai dari f(z) bukan $r^{1/2}$ tetapi $-r^{1/2}$. Sekarang selama perputaran kedua nilai dari f(z) akan menjadi cabang kedua $f_2(z)$, dan setelah memutar secara penuh arg(z-z) akan naik dengan 2π lagi dan arg dari f(z) menjadi π,maka nilai awal diperoleh lagi. Akibatnya $z=z_o$ merupakan suatu titik cabang apabila nilai awal dari fungsi tidak diperoleh satu putaran.

Setelah putaran tunggal disekitar z_o cabang f_1 (z) berubah menjadi $f_2(z)$ dan f_2 (z) menjadi f_1 (z). Dengan demikian titik cabang juga didefinisikan sebagai suatu titik sedemikian menggambarkan perputaran disekitarnya yang menyebabkan perubahan pada cabang dari suatu fungsi.

2.5 RESIDU

Katakan f(z) adalah fungsi analitik dan andaikan z_0 merupakan singularitas terasing f(z). Maka f(z) didalam lingkungan z_0 terhapus A : $0<|z-z_0|<r$, yang merupakan anulus melingkar berpusat pada z_0. f(z) mempunyai pengembangan Laurent yang konvergen ke f(z) untuk semua z didalam A. Koefisien pengembangan ini diberikan dengan rumus :

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\, dz, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2.5.1)$$

dimana C adalah sembarang jalur tertutup sederhana tertentu tempatnya positif terletak seluruhnya didalam A dan memuat a dibagian dalamnya. Untuk n=-1 maka

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)\, dz. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.5.2)$$

Bilangan a_{-1} yang merupakan koefisien suku $\frac{1}{z-a}$ dalam pengembangan laurent bagi f(z) atas A, dinamakan Residu f(z) pada a dan ditulis Res[f,z=a]

sedemikian hingga, dengan definisi

$$a_{-1} = \mathrm{Res}[f,z=a]$$

maka $\int_C f(z)\, dz = 2\pi i\ \mathrm{Res}[f,z=a] \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.5.3)$

Teorema 2.5.1

Jika f(z) analitik dalam sebuah daerah R kecuali untuk sebuah kutub berorde n di z=a dan jika c adalah sebarang kurva tertutup sederhana dalam R yang mengandung z=a maka

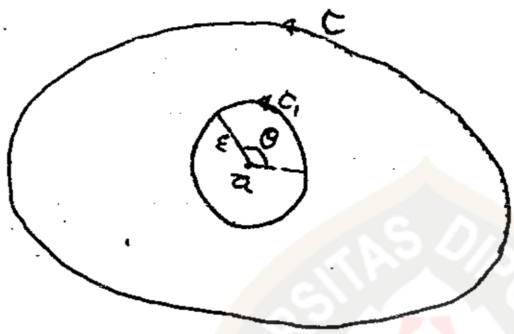
$$f(z)=\frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \ldots + \frac{a_{-1}}{(z-a)} + a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \ldots$$

dan $\oint_c \dfrac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 0 & \text{jika } n \neq 1 \\ 2\pi i & \text{jika } n=1 \end{cases}$ ....(2.5.4)

maka didapat

$$\oint_c f(z)\, dz = 2\pi i a_{-1} \quad \text{..................(2.5.5)}$$

bukti:



$$\oint_{c_1} \frac{dz}{(z-a)^n} = \oint_c \frac{dz}{(z-a)^n}$$

Misal c_1 adalah sebuah lingkaran yang jari-jari ε pusat $z=a$ dan $(z-a)^{-n}$ analitik di dalam dan pada batas dari daerah yang dibatasi oleh c dan c_1, maka

$$\oint_{c_1} \frac{dz}{(z-a)^n} = \oint_c \frac{dz}{(z-a)^n}$$

pada c_1, $|z-a| = \varepsilon$ atau $z-a = \varepsilon e^{i\theta}$

$$dz = i\varepsilon e^{i\theta} d\theta$$

$$\oint_{c_1} \frac{dz}{(z-a)^n} = \int_0^{2\pi} \frac{i\varepsilon e^{i\theta} d\theta}{\varepsilon^n e^{in\theta}}$$

$$= \frac{i}{\varepsilon^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)\theta}\, d\theta$$

$$= \frac{i}{\varepsilon^{n-1}} \; \frac{1}{i(n-1)} \; e^{i(1-n)\theta} \Big|_{0}^{2\pi}$$

$$= 0 \text{ jika } n \neq 1$$

Jika n=1 maka

$$\oint_{c_1} \frac{dz}{(z-a)^n} = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i$$

bukti untuk $\oint_c f(z)\, dz = 2\pi i a_{-1}$

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \ldots + \frac{a_{-1}}{(z-a)} + a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \ldots$$

$$\oint f(z) = \oint \frac{a_{-n}\, dz}{(z-a)^n} + \oint \frac{a_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}}\, dz + \ldots + \oint \frac{a_{-1}}{(z-a)}\, dz$$

$$+ \oint (a_0 + a_1(z-a) + \ldots)dz$$

$$= 0 + 0 + \ldots + 2\pi i a_{-1} + 0$$

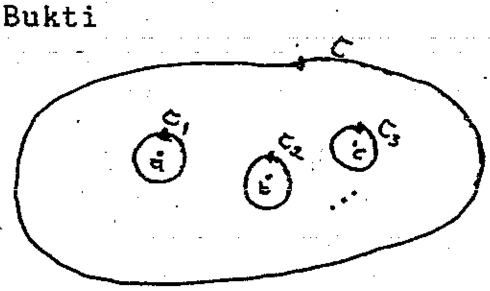
$$= 2\pi i a_{-1}$$

Teorema 2.5.2

Jika f(z) analitik didalam dan pada batas C dari sebuah daerah R kecuali di sejumlah kutub a,b,c ...didaerah R yang berturut-turut mempunyai residu $a_{-1}, b_{-1}, c_{-1}, \ldots$

maka $\oint f(z)dz = 2\pi i\ (a_{-1} + b_{-1} + c_{-1} + \ldots)$ ....(2.5.7)

Bukti



Karena setiap a,b,c,... merupakan singularitas f(z) di C maka dapat ditemukan lingkaran C_k, k=1,2,3,... sedemikian sehingga masing-masing terletak seluruhnya di C, Lingkaran-lingkaran itu berpusat pada a,b,c,... maka untuk setiap C_k yang berorientasi positif dipunyai

$\int_{C_k} f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}[f,z_k]$, dimana z_k merupakan singularitas f(z)

Sehingga

$$\int_C f(z)\, dz = \int_{C_1} f(z)\, dz + \int_{C_2} f(z)\, dz + \int_{C_3} f(z)\, dz + \ldots$$
$$= 2\pi i \{ \operatorname{Res}[f,a] + \operatorname{Res}[f,b] + \operatorname{Res}[f,c] + \ldots\}$$
$$= 2\pi i \{ a_{-1} + b_{-1} + c_{-1} + \ldots\}$$

Teorema 2.3.3:

Jika fungsi f(z) analitik di semua titik dalam dan pada kurva tertutup sederhana C kecuali di z=a yang merupakan kutub berorde n sehingga

$$f(z)= \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \ldots + \frac{a_{-1}}{(z-a)} + a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \ldots$$
$$= \sum_{k=-n}^{\infty} a_k (z-a)^k$$

maka $a_{-1} = \operatorname{Res}[f,z=a]$

$$= \lim \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left\{(z-a)^n f(z)\right\} \quad \ldots\ldots.(2.5.8)$$

bukti :

$f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k (z-a)^k$ mempunyai kutub di z=a orde n

Misal Residu $[f,z=a] = a_{-1}$

$$(z-a)^n f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k (z-a)^k (z-a)^n$$

$$= a_{-n} + a_{-n+1}(z-a) + a_{-n+2}(z-a)^2 + \ldots + a_{-1}(z-a)^{n-1} + \ldots + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^{k+n}$$

Jadi dapat dideferensialkan suku demi suku. Setelah (n-1) turunan,diperoleh

$$\frac{d^{(n-1)}}{dz^{(n-1)}} (z-a)^n f(z) = (n-1)!\,a_{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [a_k (z-a)^{k+n}]$$

karena $z \to a$ maka

$$\lim_{z\to a} \frac{d^{(n-1)}}{dz^{(n-1)}} (z-a)^n f(z) = (n-1)!\,a_{-1} + \lim_{z\to a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [a_k (z-a)^{k+n}]$$

$$= (n-1)!\,a_{-1}$$

$$a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to a} \frac{d^{(n-1)}}{dz^{(n-1)}} (z-a)^n f(z)$$

$$\text{Res}[f,z=a] = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to a} \frac{d^{(n-1)}}{dz^{(n-1)}} (z-a)^n f(z)$$

jadi terbukti.

contoh 2.4

Hitung $\oint_C \frac{e^z\,dz}{(z-2)(z+4)^2}$ dimana C diberikan $|z|=5$

Jawab

Singularitas kutub dari $\frac{e^z\,dz}{(z-2)(z+4)^2}$ adalah $z=2$ dan $z=-4$

Untuk kutub di $z=2$ orde 1

$$\text{Res}\ [f(z),z=2] = \lim_{z\ 2} \frac{e^z\ dz}{(z-2)(z+4)^2}(z-2)$$

$$= \lim_{z\ 2} \frac{e^z\ dz}{(z+4)^2}$$

$$= \frac{e^2}{36}$$

Untuk kutub di z=-4 orde 2

$$\text{Res}\ [f(z),z=-4] = \lim_{z\ -4} \frac{d}{dz} \frac{e^z\ dz}{(z-2)(z+4)^2}(z+4)$$

$$= \lim_{z\ -4} \frac{d}{dz} \frac{e^z\ dz}{(z-2)}$$

$$= \lim_{z\ -4} \frac{(z-2)e^z - e^z}{(z-2)^2}$$

$$= (-e^{-4} - 6e^{-4})/36$$

$$= -7e^{-4}/36$$

2.6 TRANSFORMASI LAPLACE

Definisi 2.6.1

Misalkan F(t) suatu fungsi dari t yang tertentu untuk t>0 maka transformasi laplace dari F(t) yang dinyatakan oleh L {F(t)} didefinisikan sebagai

$$L\ \{F(t)\} = f(s) = \int_0^\infty e^{-st}\ F(t)\ dt$$

dimana s sebagai parameter riil, namun dapat dipandang sebagai bilangan kompleks.

Transformasi laplace invers

Definisi 2.6.3

Jika transformasi Laplace suatu fungsi F(t) adalah f(s) yaitu $L\{F(t)\}=f(s)$ maka $F(t)$ disebut suatu transformasi laplace invers dari f(s).

$$F(t) = L^{-1}\{f(s)\}$$

2.7 FUNGSI GAMMA

Jika n>0 maka fungsi Gamma didefinisikan oleh

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} u^{n-1}\, e^{-u}\, du \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.7.1)$$

Jika n<0 maka fungsi gamma didefinisikan oleh

$$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.7.2)$$

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} u^{n}\, e^{-u}\, du = n\,\Gamma(n), \text{dimana } n>0 \quad \ldots\ldots(2.7.3)$$

Pada umumnya jika n bilangan asli positif maka

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.7.4)$$

Contoh 2.5

Buktikan $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

Bukti

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} u^{n-1}\, e^{-u}\, du$$

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{\infty} u^{-1/2}\, e^{-u}\, du$$

Misalkan $u=v^2$

$$\Gamma(1/2) = \int_0^{\infty} v^{-1}\, e^{-v^2}\, 2v\, dv$$

$$= 2\int_0^{\infty} e^{-v^2}\, dv$$

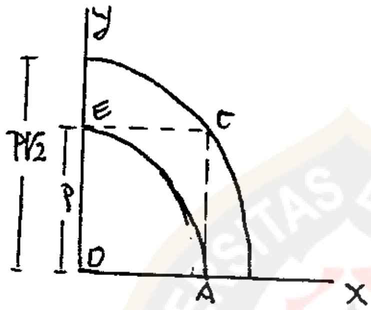
Misal $I_p = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy$

$$I_p^2 = \int_0^\infty e^{-x^2}dx \int_0^\infty e^{-y^2}dy$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

$$= \iint_{R_p} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

dimana R_p merupakan bujur sangkar OACE dengan sisi P



$$\iint_{R_1} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \le I_p^2 \le \iint_{R_2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

dimana R_1 dan R_2 adalah daerah-daerah dikuadran satu yang dibatasi oleh lingkaran-lingkaran yang jari-jarinya P dan $P\sqrt{2}$. Dengan mempergunakan koordinat kutub (r,θ) maka

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{p} e^{-r^2}\, r\, dr\, d\theta \le I_p^2 \le \int_0^{\pi/2} \int_0^{p\sqrt{2}} e^{-r^2}\, r\, dr\, d\theta$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\int_0^{p} e^{-r^2}\, dr^2 d\theta \le I_p^2 \le \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\int_0^{p\sqrt{2}} e^{-r^2}\, dr^2\, d\theta$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1-e^{-p^2})\, d\theta \le I_p^2 \le \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1-e^{-p\sqrt{2}})\, d\theta$$

$$\frac{\pi}{4}\, (1-e^{-p}) \le I_p^2 \le \frac{\pi}{4}\, (1-e^{-p\sqrt{2}})$$

Jika $p \to \infty$ maka

$$\lim_{p\to\infty} I_p^2 = \frac{\pi}{4}$$

Jadi $I_p = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

Sehingga

$$\Gamma(1/2) = 2 \int_0^\infty e^{-v^2}\, dv$$

$$= \sqrt{\pi}$$

2.8 TRANSFORMASI FOURIER

DEFINISI 2.8.1

Misalkan F(x) memenuhi kondisi-kondisi berikut :

1. F(x) memenuhi kondisi Dirichlet dalam tiap-tiap interval $-l \le x \le l$.

   Kondisi Dirichlet :

   a. F(x) didefinisikan dalam inteval $c \le x \le c+2l$

   b. F(x) dan F'(x) kontinu secara bagian-bagian dalam $c \le x \le c+2l$

   c. $F(x+2l) = F(x)$, yakni F(x) periodik dengan periode $2l$

2. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$ konvergen yakni F(x) integrabel absolut dalam $-\infty < x < \infty$

maka Integral Fourier menyatakan bahwa

$$F(x) = \int_0^\infty \{ A(\lambda) \cos\lambda x + B(\lambda) \sin\lambda x \}\, dx \quad \text{..........(2.8.1)}$$

dimana

$$A(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \cos\lambda x\, dx \quad \text{..................(2.8.2)}$$

$$B(\lambda)= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \sin\lambda x \, dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.8.3)$$

Dari persamaan (2.8.1), (2.8.2),dan (2.8.3) dapat ditulis dalam bentuk yang ekivalen sebagai :

$$F(x)= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \cos\lambda(x-u) \, du \, d\lambda \quad \ldots\ldots\ldots(2.8.4)$$

F(x) dinamakan integral Fourier.

Dari persamaan (2.8.1) dengan koefisien-koefisien (2.8.2) dan (2.8.3) dapat ditulis sebagai

$$F(x)= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} \, d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \, e^{-i\lambda u} \, du \quad \ldots\ldots\ldots(2.8.5)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \, e^{i\lambda(x-u)} \, du \, d\lambda$$

Dari persamaan (2.8.5)

Jika $f(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \, e^{-i\lambda u} \, du$ ....(2.8.6)

maka $F(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda u} f(\lambda) \, d\lambda$ ....(2.8.7)

Fungsi $f(\lambda)$ dinamakan transformasi Fourier dari F(u) dan kadang-kadang ditulis sebagai $f(\lambda) = \mathcal{F}\{F(u)\}$.

Fungsi F(u) adalah transformasi Fourier invers dari $f(\lambda)$ dan ditulis sebagai $F(x) = \mathcal{F}^{-1}\{f(\lambda)\}$