BAB II

MATERI PENUNJANG

2.1 Himpunan

Himpunan adalah sekelompok obyek-obyek yang berada dalam suatu kesatuan atau batasan dan mempunyai sifat keterikatan diantara anggota-anggotanya. Jika A adalah suatu himpunan dan x adalah anggota dari himpunan A maka dapat ditulis :

$$x \in A$$

dan bila y bukan anggota A, maka dapat ditulis :

$$y \notin A$$

kemudian bila himpunan A = { a,b,c }, berarti himpunan A mempunyai anggota-anggota a,b,c.

Himpunan dari himpunan-himpunan disebut kelas.

Definisi 2.1.1

Dua buah himpunan A dan B dikatakan sama (A=B) jika dan hanya jika untuk setiap anggota A adalah anggota B dan untuk setiap anggota B adalah anggota A.

Contoh :

A = {1,2,3,4}

B = {3,1,4,2}

Himpunan A = himpunan B karena elemen-elemen 1,2,3 dan 4 dari A termasuk dalam B dan elemen-elemen 3,1,4 dan 2 dari B termasuk dalam A.

Definisi 2.1.2

Himpunan A adalah himpunan bagian dari B dengan notasi $A \subset B$, jika dan hanya jika setiap anggota dari A menjadi anggota dari B.

Contoh :

C = {1,3,5}

D = {5,4,3,2,1}

Himpunan C adalah himpunan bagian dari D karena elemen-elemen 1,3,5 termasuk ke C juga termasuk dalam D.

Definisi 2.1.3

Himpunan kosong (dinotasikan $\emptyset$) adalah himpunan yang tidak mempunyai anggota.

Contoh :

Misalkan $B = \{x \mid x^2=4,\ x \text{ ganjil}\}$ maka B adalah himpunan kosong.

Definisi 2.1.4

Himpunan berhingga adalah suatu himpunan yang anggota-anggotanya berhingga.

contoh :

Himpunan hari-hari dalam satu minggu.

Definisi 2.1.5

Klas dari suatu himpunan adalah himpunan yang anggota-anggotanya himpunan.

Contoh :

Himpunan {{2,3},{2},{5,6}} adalah klas himpunan dan anggota-anggotanya adalah {2,3},{2},{5,6}.

Definisi 2.1.6

Jika A dan B himpunan sembarang . Maka A x B didefinisikan sebagai

$A \times B = \{ (x,y) : x \in A , y \in B \}$

Contoh :

Misalkan A = {1,2,3} dan B = {a,b} didapat

A x B = { (1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,B) }

Definisi 2.1.7

Suatu Relasi R dari suatu himpunan A ke himpunan B adalah suatu himpunan bagian dari A x B.

Contoh :

Misalkan A = {2,3,5} dan B {2,3},Relasi R berarti "membagi". Maka Relasi R dari himpunan A ke himpunan B adalah R = { (2,2),(3,3), }

Definisi 2.1.8

Suatu bilangan bulat $a \neq 0$ disebut pembagi dari suatu bilangan bulat b ditulis $a|b$ jika ada suatu bilangan bulat c sedemikian sehingga $b = a.c$.

Contoh :Misalkan a = 2 dan b = 6,maka $2|6$ karena terdapat bilangan bulat 3 sedemikian sehingga 6 = 2.3

Definisi 2.1.9

Misalkan m bilangan bulat positif, Relasi kongruen modulo m (= mod m) didefinisikan pada semua $a,b \in I$ dengan $a \equiv b \pmod m$ jhj $m|(a-b)$

Contoh :

Misalkan m = 4 dan b = 1, maka $25 \equiv 1 \pmod 4$ karena ada bilangan bulat 25 sedemikian sehingga $4|(25-1)$

2.2 Matriks

Definisi 2.2.1

Matriks adalah kumpulan skalar (bilangan riil atau kompleks) yang disusun / dijajarkan secara empat persegi panjang. (menurut baris dan kolom)

Contoh :

$$\text{Matriks } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.2.2

Ukuran (ordo) matriks adalah banyaknya baris (m) dan banyaknya kolom (n) ditulis (mxn).

Definisi 2.2.3

Misalkan suatu matriks $A = (a_{ij})$berukuran (mxn) maka transpose dari matriks A dengan notasi A^Tberukuran (nxm) didapatkan dari A dengan menuliskan baris ke-i dari A, i = 1, 2,.., m sebagai kolom ke-i dari A^T.

= 1, 2,..., m sebagai kolom ke-i dari A^T.

Contoh :

Transpose dari matriks A adalah :

$$\text{Matriks } A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Maka A^T di atas mempunyai ukuran (4x3).

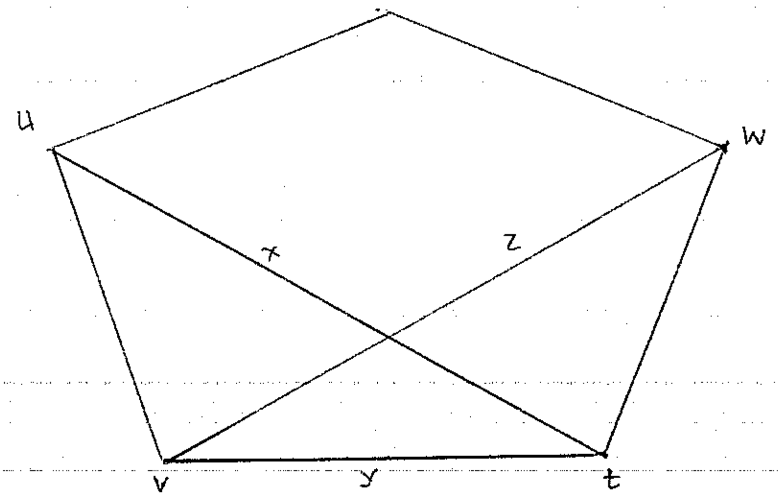
2.3 Pengertian Graph

Definisi 2.3.1

Suatu graph G adalah himpunan titik (v) dengan V = $\{v_1, v_2, \ldots\}$ dan himpunan garis (x) dengan X = $\{x_1, x_2, \ldots\}$ sedemikian sehingga garis x_k adalah pasangan tidak berurutan dari titik-titik (v_i, v_j).

Setiap pasangan dari titik-titik dalam x, x = $\{v_1, v_2\}$ adalah suatu garis dari G dan x dikatakan menghubungkan v_1, v_2. Dapat juga ditulis x = $v_1 v_2$.

Contoh :



gambar 2.3.1

u dan titik t sehingga x = {u,t} atau dapat juga ditulis x = ut.

Definisi 2.3.2

Jika x = uv, dikatakan u dan v adalah titik - titik yang adjacent. Kadang-kadang dinotasikan u adj v.

Contoh :

Pada gambar 2.3.1 titik u adjacent dengan titik t,
titik v adjacent dengan titik w.

Definisi 2.3.3

Jika x = uv, titik u dan garis x dikatakan insiden satu sama lain, sebagaimana titik v dan garis x.

Contoh :

Pada gambar 2.3.1 titik u insiden dengan garis x.

Definisi 2.3.4

Jika 2 garis berbeda x dan y insiden dengan titik yang sama maka garis x dan y adalah garis-garis yang adjacent.

contoh :

Pada gambar 2.3.1 garis y dan garis z adjacent karena insiden pada titik v.

Definisi 2.3.5

Suatu Graph dengan p titik dan q garis disebut suatu graph (p,q).

contoh :

Pada gambar 2.3.1 adalah graph dengan 5 titik dan 7 garis atau graph (5,7).

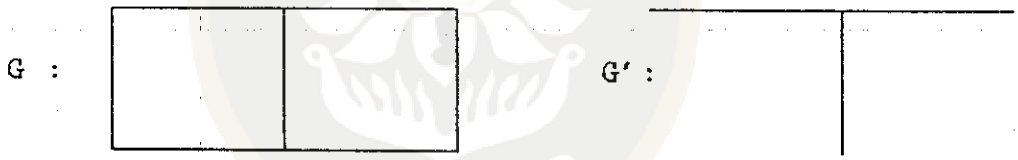
Definisi 2.3.6

Graph (1,0) adalah graph trivial.

Definisi 2.3.7

Suatu subgraph dari G adalah graph yang semua titik dan garisnya dalam G.

contoh :



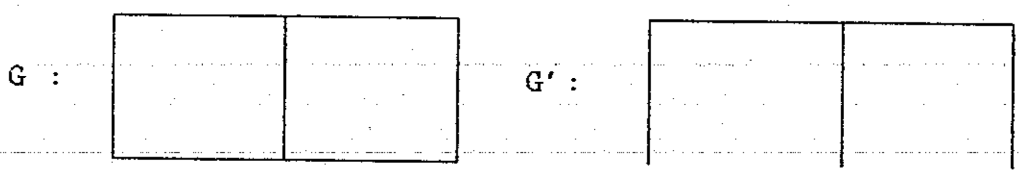
gambar 2.3.2

Pada gambar di atas G' adalah subgraph dari G

Definisi 2.3.8

Suatu spanning subgraph (subgraph bentangan) adalah suatu subgraph yang memuat semua titik dari G.

contoh :



gambar 2.3.3

Pada gambar di atas G' adalah spanning subgraph dari

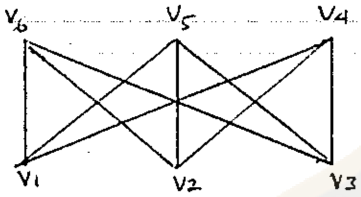
G, karena semua titik dalam G termuat dalam G'.

Definisi 2.3.9

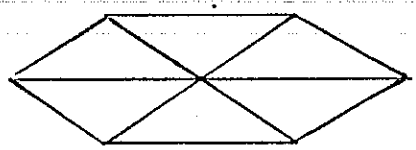
Suatu graph G yang mempunyai p titik diberi label bila p titiknya dibedakan dengan lainnya dengan nama-nama seperti v_1, v_2, ... v_p

contoh :

G :



G' :



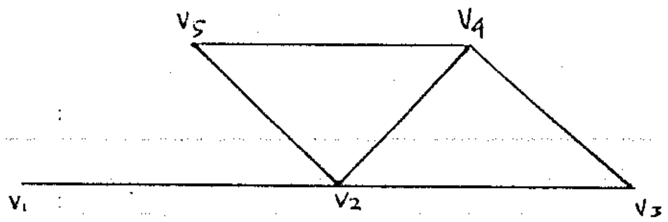
gambar 2.3.4

Graph G pada gambar 2.3.4 diberi label sedangkan Graph G' tidak.

Definisi 2.3.10

Suatu Walk dari Graph G adalah barisan dari titik - titik dan garis - garis secara bergantian $v_0, x_1, v_1, x_2 \ldots v_{n-1}, x_n, v_n$, dimulai dan diakhiri dengan titik yang setiap garis insiden dengan 2 titik. $v_0, x_1, v_1 \ldots v_{n-1}, x_n, v_n$ dapat juga ditulis $v_0 v_1 v_2 \ldots v_n$.

contoh :



gambar 2.3.5

Pada gambar 2.3.5 $v_1 v_2 v_5 v_4 v_3$ adalah suatu walk.

Definisi 2.3.11

Path (lintasan) adalah walk dengan titik dan garis tidak boleh diulang.

contoh :

Pada gambar 2.3.5 $v_1v_2v_5v_4$ adalah suatu path.

Definisi 2.3.12

Cycle adalah suatu walk dengan titik awal sama dengan titik akhir.

contoh :

Pada gambar 2.3.5 $v_2v_4v_5v_2$ adalah cycle.

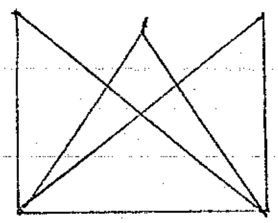
Cycle dengan n titik dinotasikan dengan C_n.

Cycle dengan 3 titik atau C_3 adalah segitiga.

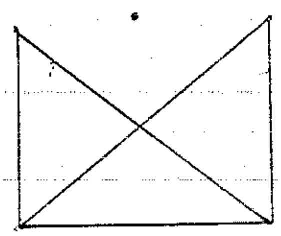
Definisi 2.3.13

Suatu graph adalah terhubung jika setiap pasang titiknya dihubungkanoleh path. Sedangkan yang tidak demikian disebut graph tidak terhubung.

contoh :



graph terhubung



grpah tak terhubung

Gambar 2.3.6

Definisi 2.3.14

Panjang suatu walk adalah banyaknya garis dalam walk itu.

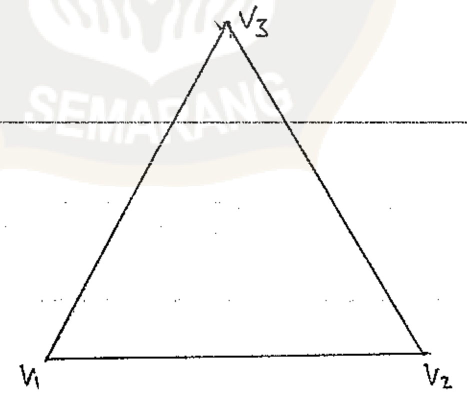
contoh :

Panjang walk $v_1v_2v_3$ pada gambar 2.3.5 adalah 2.

Definisi 2.3.15

Degree (derajat) dari titik v_i dalam graph G, dinotasikan d_i atau degv_i adalah banyaknya garis yang insiden dengan v_i. Minimum derajat diantara titik-titik dari G dinotasikan δ (G).

contoh :



gambar 2.3.7

Pada gambar 2.3.7, derajat v_1 = derajat v_2 = derajat v_3 = 2. Derajat terendah pada gambar 2.3.7 adalah 2.

Definisi 2.3.16

Suatu graph G yang setiap titiknya mempunyai derajat yang sama misalnya r maka graph G disebut reguler berderajat r.

contoh :

Graph pada gambar 2.3.7 adalah reguler berderajat 2.

Teorema 2.3.1

Jika titik-titik dalam graph G mempunyai derajat $d_1, d_2, \dots, d_p$ dan G mempunyai q garis maka $\sum d_i = 2q$.

Bukti :

Pandang suatu graph G dengan p titik $v_1, v_2, \dots, v_p$ dan q garis. Karena tiap-tiap garis menyumbang 2 derajat, maka banyaknya derajat dari titik-titik dalam G adalah dua kali jumlah garis dalam G sehingga :

$$\sum d(v_i) = 2q$$

contoh :

Banyaknya derajat Graph pada gambar adalah :

$$\begin{aligned} \sum d(v_i) &= d(v_1)+d(v_2)+d(v_3) \\ &= 2 + 2 + 2 \\ &= 6. \end{aligned}$$

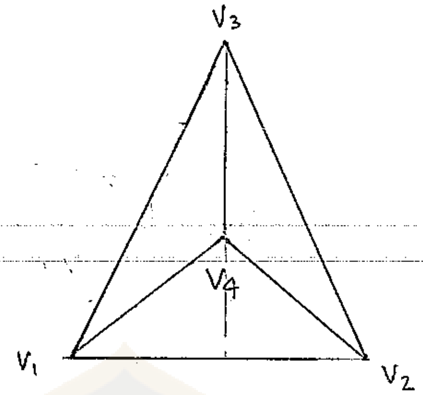
Definisi 2.3.17

Complete Graph (Graph Lengkap) adalah graph yang terdapat edge antara setiap pasang titik-titiknya.

Graph Lengkap dengan p titik diberi notasi K_p.

K_p mempunyai $\binom{p}{2}$ garis dan reguler berderajat p-1.

contoh :



gambar 2.3.8

Graph di atas adalah graph lengkap dengan 4 titik dan berderajat reguler 3.

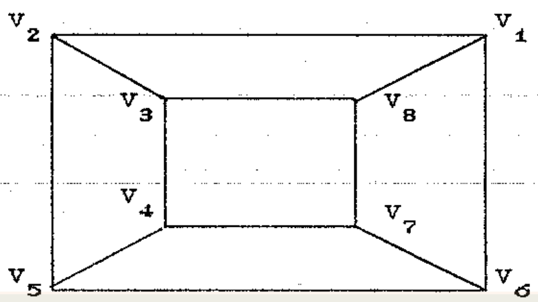
Definisi 2.3.18

Suatu graph berbobot adalah suatu graph yang setiap garisnya diberi nilai suatu bilangan riil.

Definisi 2.3.19

Suatu Hamilton cycle (cycle Hamilton) dalam suatu graph terhubung adalah suatu walk tertutup yang melewati setiap titik dari G tepat satu kali, kecuali titik awal yang juga menjadi titik akhir.

contoh :



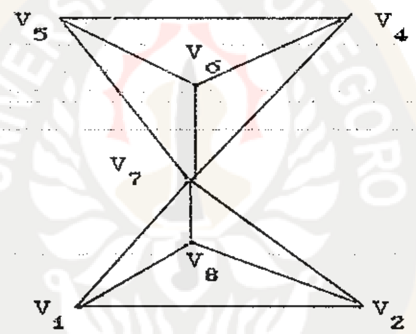
gambar 2.3.9

Pada gambar 2.3.9, $v_1v_2v_3v_4v_5v_6v_7v_8v_1$ adalah cycle Hamilton.

Definisi 2.3.20

Himpunan garis dalam suatu graph G adalah independen jika tidak ada garis yang adjacent.

contoh :



gambar 2.3.10

Himpunan garis { $\{v_1,v_2\},\{v_7,v_8\},\{v_6,v_4\}$ } adalah himpunan independen.

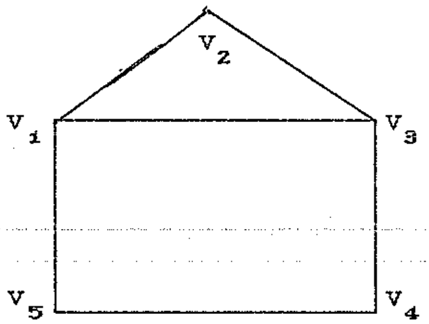
Definisi 2.3.22

Matriks adjensi $A = [a_{ij}]$ dari suatu graph G berlabel dengan p titik adalah matriks pxp dengan

$a_{ij} = 1$ jika v_i adjacent dengan v_j

$a_{ij} = 0$ untuk yang lainnya.

contoh :



gambar 2.3.11

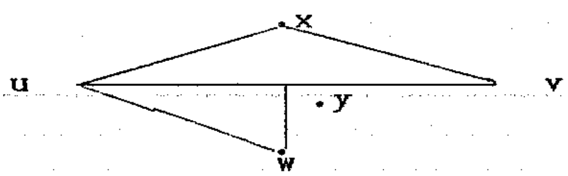
Graph pada gambar di atas dengan 5 titik mempunyai matriks adjensi A :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.3.23

Dua lintasan yang menghubungkan titik u dan v dikatakan lintasan titik disjoint jika tidak ada titik selain u dan v.

contoh :



gambar 2.3.12

lintasan uxv dan uyv adalah lintasan titik disjoint.

Definisi 2.3.24

Dua lintasan yang menghubungkan titik u dan v dikatakan lintasan garis disjoint jika tidak ada garis yang sama.

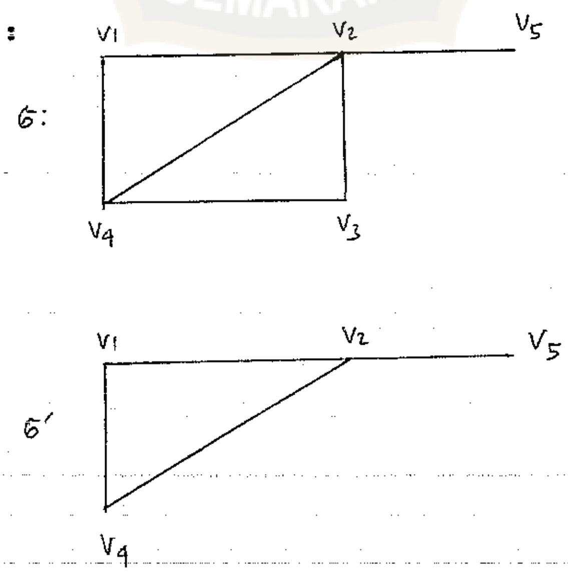
contoh :

Pada Gambar 2.3.12 di atas lintasan uxv dan uyv adalah lintasan garis disjoint.

Definisi 2.3.25

Penghapusan suatu titik v_i dari suatu graph G menghasilkan suatu subgraph $G - v_i$ dari G yang memuat semua titik dari G kecuali v_i dan semua garis yang tidak insiden dengan v_i.

Contoh :



gambar 2.3.13

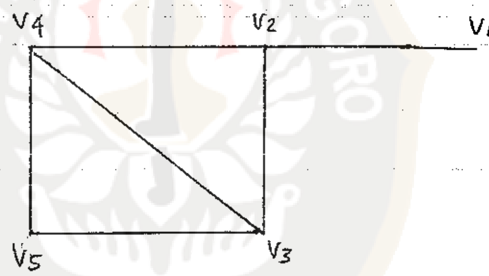
Gambar 2.3.13 adalah graph G dan subgraph G − v_3 yang memuat semua titik dari G kecuali v_3 dan garis yang tidak insiden dengan v_3.

Definisi 2.3.26

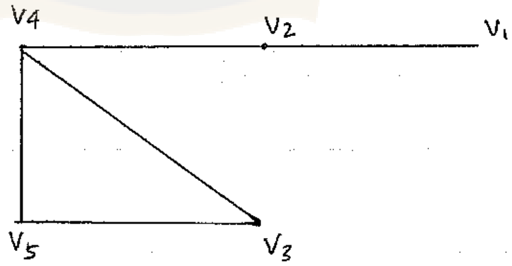
Penghapusan suatu garis x_j dari G menghasilkan subgraph G−x_j yang memuat semua garis dari G kecuali x_j.

Contoh :

G :



G' :



gambar 2.3.14

Gambar 2.3.14 adalah contoh suatu graph G dan sub graph G−v_2v_3 yang memuat semua garis dari G kecuali v_2v_3.

contoh :

Ada berapa cara menyusun 3 buku dengan tanda A,B,C dalam suatu rak buku.

Karena dalam permutasi urutan diperhatikan, maka ABC $\neq$ ACB $\neq$ BAC $\neq$ BCA $\neq$ CAB $\neq$ CBA maka ada 6 permutasi yaitu : ABC , ACB , BAC , BCA , CAB , CBA .

Definisi 2.4.1.2

Hasil kali dari seluruh bilangan dari 1 sampai dengan n disebut faktorial dan ditulis n ! (dibaca n faktorial).

contoh :

$0\,! = 1\,!$

$2\,! = 2 \cdot 1 = 2$

$3\,! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Definisi 2.4.1.3

Permutasi dari n obyek secara keseluruhan sebanyak n faktorial. Permutasi ini diberi simbol P^n_n . Jadi $P^n_n = n!$.

contoh :

Pada contoh 2.2.1 banyaknya permutasi dari 3 obyek adalah $3\,! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ Jadi $P^3_3 = 6$

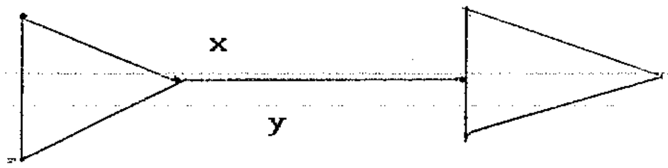
Definisi 2.4.1.4

Permutasi dari n obyek yang diambil r obyek setiap kali sebesar ($r \leq n$) adalah $P^n_r = \dfrac{n\,!}{(n-r)\,!}$

Definisi 2.3.27

Suatu cut point adalah suatu titik yang dihapus sehingga graph menjadi tidak terhubung.

Contoh :



gambar 2.3.15

Pada gambar 2.3.15 x adalah cut point.

Definisi 2.3.28

Suatu bridge adalah suatu garis yang dihapus sehingga graph menjadi tidak terhubung.

Contoh :

Pada gambar di atas garis y adalah bridge.

2.4 Probabilitas Untuk Ruang Sampel Terbatas

2.4.1 Permutasi, Kombinasi dan Dalil Binomial.

Persoalan Permutasi adalah merupakan persoalan pengaturan untuk menyusun suatu himpunan obyek. Misalnya ada berapa cara (urutan) jika 10 orang antri di muka loket untuk membeli karcis.

Definisi 2.4.1.1

Suatu permutasi dari beberapa obyek ialah pengaturan dari obyek-obyek tersebut dengan memperhatikan urutannya.

contoh :

Misalkan ada 7 buku, berapa banyak susunan yang dapat diperoleh bila setiap susunan terdiri dari 3 buku apabila urutan diperhatikan ?

Banyaknya permutasi dari 7 buku yang diambil 3 buku adalah sebesar $P_7^3 = \frac{7\,!}{(7-3)\,!} = \frac{7\,!}{4\,!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \frac{4\,!}{4\,!}$

$= 210$ susunan.

Definisi 2.4.1.5

Suatu kombinasi adalah suatu pemilihan obyek-obyek tanpa memperhatikan urutan obyek tersebut. Jumlah kombinasi diberi simbol C_r^n atau $\binom{n}{r}$

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n\,!}{r!\,(n-r)!}$$

contoh :

Ada berapa cara memilih 13 kartu dari 1 set kartu bridge (n=52) kalau urutan tak diperhatikan.

n=52 , r=13

$$\binom{52}{13} = \frac{52\,!}{13\,!\,39\,!} = 635.013.559.400$$

Jika n bilangan bulat maka ekspansi binomial adalah

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n} b^n.$$

atau dapat ditulis :

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^n b^{n-r}$$

dimana $\binom{n}{r}$adalah kombinasi dari n obyek yang diambil r obyek.

contoh :

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0} a^4 + \binom{4}{1} a^3b + \binom{4}{2} a^2b^2 + \binom{4}{3} a\ b^3 + \ldots + \binom{4}{4} b^4$$

$$= a^4 + 4\ a^3b + 6\ a^2b^2 + 4\ a\ b^3 + b^4$$

Probabilitas merupakan suatu nilai untuk mengukur besarnya tingkat kemungkinan terjadinya suatu kejadian.

2.4.2 Sistem Probabilitas

Definisi 2.4.2.1

Ruang sampel ialah suatu himpunan elemen-elemen sedemikian rupa sehingga setiap pelaksanaan eksperimen memberikan suatu hasil yang sesuai dengan satu elemen dalam himpunan tersebut.

contoh :

Misalkan sebuah mata uang dilempar, maka hasil (outcome) adalah :

B untuk gambar burung

$\overline{B}$ untuk yang lainnya

maka ruang sampel untuk eksperimen di atas adalah :

S { B, $\overline{B}$ }.

Definisi 2.4.2.2

Titik sampel adalah elemen dalam ruang sampel

contoh :

Pada contoh 4.2.1.2 B dan $\overline{B}$ adalah titik-titik sampel.

2.4.3 Model Probabilitas Distribusi Binomial

Suatu eksperimen Binomial harus memenuhi syarat-syarat sebagai berikut :

1. Jumlah percobaan harus tetap. Percobaan diulangi sebanyak n yang tetap.

   contoh

   Melempar mata uang sebanyak 4 kali atau melempar dadu 2 kali.

   Sedangkan suatu eksperimen yang tidak tetap misalnya mengambil satu kartu dari tumpukan 1 set kartu sampai diperoleh kartu AS.

2. Setiap percobaan harus menghasilkan dua alternatif yaitu sukses atau tidak sukses (gagal). Sebutan sukses atau gagal untuk memudahkan pembahasan binomial secara umum. Pengertian sukses tergantung pada persoalan, misalnya barang bagus disebut sukses dan rusak disebut gagal.

3. Semua percobaan mempunyai probabilitas yang sama.

   Contoh :

   Probabilitas untuk mendapat mata 1 dalam melempar dadu adalah 1/6.

4. Percobaan bebas satu sama lain

   Satu percobaan yang bebas memenuhi :

   $P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B)$

Suatu eksperimen Binomial terdiri dari n percobaan yang bebas ($n \geq 1$) semua mempunyai probabilitas yang sama untuk sukses yaitu sebesar p dimana $0 \leq p \leq 1$. Hasil eksperimen adalah X sukses. Variabel acak x mengambil nilai 0, 1, ..., n dengan probabilitas $P(X=x)$ atau secara singkat $P(x)$, artinya probabilitas bebas variabel X mengambil nilai x.

Karena menurut teori permutasi ada sebesar $\binom{n}{x}$ cara untuk memperoleh x sukses dalam n percobaan, berarti ruang sampel S akan mempunyai $\binom{n}{x}$ titik yang mewakili hasil terdiri dari x sukses dan n-x gagal, maka probabilitas untuk memperoleh x sukses dan (n-x) gagal adalah hasil kali p^xdan q^{n-x}yaitu $p^x q^{n-x}$.

Karena dalam ruang sampel S ada $\binom{n}{x}$ titik dengan x sukses yang setiap titik mempunyai probabilitas $p^x q^{n-x}$ maka diperoleh :

$$b(x;n,p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \quad , x = 0, 1, \ldots, n$$

Contoh :

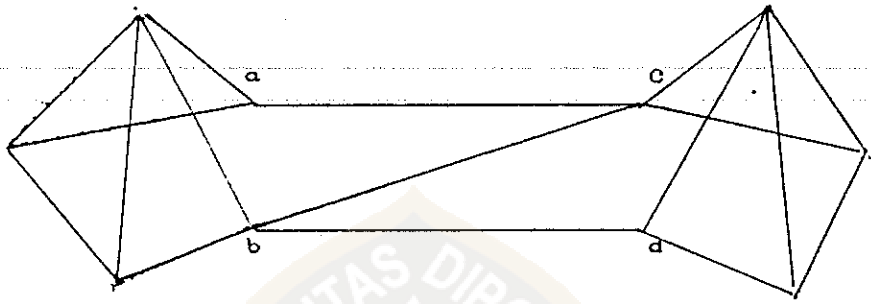
5 mata uang logam dilempar, probabilitas untuk memperolehgambar burung sebesar $p = 1/2$. Probabilitas untuk memperoleh 2 gambar burung adalah $P(x=2) = b\ (2;5;1/2) = \binom{5}{2}\ (1/2)^2\ (1/2)^3 = 5/16$.

2.5 Keterhubungan titik dan keterhubungan garis

Definisi 2.5.1

Keterhubungan $K = K(G)$ dari suatu graph G adalah banyaknya titik minimum yang harus dihapus agar suatu graph terhubung menjadi tidak terhubung atau trivial. Kadang-kadang K disebut titik.

contoh :

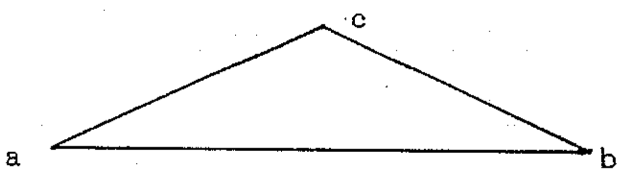


gambar 2.5.1

Graph di atas adalah suatu Graph dengan keterhubungan titik (K)=2, karena banyaknya titik minimum yang harus dihapus agar graph di atas menjadi tidak terhubung adalah 2 yaitu titik a dan b atau c dan d.

Untuk graph lengkap (complete graph) tidak dapat dijadikan tidak terhubung dengan penghilangan titik, tetapi dapat menjadi graph trivial dengan penghapusan (p-1) titik. Jadi graph lengkap dengan p titik akan mempunyai keterhubungan titik $K(K_p) = p-1$.

Contoh :



gambar 2.5.2

Gambar di atas adalah suatu graph lengkap dengan 3 titik. Agar menjadi graph trivial diperlukan penghapusan titik-titik {a,b} atau {b,c} atau {c,d}.

Sehingga minimum titik yang harus dihapus agar graph di atas menjadi trivial adalah 2. Jadi keterhubungan titik untuk graph di atas adalah 2.

Definisi 2.5.2

Keterhubungan garis $\lambda = \lambda$ (G) dari suatu graph G adalah banyaknya garis minimum yang harus dihapus agar suatu graph menjadi tidak terhubung.

contoh :

Graph pada gambar 3.1.1 mempunyai keterhubungan garis $(\lambda) = 3$.

Banyaknya minimum garis yang harus dihapus agar graph pada gambar 2.5.1 menjadi tidak terhubung adalah 3 yaitu { {a,c},{b,c},{b,d} }

Teorema 2.5.1

Untuk sembarang graph G berlaku :

$$K(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$$

Bukti :

Pertama akan dibuktikan pertidaksamaan ke dua, yaitu

$$\lambda(G) \leq \delta(G)$$

Jika G tidak mempunyai garis maka $\lambda = 0$, sebaliknya suatu graph tidak terhubung dihasilkan bilamana semua garis yang incident dengan titik berderajat minimum dihapuskan, dalam hal ini didapat $\lambda \leq \delta$.

Untuk membuktikan pertidaksamaan pertama, yaitu $K(G) \leq \lambda(G)$ macam-macam kasus diperhatikan :

Jika G adalah graph tidak terhubung atau trivial maka

$k = \lambda = 0$. Jika G adalah graph terhubung dan mempunyai bridge x, maka $\lambda = 1$. Dalam kasus ini $k = 1$ karena G mempunyai 1 cut-point yang incident dengan x atau atau $G = K_2$. Akhirnya misalkan G mempunyai $\lambda \geq 2$ garis yang harus dihapuskan agar graph tidak terhubung. Maka penghapusan dari $\lambda-1$ garis itu akan membuat suatu graph dengan bridge $x = \{u,v\}$ untuk setiap dari $\lambda-1$ garis ini; pilihlah suatu titik incident yang berbeda dari u atau v. Penghapusan titik ini juga menghapus $\lambda-1$ garis dan mngkin lebih banyak. Jika tidak maka x suatu bridge dan oleh sebab itu penghapusan dari u atau v akan menghasilkan salah satu suatu graph tidak terhubung atau graph trivial sehingga $k \leq \lambda$ dalam sembarang kasus. Dari pembuktian di atas dapat disimpulkan $K(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$

Contoh :

Graph pada gambar 2.5.1 adalah suatu graph dengan $K(G) = 2$, $\lambda(G) = 3$ dan $\delta(G) = 4$.

Teorema 2.5.2

Diantara semua graph dengan p titik dan q garis, keterhubungan titik maksimum adalah 0, untuk $q < p-1$

$\lfloor 2q/p \rfloor$, untuk $q \geq p-1$.

Bukti :

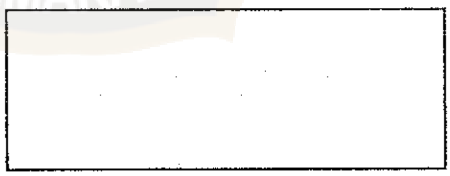
Untuk $q < p-1$ maka graph tidak terhubung sehingga $K=0$. Karena jumlah derajat dari sembarang graph (p,q) adalah 2q maka derajat rata-rata adalah $[2q/p]$. Sehingga $\delta(G) \leq [2q/p]$. Menurut theorema 2.5.1 maka $\lambda(G) = [2q/p]$.

Contoh :

Graph di bawah ini mempunyai banyak titik yaitu P=5 sedangkan banyaknya garis q=3. Untuk $q < p-1$ atau $3<4$ maka graph ini mempunyai keterhubungan titik maksimum $K=\emptyset$ dan keterhubungan garis maximum $\lambda=\emptyset$.

gambar 2.5.3

Sedangkan gambar di bawah ini adalah contoh dari graph dengan $q \geq p-1$ yaitu graph yang mempunyai titik p=5 dan banyak garis q=6 memenuhi $q \geq p-1$ yaitu $6 \geq 4$ makagraph berikut mempunyai keterhubungan titik maksimum $[2 \times 6 / 5] = 2$ dan keterhubungan garis $\lambda=2$.



gambar 2.5.4

Teorema 2.5.3

Diantara semua graph dengan p titik dan q garis keterhubungan garis maksimum adalah $\emptyset$ untuk $q < p-1$

$[2q/p]$ untuk $q \geq p-1$.

Bukti :

- untuk $q < p-1$ maka graph tidak terhubung sehingga $\lambda = \emptyset$

- untuk $q \geq p-1$

Karena jumlah derajat dari sembarang Graph (p,q) G adalah $2q$ maka derajat rata-rata adalah $2q/p$, demikian juga $\lambda(G) \leq [2q/p]$ menurut teorema 3.1.1

Akibat :

Maksimum keterhubungan titik sama dengan maksimum keterhubungan garis.

Bukti :

Menurut teorema 2.5.2 dan teorema 2.5.3 maksimum keterhubungan titik sama dengan maksimum keterhubungan garis.