BAB III
KONVERGENSI LEMAH DARI DISTRIBUSI DALAM SUATU RUANG METRIK

Barisan variabel random ξ_n dikatakan konvergen dalam probabilitas ke suatu variabel random ξ jika untuk sembarang $\varepsilon > 0$, $P\{| \xi_n - \xi | > \varepsilon \} \longrightarrow 0$ untuk $n \longrightarrow \infty$ dan dapat ditulis dengan : $\xi = P\text{-}\lim \xi_n$

Sebelum pembahasan konvergensi lemah dari distribusi dalan suatu ruang metrik akan diberikan terlebih dahulu syarat perlu dan cukup agar barisan distribusi $f(\xi_n(t))$ konvergen ke distribusi $f(\xi(t))$ dalam C[a,b] untuk semua fungsi f yang kontinu. Jika hal ini dipenuhi oleh semua fungsi kontinu $f(x)$ yang terbatas maka dikatakan ukuran μ_n konvergen lemah ke ukuran μ. Pada syarat-syarat ini banyak berperan definisi himpunan kompak, kompak lemah, konvergen lemah yang akan dibahas pada definisi di bawah ini.

Misalkan fungsi sampel proses $\xi_n(t)$ dan $\xi(t)$ (untuk $t \in [a,b]$) ada dengan probabilitas 1, ke suatu ruang metrik X dari semua fungsi $x(t)$ dalam [a,b] terhadap metrik $\rho_x(x,y)$ untuk $x,y \in X$. Contoh : Jika $\xi_n(t)$ dan $\xi(t)$ adalah kontinu dengan probabilitas 1, maka berada dalam ruang C dari fungsi kontinu dengan metrik :

$$\rho_c(x,y) = \sup | x(t) - y(t) |$$

Untuk suatu kelas fungsional F, dalam menentukan syarat bahwa distribusi $f(\xi_n(t))$ konvergen terhadap distribusi $f(\xi(t))$ dapat diambil himpunan fungsi-fungsi pada X yang kontinu terhadap metrik ρ_x. Untuk $f(\xi(t))$

sebagai suatu variabel random maka cukup memerlukan bahwa ruang X adalah separabel dan untuk setiap bola S terbuka pada X, himpunan $\{u\ ;\ \xi(t) \in S\}$ adalah terukur terhadap ruang probabilitas asal (oleh karena di dalam hal $\{u:\xi(t) \in A\}$ adalah terukur terhadap sub himpunan Borel di dalam X)

Misalkan X adalah ruang separabel dan proses $\xi_k(t)$ dan $\xi(t)$ seperti tersebut diatas. Ukuran μ (demikian juga μ_n) berhubungan dengan proses $\xi(t)$ (demikian juga $\xi_n(t)$) didefinisikan pada σ-aljabar B dari semua himpunan bagian Borel :

$$\mu(A) = P\{\xi_n(t) \in A\}\ (\ \mu_n(A) = P\{\xi_n(t) \in (A)\})$$

Untuk setiap B-terukur fungsional terbatas f :

$$Ef(\xi(t)) = \int f(x).\mu(dx).$$

Syarat perlu dan cukup untuk konvergensi barisan distribusi $f(\xi_n(t))$ ke distribusi $f(\xi(t)$ untuk semua fungsi f yang kontinu adalah bahwa :

$$\lim_{n\to\infty} \int f(x)\ \mu_n(dx) = \int f(x)\ \mu(dx), \qquad (3.1)$$

untuk semua fungsi kontinu terbatas f.

Untuk melihat kebenarannya, perhatikan konvergensi barisan distribusi $f(\xi_n(t))$ ke distribusi $f(\xi(t)$, dan fungsi terbatas f menyatakan konvergensi barisan $\{Ef(\xi_n(t))\}$ ke $Ef(\xi(t)$ sehingga persamaan (3.1) dipenuhi. Dipihak lain, persamaan (3.1) menyatakan bahwa untuk setiap fungsional f kontinu, barisan fungsi karakteristik variabel $f(\xi_n(t))$ konvergen ke fungsi karakteristik $f(\xi(t)$:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} E\ e^{i\lambda f(\xi_n(t))} &= \lim_{n\to\infty} \int e^{i\lambda f(x)}\ \mu_n(dx)\\ &= \int e^{i\lambda f(x)}\ \mu(dx)\\ &= E\ e^{i\lambda f(\xi(t))}\end{aligned}$$

Definisi 3.1.

Misalkan persamaan (3.1) dipenuhi untuk semua fungsi kontinu $f(x)$ yang terbatas. Maka barisan ukuran μ_n dikatakan konvergen lemah ke ukuran μ, ditulis $\mu_n \Longrightarrow \mu$.

Definisi 3.2.

Suatu himpunan bagian K dalam ruang metrik X disebut compact jika setiap selimut terbuka untuk K memuat sub selimut berhingga yang masih menyelimuti K.

Definisi 3.3.

Barisan ukuran μ_n dikatakan kompak lemah jika setiap subbarisannya memuat subbarisan konvergen lemah dari ukuran.

Lemma 3.1.

Misalkan X menunjukkan suatu ruang kompak separabel dan $\sup_n \mu_n(X) = H < \infty$. Maka barisan ukuran μ_n adalah kompak lemah.

Bukti :

Misal C_x menunjukkan ruang dari fungsional kontinu f dalam X, dan didefinisikan $||f|| = \sup_{x\in X} |f(x)|$. Maka C_x adalah suatu ruang linier separabel lengkap . Misal $\{f_k\}$ untuk k=1,2,... menunjukkan suatu barisan memenuhi dimana-mana dalam C_x. Digunakan metode diagonal untuk memilih suatu subbarisan ukuran μ_{n_k} sedemikian sehingga limit untuk semua i :

$$\lim \int f(x)\, \mu_n\, (dx) = \ell[f_i] \text{ ada.}$$

Oleh karena :

$$|\ell[f_i]-\ell[f_j]| \leq H||f_i-f_j||.$$

$\ell[f_i]$ adalah suatu fungsional kontinu seragam dalam himpunan $\{f_k\}$ untuk k = 1,2,...,maka $\ell[f_i]$ merupakan suatu fungsi kontinu ke seluruh ruang C_x: $\ell[f] = \lim\limits_{f_{ni}\to f} \ell[f_{ni}]$

Karena relasi :

$$\ell[f] = \lim_{k\to\infty} \int f(x)\, \mu_{n_k}(dx).$$

maka benar untuk semua f,sebagai limit dari suatu barisan fungsi linier nonnegatif. $\ell[f]$ adalah fungsi linier nonnegatif dalam C_x.

Himpunan fungsi $\lambda(A)$ pada B didefinisikan dengan

$\lambda(A) = \inf\limits_{f\geq\chi_A} \ell[f]$.

Sifat-sifat fungsi $\lambda(A)$:

1. $\lambda(A)$ adalah monoton,untuk setiap barisan A_k berlaku : $\lambda(\cup A_k)\leq \sum_k \lambda(A_k)$
2. Jika jarak antara himpunan A_1 dan A_2 adalah positif, yaitu :

   $$\rho(A_1,A_2) = \inf_{x\in A_1, y\in A_2} \rho(x,y) > 0$$

   maka $\lambda(A_1 \cup A_2) = \lambda(A_1) + \lambda(A_2)$.

Bukti :

(1). Jika $\varphi_{A_k}(x) \geq \chi_{A_k}(x)$, maka $\sum_k \varphi_k(x) \geq \chi_{\cup A_k}(x)$

(2). Pilih $\alpha>0$ sembarang dan suatu fungsi kontinu f sedemikian sehingga : $\lambda(A_1 \cup A_2)\geq\lambda[f]-\alpha$ dan $f\geq\chi_{A_1}+\chi_{A_2}$.

Misal $\varphi_A^{(\varepsilon)}$ menunjukkan fungsi :

$$\varphi_{A_i}^{(\varepsilon)}(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ jika } x \in A_i \\ 1-1/\varepsilon.\rho(x,A_i), & \text{jika } 0<\rho(x,A_i)<\varepsilon \\ 0 & , \text{ jika } \rho(x,A_i)\geq\varepsilon \end{cases}$$

$\rho(x,y) = \inf_{y\in A} \rho(x,y)$. Jika $2\varepsilon<\rho(A_1,A_2)$,

maka $\varphi_1+\varphi_2 \leq 1, \varphi_{A_1}^{(\varepsilon)} \geq \chi_{A_1}$ dan $\varphi_{A_2}^{(\varepsilon)}\geq \chi_{A_2}$

karena itu :

$\lambda(A_1\cup A_2) + \alpha \geq \ell[\varphi_{A_1}^{(\varepsilon)} f + \varphi_{A_2}^{(\varepsilon)} f] \geq \lambda(A_1) + \lambda(A_2)$.

Dengan menggunakan sifat (1) dari fungsi $\lambda(A)$ dan $\alpha>0$ sembarang, maka sifat (2) dari fungsi λ (A) terbukti. Misal B_0 menunjukkan koleksi himpunan dimana $\lambda(A') = 0$ dan A' adalah boundary dari himpunan A.

$\mathcal{B}_0$ adalah suatu aljabar dari himpunan. Akan ditunjukkan bahwa $\lambda(A)$ adalah suatu himpunan fungsi yang additif pada B_0.

Misal A_1 dan A_2 menunjukkan dua anggota $\mathcal{B}_0$ yang saling asing, Γ menunjukkan union boundary dari himpunan A_1 dan A_2. Karena $\lambda(\Gamma) = 0$, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat suatu fungsi kontinu g yang memenuhi $g>\chi_r$ sedemikian sehingga $\ell[g] < \varepsilon$,. Didefinisikan :

$$A_i^{(\varepsilon)} = [A_i]\cap\{x \ ; \ g(x)\leq 1/2\}$$

dimana [A] menunjukkan closure A. Himpunan tertutup $A_1^{(\varepsilon)}$ dan $A_2^{(\varepsilon)}$ adalah saling asing dan jaraknya adalah positif, jika X kompak. Didefinisikan :

$$\Gamma_\varepsilon = \{x \ ; \ g(x)\leq 1/2\}$$

Maka :

$$\lambda(\Gamma_\varepsilon) \leq \ell[2g] \leq 2\varepsilon$$

$$\lambda(A_i) \leq \lambda(A_i^{(\varepsilon)}) + \lambda(\Gamma_\varepsilon) \leq \lambda(A_i^{(\varepsilon)}) + 2\varepsilon.$$

Menggunakan kemonotonan λ dan sifat (2) diperoleh :

$$\begin{aligned}\lambda(A_1) + \lambda(A_2) &\le \lambda(A_1^{(\varepsilon)}) + \lambda(A_2^{(\varepsilon)}) + 4\varepsilon \\ &= \lambda(A_1^{(\varepsilon)} \cup A_2^{(\varepsilon)}) + 4\varepsilon \\ &\le \lambda(A_1 \cup A_2) + 4\varepsilon\end{aligned}$$

Misal limit pada $\varepsilon \longrightarrow 0$ dan sifat (1) dari fungsi $\lambda(A)$, maka λ adalah additif pada $\mathcal{B}_o$.

Karena itu λ dapat diperluas sebagai suatu ukuran yang didefinisikan pada $\sigma(\mathcal{B}_o)$. Akan ditunjukkan bahwa $\sigma(\mathcal{B}_o)=\mathcal{B}$. Untuk setiap x hanya terdapat suatu jari-jari r sedemikian sehingga $\lambda(S_r'(x)) > 0$, dimana $S_r(x)$ adalah bola dengan jari-jari r, pusat x, dan boundary $S_r'(x)$. Karena itu $\sigma(\mathcal{B}_o)$ memuat semua bola dan semua himpunan bagian Borel dari X.

Ditunjukkan bahwa untuk semua $f \in C_x$,

$$\ell[f]=\int f(x)\mu(dx). \tag{3.2}$$

Misalkan f adalah nonnegatif. Dipilih harga $0=c_o<c_1<c_2<\ldots<c_N$ dengan $c_N > \|f\|$ sedemikian sehingga $\lambda\{x\ ; f(x) = c_k\} = 0$. Jika $A_k = \{x\ ; c_{k-1} \le f(x) \le c_k\}$, maka $A_k \in \mathcal{B}_o$ dan $\lambda\ (A_k) = \mu(A_k)$. Misal φ_k untuk $k = 1,2,\ldots,N$ menunjukkan suatu fungsi kontinu sedemikian sehingga :

$\ell[\varphi_k] > \lambda(A_k) + \varepsilon$ dan $\varphi_k \ge \chi_{A_k}$.

Karena $f \le \sum_{k=1}^{N} c_k\varphi_k$, diperoleh :

$$\begin{aligned}\ell[f] &\le \sum_{k=1}^{N} c_k\ \ell[\varphi_k] \\ &\le N\varepsilon + \sum_{k=1}^{N} c_k\ \lambda(A_k) \\ &= N\varepsilon + \sum_{k=1}^{N} c_k\ \mu(A_k) \\ &\le N\varepsilon + \max_k(c_k - c_{k-1})\ \mu(X) + \int f(x)\ \mu(dx).\end{aligned}$$

maka :

$$\ell[f] \leq \int f(x)\ \mu(dx) \tag{3.3}$$

untuk fungsi non-negatif $f \in C_x$ sembarang. karena itu :

$$\ell\left[1 - \frac{f}{||f||}\right] \leq \int \left(1 - \frac{f(x)}{||f||}\right) \mu(dx).$$

Karena :

$$\ell[1] = \int \mu(dx) = \mu(X),$$

diperoleh :

$$-\ell[f] \leq -\int f(x)\ \mu(dx). \tag{3.4}$$

Dengan memperbandingkan (3.4) dan (3.3) diperoleh (3.2)untuk fungsi nonnegatif, karenanya berlaku untuk semua $f(x) \in C_x$.

maka untuk sembarang $f(x) \in C_x$:

$$\lim_{k\to\infty} \int f(x)\ \mu_n\ (dx) = \int f(x)\ \mu(dx)$$

Lemma terbukti.

Selanjutnya dengan lemma diatas akan dibuktikan teorema dibawah ini.

Teorema 3.1.

Misalkan X menunjukkan ruang separabel lengkap dan B menunjukkan σ-aljabar dari himpunan Borel. Maka, syarat perlu dan cukup agar barisan ukuran μ_n kompak lemah adalah

a. $\sup_n \mu_n(X) < \infty$

b. Untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat himpunan kompak K sedemikian sehingga : $\sup_n \mu_n(X\backslash K) < \varepsilon$.

Bukti :

Syarat cukup :

Misal dipilih suatu barisan $\{\varepsilon_m\} \longrightarrow 0$ untuk $n \longrightarrow \infty$ dan suatu barisan $\{K^{(m)}\}$ dari himpunan kompak sedemikian sehingga :

$$K^{(m)} \subset K^{(m+1)} \text{ dan } \sup_n \mu_n(X \backslash K^{(m)}) \leq \varepsilon_m$$

Didefinisikan :

$$\mu_n^{(m)}(A) = \mu_n(A \cap K^{(m)})$$

Dipilih sebuah barisan $\{n_k^{(1)}\}$ sedemikian sehingga barisan ukuran $\mu_{n_k^{(1)}}^{(1)}$ konvergen lemah ke ukuran $\mu^{(1)}$. Didefinisikan barisan $\{n_k^j\}$ sedemikian sehingga $\{n_k^j\}$ adalah subbarisan dari $\{n_k^{(j-1)}\}$ dan barisan $\mu_{n_k^{(j)}}^{(j)}$ konvergen lemah ke beberapa ukuran $\mu^{(j)}$. Karena $\mu^{(j)}$ dan $\mu^{(j-1)}$ tepat pada $K^{(j-1)}$, maka :

Var $|\mu^{(j)} - \mu^{(j+p)}| \leq 2\varepsilon_j$. Karenanya barisan $\{\mu^{(j)}\}$ konvergen dalam variasi ke ukuran μ. Akan ditunjukkan bahwa $\mu_{n_k^{(k)}}$ konvergen lemah ke μ. Untuk setiap fungsi kontinu terbatas f bahwa :

$$\overline{\lim_{k \to \infty}} \left| \int f(x)\, \mu_{n_k^{(k)}}(dx) - \int f(x)\, \mu(dx) \right|$$

$$\leq \overline{\lim_{k \to \infty}} \left| \int_{K^{(m)}} f(x)\, \mu_{n_k^{(k)}}(dx) - \int_{K^{(m)}} f(x)\, \mu(dx) \right|$$

$$+ \|f\| (\lim_k \mu_{n^{(k)}}(X - K^{(m)}) + \mu(X - K^{(m)}))$$

$$\leq 2\|f\|\, \varepsilon_m.$$

Syarat perlu :

Jika $\{\mu_n\}$ adalah kompak lemah maka $\int 1 . \mu(dx)$ adalah himpunan kompak dari bilangan riil dan barisan $\{\mu_n(X)\}$

adalah terbatas.

Misalkan barisan $\{\mu_n\}$ adalah kompak lemah yang tidak memenuhi (b) . Catat bahwa (b) ekivalen dengan (b´) : Untuk semua $\varepsilon > 0$ dan $\delta > 0$, terdapat suatu himpunan kompak K sedemikian sehingga

$\mathrm{Sup}_n \ \mu_n(X \backslash K_\delta) < \varepsilon$, diamana K_δ menujukkan himpunan titik-titik x dan jaraknya dari K tidak melebihi δ. Terlihat (b) menyatakan (b´). Misal $K^{(r)}$ menunjukkan suatu himpunan kompak sedemikian sehingga

$\mathrm{Sup}_n \ \mu_n(X \backslash K^{(r)}_{1/r}) \le \varepsilon/2^r$ maka himpunan $\cap_r K^{(r)}_{1/r}$ adalah himpunan kompak yang memenuhi (b). Jika (b´) tidak benar maka terdapat suatu $\varepsilon > 0$ dan $\delta > 0$ sedemikian sehingga $:\mathrm{Sup}_n \mu_n(X \backslash K_\delta) > \varepsilon$ untuk setiap himpunan kompak K.

Misal $K^{(0)}$ menunjukkan suatu himpunan kompak sedemikian sehingga : $\mu_1(X \backslash K^{(0)}) < \varepsilon$. Oleh karena $\mathrm{Sup}_n \mu_n(X \backslash K_\delta{}^{(0)}) > \varepsilon$, terdapat suatu bilangan n_1 sedemikian sehingga : $\mu_{n_1}(X \backslash K_\delta{}^{(0)}) > \varepsilon$; akibatnya terdapat suatu himpunan kompak $K^{(1)}$ sedemikian sehingga : $\mu_{n_1}(K^{(1)}) > \varepsilon$ dan $K^{(1)} \subset X \backslash X_\delta{}^{(0)}$. Oleh karena itu $\mathrm{Sup}_n \ \mu_n(X \backslash K_\delta{}^{(0)} \backslash K_\delta{}^{(1)}) > \varepsilon$, terdapat suatu bilangan n_2 dan suatu himpunan kompak : $K^{(2)} \subset X \backslash K_\delta{}^{(0)} \backslash K_\delta{}^{(1)}$ sedemikian sehingga : $\mu_{n_2}(K^{(2)}) > \varepsilon$. Proses ini diteruskan , kemudian dipilih sebuah barisan dari bilangan n_j dan himpunan kompak $K^{(j)}$ sedemikian sehingga : $\mu_{n_j}(K^{(j)}) > \varepsilon$ dan $K^{(j)} \subset X \backslash \bigcup_{i=0}^{j-1} K_\delta{}^{(i)} = X \backslash [\bigcup_{i=0}^{j-1} K^{(i)}].\delta$. Misal $\chi_i(x)$ menunjukkan suatu fungsi kontinu nonnegatif dari suatu unit terbatas :

$\chi_i(x) = 0$ pada $X \backslash K_{\delta/2}{}^{(i)}$

$= 1$ pada $K^{(1)}$.

Karena jarak diantara dua himpunan kompak dari barisan $K^{(i)}$ paling sedikit adalah δ, maka fungsi $\chi_i(x)$ bukan merupakan simultan tidak nol (nonzero), untuk harga i tunggal. Dipilih dari barisan $\{\mu_{n_j}\}$ suatu konvergen lemah sub barisan $\{\mu_k'\}$. Misalkan sub barisan ini konvergen ke ukuran μ. Karena ukuran μ berhingga dan $\sum_{i=1}^{\infty} \chi_i(x)$ adalah terbatas, diperoleh :

$$\int \sum_{i=1}^{\infty} \chi_i(x)\mu(dx) = \sum_{i=1}^{\infty} \int \chi_i(x)\mu(dx) < \infty$$

karenanya

$$\lim_{p\to\infty} \sum_{i=p}^{\infty} \int \chi_i(x)\mu(dx) = 0.$$

Di sisi lain :

$$\int \sum_{i=p}^{\infty} \chi_i(x)\mu'_k(dx) \geq \mu_{n_{p'}}(K^{(p')}) \geq \varepsilon \;.\; (k = n_{p'})$$

maka k > p, karenanya untuk semua p :

$$\sum_{i=p}^{\infty} \int \chi_i(x)\mu(dx) = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=p}^{\infty} \int \chi_i(x)\mu'_k(dx) \geq \varepsilon.$$

Bukti kontradiksi ini menunjukkan syarat cukup kondisi (b). Ini melengkapi bukti teorema.

Ruang X secara lengkap hanya digunakan pada pembuktian syarat perlu dari teorema. Syarat ini mencukupi untuk sifat kompak lemah dari barisan terukur dalam ruang metrik sembarang. Syarat ini juga diperlukan jika ruang X dapat dipresentasikan sebagai suatu himpunan bagian Borel dari suatu ruang metrik separabel lengkap.

Dengan menggunakan teorema 3.1 dapat ditentukan syarat perlu dan cukup untuk konvergensi lemah suatu barisan dari ukuran pada kasus suatu ruang lengkap X. Karena itu syarat ini mencukupi untuk setiap ruang metrik.

Teorema 3.2.

Barisan ukuran μ_n konvergen lemah ke suatu beberapa ukuran μ, maka syarat perlu dan cukupnya adalah barisan $\{\mu_n\}$ kompak lemah dan $\mu_n(A) \longrightarrow \mu(A)$ untuk semua A dalam aljabar B_o sedemikian sehingga : $\sigma(B_o) = B$.

Bukti :

Syarat perlu :

Setiap barisan konvergen adalah kompak lemah. Diambil himpunan sembarang $A \in B$. $A^{(o)}$ menunjukkan interior (yaitu himpunan titik interior dari A), dan [A] menunjukkan closure. Jika $\{\mu_n\}$ konvergen lemah ke μ, maka dengan memilih suatu fungsi kontinu $f(x)$ sedemikian sehingga $f(x)=1$ untuk $x \in [A]$ dan $\mu([A]) \geq \int f(x)\mu(dx) -\varepsilon$ diperoleh $\mu([A]) \geq \int f(x)\mu(dx) -\varepsilon$

$$= \lim \int f(x)\mu(dx) -\varepsilon$$

$$\geq \overline{\lim}\, \mu_n(A) -\varepsilon$$

Artinya,

$\overline{\lim}\, \mu_n(A) \leq \mu([A])$

$\overline{\lim}\, \mu_n(X\backslash A) \leq \mu([X\backslash A])$; $-\underline{\lim}\, \mu_n(A) \leq -$ (A).

Karena itu :

$\mu(A^{(o)}) \leq \underline{\lim}\, \mu(A) \leq \overline{\lim}\, \mu(A) \leq \mu([A])$.

Selanjutnya untuk semua himpunan A sedemikian sehingga $\mu([A]\backslash A^o) = \mu(A') = 0$ dimana A' adalah boundary dari himpunan A, $\lim_{n\to\infty} \mu_n(A) = \mu(A)$.

Misal B_o menunjukkkan koleksi himpunan A sedemikian sehingga : $\mu(A') = 0$. Terlihat B_o adalah suatu aljabar dari himpunan-himpunan. Akan ditunjukkan bahwa $\sigma(B_o) = B_o$. Semua bola S_x dengan titik pusat x untuk contabelnya diperoleh : $\mu(S'_x) > 0$. Jadi $\sigma(B_o)$ memuat semua bola dan semua himpunan Borel oleh karena aljabar dari himpunan Borel adalah suatu σ-aljabar minimal yang memuat semua bola.

Syarat cukup :

Dipilih sembarang subbarisan $\{\mu_{n_k}\}$ konvergen lemah dari barisan $\{\mu_n\}$. Misal $\bar{\mu}$ menunjukkan limit subbarisan dan akan ditunjukkan $\mu = \bar{\mu}$. Misalkan $A \in B_o$ maka seperti ditunjukkan dalam syarat perlu,

$$\bar{\mu}(A^{(o)}) \le \underline{\lim}\ \mu_{n_k}(A)$$

$$\le \overline{\lim}\ \mu_{n_k}(A)$$

$$\le \bar{\mu}\ ([A]).$$

Dalam hipotesa $\lim \mu_{n_k}(A) = \mu(A)$. Karenanya untuk semua himpunan dalam B_o berlaku :

$$\bar{\mu}(A^{(o)}) \le \mu(A) \le \bar{\mu}([A]). \tag{3.5}$$

Misal $\{A_n\}$ menunjukkan himpunan barisan monoton sembarang yang memenuhi pertidaksamaan (3.5). Karena,

$$(\cup A_n)^{(o)} = \cup A_n^{(o)}, \qquad (\cap A_n)^{(o)} \subset \cap A_n^{(o)}$$

$$[\cup A_n] \subset \cup [A_n], \qquad [\cap A_n] = \cap [A_n]$$

Pertidaksamaan (3.5) juga dipenuhi untuk limit dari barisan himpunan A_n. Koleksi himpunan B_1 yang memenuhi pertidaksamaan (3.5) adalah suatu kelas monoton memuat aljabar B_o. Artinya himpunan ini memuat $\sigma(B_o) = B$. Karena itu pertidaksamaan (3.5) benar untuk semua himpunan $A \in B$.

Misal B_2 menunjukkan koleksi himpunan A sedemikian sehingga $\bar{\mu}(A') = 0$. Karena $\bar{\mu}(A^{(o)}) = \bar{\mu}([A]) = \mu(A)$, maka $\mu(A) = \bar{\mu}(A)$ untuk semua $A \in B_2$.

Relasi $\bar{\mu}(A) = \mu(A)$ juga dipenuhi oleh σ-aljabar minimal $\sigma(B_2)$ yang memuat B_2. Seperti ditunjukkan dalam bukti syarat perlu dari teorema, $\sigma(B_2) = B$. Jadi ukuran $\mu=\bar{\mu}$. Bahwa barisan $\{\mu_n\}$ adalah barisan kompak lemah dengan suatu limit tunggal ukuran μ. Maka barisan $\{\mu_n\}$ konvergen lemah ke μ.

Akibat 3.1.

Misalkan bahwa ukuran μ_n yang berhubungan dengan proses $\xi_n(t)$ dan ukuran μ berhubungan dengan proses $\xi(t)$. Maka relasi $\mu_n \Rightarrow \mu$ pada $n \longrightarrow \infty$ menyatakan bahwa barisan distribusi $\{f(\xi_n(t)\}$ konvergen ke distribusi $f\{\xi(t)\}$ untuk semua $\mathcal{B}$-terukur fungsi f yang hampir kontinu dimana-mana terhadap ukuran μ.

Bukti :

Misal A_o menunjukkan himpunan titik-titik diskontinu dari f. Maka $\mu(A_o) = 0$. Misal G_α menunjukkan himpunan x sedemikian sehingga : $\{f(x) < \alpha\}$ dan G_α' menunjukkan boundary dari himpunan G_α.

$$G_\alpha' = [\{ x ; f(x) < \alpha \}] \cap [\{ x ; f(x) \geq \alpha \}]$$

Interseksi himpunan G_α' dan G_{α_1}' untuk $\alpha < \alpha_1$ adalah termuat didalam interseksi himpunan :

$$[\{ x ; f(x) < \alpha \}] \cap [\{ x ; f(x) \geq \alpha_1 \}]$$

karena itu untuk $x \in G_\alpha' \cap G_{\alpha_1}'$ menyatakan :

$$\lim_{y \to x} \inf f(y) \leq \alpha_1, \lim_{y \to x} \sup f(y) > \alpha_1$$

dan

$$G_{\alpha}' \cap G_{\alpha_1}' \subset A_0$$

Jadi $\mu(G_{\alpha}' \cap G_{\alpha}') = 0$. Karena itu untuk barisan $\{\alpha_k\}$ sembarang,

$$\mu(\bigcup_k G_{\alpha_k}') = \sum_k \mu(G_{\alpha_k}')$$

Maka himpunan dari bilangan α sedemikian sehingga $\mu(G_{\alpha}') \neq 0$ adalah tidak terhitung (uncontabel). Karena itu untuk semua α, kecuali beberapa harga contabel yang mungkin, himpunan G_{α} adalah himpunan dari kekontinuan ukuran μ, maka $\mu_n(G_{\alpha}) \longrightarrow \mu(G_{\alpha})$ atau :

$P\{f(\xi_n(t) < \alpha\} \longrightarrow P\{ f(\xi(t) < \alpha \}$ pada $n \longrightarrow \infty$