BAB II

TEORI UKURAN DALAM RUANG PROBABILITAS

Didefinisikan himpunan U dan klas $\mathfrak{S}$ dari himpunan bagian U sehingga setiap event *A* dapat diartikan sebagai beberapa himpunan bagian dari himpunan U yang berada dalam $\mathfrak{S}$. Sembarang event *A* dapat diartikan sebagai gabungan dari elemen - elemen U yang berada dalam *A*. Titik - titik dalam U disebut event - event elementer dan U disebut ruang dari event - event elementer. Sebagai contoh, jika suatu eksperimen memuat gambaran grafik dari fungsi random kontinu dalam interval tertentu dari waktu [a,b], maka U dapat diartikan sebagai ruang dari fungsi kontinu pada interval [a,b].

2.1. Ukuran.

U menunjukkan suatu himpunan abstrak, yang disebut dengan ruang. Dimisalkan bahwa definisi dan sifat-sifat sederhana dari operasi aljabar dalam himpunan diketahui dan dinyatakan hubungan dualitas :

$$\overline{\cap_k A_k} = \cup_k \overline{A}_k \qquad (2.1)$$

$$\overline{\cup_k A_k} = \cap_k \overline{A}_k \qquad (2.2)$$

dimana indeks k berada dalam sembarang himpunan-himpunan yang mempunyai harga.

Definisi 2.1.1

Suatu kelas tidak kosong $\mathcal{R}$ dari himpunan-himpunan bagian

$\mathcal{U}$ disebut suatu aljabar dari himpunan-himpunan U jika memiliki sifat-sifat sebagai berikut :

a. $A \in \mathcal{R}$ dan $B \in \mathcal{R}$ maka $A \cup B \in \mathcal{R}$.

b. $A \in \mathcal{R}$ maka $\bar{A} \in \mathcal{R}$.

Akibat sederhana dari definisi : karena $A \cup \bar{A}$, dan $A \in \mathcal{R}$ maka $U \in \mathcal{R}$. Hal ini berarti bahwa himpunan kosong berada dalam himpunan-himpunan aljabar. Jika $A \in \mathcal{R}$ dan $B \in \mathcal{R}$, maka berdasarkan (2.1) dan (2.2) $A \cap B = \overline{(\bar{A} \cup \bar{B})} \in \mathcal{R}$ dan $A \setminus B = A \cap \bar{B} \in \mathcal{R}$.

Definisi 2.1.2.

Suatu aljabar dari himpunan-himpunan $\mathfrak{S}$ disebut suatu σ-aljabar jika untuk sembarang barisan dari himpunan-himpunan $A_k \in \mathfrak{S}$, dimana $k = 1,2,\ldots,\cup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{S}$. Himpunan-himpunan $A \in \mathfrak{S}$ disebut $\mathfrak{S}$-terukur. (Karena $\cap_{k=1}^{\infty} A_k = \overline{\cup_{k=1}^{\infty} \bar{A}_k}$, maka interseksi dari sembarang gabungan dari himpunan-himpunan countable yang berada dalam $\mathfrak{S}$ juga berada dalam $\mathfrak{S}$).

Definisi 2.1.3.

Suatu himpunan fungsi W disebut additif, jika dianggap harga-harga tak berhingga dan jika untuk sembarang barisan berhingga dari himpunan-himpunan $A_k \in \mathcal{A}$ (untuk k = 1,2,...,n) adalah pasangan terpisah (yaitu : $A_k \cap A_r = \emptyset$), untuk $k \neq r$ dimana $k,r = 1,2,\ldots,n$ dan $\emptyset$ adalah himpunan kosong) sedemikian sehingga :

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}$$

sehingga didapat :

$$W(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} W(A_k) \qquad (2.3)$$

Jika persamaan (2.3) untuk sembarang gabungan yang countable, yaitu jika :

$$W(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} W(A_k)$$

untuk sembarang barisan dari himpunan-himpunan $A_k \in \mathscr{A}$, dimana $A_k \cap A_r = \emptyset$ bila $k \neq r$, untuk $k,r = 1,2,\ldots,n,\ldots$ sedemikian sehingga :

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathscr{A}$$

maka himpunan fungsi $W = W(A)$ disebut additif countable.

Definisi 2.1.4.

Suatu fungsi himpunan additif countable nonnegatif $\mu = \mu(A)$ didefinisikan dalam suatu σ-aljabar dari himpunan-himpunan $\mathfrak{S}$ dan memenuhi persamaan $\mu(\emptyset) = 0$ disebut dengan suatu ukuran.

Jika suatu σ-aljabar dari himpunan-himpunan $\mathfrak{S}$ didefinisikan dalam suatu himpunan U disebut dengan suatu ruang ukuran $\{U, \mathfrak{S}, \mu\}$ atau suatu ruang terukur.

Dalam masalah khusus, jika U merupakan ruang sampel dan jika P menunjukkan suatu ukuran yang didefinisikan dalam $\mathfrak{S}$ sedemikian sehingga P (U) = 1, maka tripel $\{U,\mathfrak{S},P\}$ disebut dengan suatu ruang probabilitas.

Beberapa sifat ukuran yang berlaku dalam ruang probabilitas, yaitu :

a. Jika $A \subset B$ maka : $P(A) \leq P(B)$.

b. Jika $\{A_n\}$ adalah suatu himpunan berhingga atau countabel dari pasangan event-event terpisah, maka

$P(\cup_n A_n) = \Sigma_n P(A_n)$

c. Jika $\{A_n\}$ suatu barisan naik dari event-event yaitu jika A_n berada dalam A_{n+1} maka :

$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n)$

Jika $\{A_n\}$ suatu barisan turun dari event-event yaitu jika A_{n+1} berada dalam A_n maka

$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\cap_{n=1}^{\infty} A_n)$.

Definisi 2.1.5

Misal $\{A_n\}$ untuk n = 1,2,... menunjukkan suatu barisan tak berhingga dari himpunan-himpunan. Limit superior $\overline{\text{Lim}}\ A_n$ dari barisan $\{A_n\}$ didefinisikan sebagai himpunan yang memuat titik-titik dari U yang berada dalam ketakberhinggaan dari himpunan-himpunan A_n. Limit inferior $\underline{\text{Lim}}\ A_n$ dari barisan $\{A_n\}$ didefinisikan sebagai semua himpunan dari titik-titik ruang U yang berada dalam semua himpunan-himpunan A_n untuk n = 1,2,... .

Kemudian

$$\overline{\text{Lim}}\ A_n = \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k \qquad (2.4)$$

$$\underline{\text{Lim}}\ A_n = \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} A_k \qquad (2.5)$$

Jika $\{A_n\}$ untuk n = 1,2,... adalah suatu barisan naik maka

$\overline{\text{Lim}}\ A_n = \underline{\text{Lim}}\ A_n = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$

Disisi lain, jika $\{A_n\}$ adalah suatu barisan turun, maka :

$\overline{\text{Lim}}\ A_n = \underline{\text{Lim}}\ A_n = \cap_{n=1}^{\infty} A_n$

Dari (2.4) dan (2.5) limit-limit superior dan inferior

Dari (2.4) dan (2.5) limit-limit superior dan inferior dari barisan himpunan-himpunan berada dalam σ-aljabar $\mathfrak{S}$.

Definisi 2.1.6.

Suatu barisan dari himpunan-himpunan $\{A_n\}$ untuk $n = 1,2,...$ dikatakan konvergen jika $\overline{\text{Lim}}\ A_n = \underline{\text{Lim}}\ A_n$. Harga bersama limit superior dan limit inferior dari barisan $\{A_n\}$ disebut dengan limit dari barisan $\{A_n\}$:

$\lim = A_n = \overline{\text{Lim}}\ A_n = \underline{\text{Lim}}\ A_n$.

2.2. Fungsi-Fungsi Terukur

Suatu variabel random ξ adalah suatu bilangan (variabel) yang berkorespondensi dengan tiap-tiap keluaran yang mungkin dari sebuah eksperimen. Karena keluaran-keluaran (outcome) dari suatu eksperimen digambarkan oleh kejadian-kejadian elementer, suatu variabel random dapat digambarkan sebagai suatu fungsi dari suatu kejadian elementer, $\xi = f(u)$ untuk $u \in U$. Disisi lain, dalam teori probabilitas dasar, suatu variabel ramdom ξ dikarekterisasikan oleh fungsi distribusi :

$$F(x) = P\{\ \xi < x\ \}$$

Sedangkan dalam teori ukuran pengertian kejadian $\{\ \xi < x\ \}$ ditunjukkan dengan $\{u,\ f(u) < x\ \}$. Dalam membahas fungsi distribusi dari sebuah variabel random, maka himpunan $\{u, f(u) < x\}$ harus untuk sembarang harga x riil yang berada dalam $\mathfrak{S}$.

Definisi 2.2.1.

$\mathfrak{S}$ menunjukkan suatu σ-aljabar dari himpunan -himpunan ruang U. Diambil $f(u)$ menunjukkan suatu fungsi yang didefinisikan pada suatu himpunan $\mathfrak{S}$-terukur M dan mengasumsikan harga-harga riil (dan kemungkinan harga-harganya $\pm \infty$). Sehingga suatu fungsi $f(u)$ dikatakan $\mathfrak{S}$-terukur jika setiap harga riil x, himpunan $\{u,\ f(u) < x\}$ adalah $\mathfrak{S}$-terukur.

Definisi 2.2.2.

Fungsi $f(x)$ untuk $x \in \mathcal{R}$ dikatakan sebagai suatu fungsi Borel jika untuk sembarang riil a himpunan $\{x,\ f(x) < a\}$ adalah suatu himpunan Borel.

Teorema 2.2.1

A menunjukkan sembarang himpunan Borel dalam ruang E_n dimensi-n dan $f_1(u),\ldots,\ f_n(u)$ menunjukkan fungsi $\mathfrak{S}$-terukur yang semuanya didefinisikan dalam beberapa himpunan $M \in \mathfrak{S}$ maka himpunan :

$$\{u\ ;\ u \in M, (f_1(u), \ldots,\ f_n(u)) \in A\}$$

adalah $\mathfrak{S}$-terukur.

Bukti :

Karena :

$$\{u\ ;\ u \in M, (f_1(u), \ldots,\ f_n(u)) \in A' \backslash A''\}$$
$$= \{u\ ;\ u \in M, (f_1(u), \ldots,\ f_n(u)) \in A'\} \backslash$$
$$\{u\ ;\ u \in M, (f_1(u), \ldots,\ f_n(u)) \in A''\}$$

$$\{u\ ;\ u\in M, (f_1(u),\ldots, f_n(u)) \in \bigcup_{k=1}^{\infty} A^{(k)}\}$$
$$= \bigcup_{k=1}^{\infty} \{u\ ;\ u\in M, (f_1(u),\ldots, f_n(u)) \in A^{(k)}\}.$$

Kelas $\mathscr{A}$ dari himpunan-himpunan A yang termuat dalam E_n sedemikian sehingga himpunan :

$$\{u\ ;\ u\in M, (f_1(u),\ldots, f_n(u)) \in A\}$$

adalah $\mathfrak{S}$-terukur yang merupakan suatu σ-aljabar. $\mathscr{A}$ berisi interval tak berhingga dimensi-n.

$$I_{a_1,\ldots,a_n} = \{(x_1,\ldots,x_n);\ x_1<a_1,\ldots,x_n<a_n\}$$

Karena :

$$\{u\ ;\ u\in M, (f_1(u),\ldots, f_n(u)) \in I_{a_1,\ldots,a_n}\}$$
$$= \bigcap_{k=1}^{\infty}\{u\ ;\ u\in M, (f_k(u) < a_k\}$$

Akibatnya berisi semua himpunan Borel dalam E_n.

Teorema 2.2.2.

$f_1(u),\ldots,\ f_n(u)$ menunjukkan suatu barisan dari fungsi-fungsi $\mathfrak{S}$-terukur berhingga yang didefinisikan dalam suatu himpunan $\mathfrak{S}$-terukur M dan $\varphi(t_1,\ldots,t_n)$ menunjukkan suatu fungsi Borel dalam ruang E_n dimensi-n. Maka fungsi $\varphi(f_1(u),\ldots,\ f_n(u))$ untuk $u \in M$ adalah $\mathfrak{S}$-terukur.

Bukti :

Untuk sembarang riil a, himpunan :

$$B_\alpha = \{(t_1,\ldots,t_n)\ ;\ \varphi(t_1,\ldots,t_n) < a\}$$

adalah suatu himpunan bagian dari E_n. Himpunan :

$$\{u\ ;\ u\in M,\ \varphi(f_1(u),\ldots, f_n(u)) < a\}$$
$$= \{u\ ;\ u\in M, (f_1(u),\ldots, f_n(u)) \in B_\alpha\}$$

adalah $\mathfrak{S}$-terukur, dengan dasar teorema 2.2.1., maka teorema terbukti.

2.3. Kekonvergenan Dalam Ukuran

Barisan dari variabel random ξ_n dikatakan konvergen dalam probanilitas ke suatu variabel random ξ jika untuk sembarang $\varepsilon > 0$, $P\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\} \longrightarrow 0$ untuk $n \longrightarrow \infty$, dan dapat ditulis dengan : $\xi = P - \lim \xi_n$.

Selanjutnya akan diberikan definisi dari fungsi: $\{U, \mathfrak{S}, \mu\}$ menunjukkan suatu ruang terukur dan $\{f_n(u)\}$ untuk $n = 1, 2, \ldots$ menunjukkan suatu barisan dari fungsi-fungsi $\mathfrak{S}$-terukur yang berhingga, μ hampir dimana-mana dalam U.

Definisi 2.3.1.

Suatu barisan dikatakan konvergen dalam ukuran μ untuk suutu fungsi $\mathfrak{S}$-terukur $f(u)$, jika untuk sembarang $\varepsilon > 0$, $\mu\{u; |f_n(u) - f(u)| > \varepsilon\} \longrightarrow 0$ dimana $n \longrightarrow \infty$, maka dapat ditulis $f(u) = \mu - \lim f_n(u)$.

Selanjutnya $\{f_n(u)\}$ untuk $n = 1, 2, \ldots$ menunjukkan suatu barisan dari fungsi-fungsi $\mathfrak{S}$-terukur yang berhingga (mod μ) dalam U. S menunjukkan himpunan titik-titik dari U yang mana barisan $\{f_n(u)\}$ konvergen ke suatu limit berhingga dan D menunjukkan himpunan titik-titik dimana barisan ini divergen, maka :

$$S = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} \{u; |f_n(u) - f_{n+m}(u)| < 1/k\}$$

$$D = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \{u; |f_n(u) - f_{n+m}(u)| \geq 1/k\}.$$

S dan D adalah $\mathfrak{S}$-terukur.

Definisi 2.3.2.

Suatu barisan $f_n(u)$, untuk $n = 1,2,\ldots.$ dikatakan konvergen hampir seragam dalam U, jika untuk sembarang $\varepsilon>0$ ada suatu himpunan H sedemikian sehingga $\mu(H) < \varepsilon$ dan barisan $\{f_n(u)\}$ konvergen seragam dalam U\H.

Definisi 2.3.3.

Suatu barisan $\{f_n(u)\}$ dari fungsi-fungsi $\mathfrak{S}$-terukur berhingga dikatakan fundamental dalam ukuran μ jika untuk sembarang $\varepsilon>0$, $\mu\{u;|f_n(u) - f_m(u)| >\varepsilon\} \longrightarrow 0$ untuk $n,m \longrightarrow\infty$

Teorema 2.3.1

Jika suatu barisan $\{f_n(u)\}$ dari fungsi-fungsi $\mathfrak{S}$-terukur berhingga (mod μ) adalah fundamental dalam ukuran μ maka memuat suatu himpunan bagian yang konvergen hampir seragam $\{f_{n_k}(u)\}$, untuk $n = 1,2,\ldots$

Bukti :

Tentukan sebuah n_k sedemikian sehingga :

$\mu\{u;|f_n(u) - f_m(u)| >1/2^k\}<1/2^k$

untuk $n,m \geq n_k$. Misalkan bahwa barisan $\{n_k\}$ adalah suatu barisan naik. Dan misalkan bahwa :

$E_k = \mu\{u;|f_{n_k}(u) - f_{n_{k+1}}(u)| >1/2^k\}$

Maka jika $u \notin \cup_{j=k}^{\infty} E_j$ dan $i,j \geq k$ (untuk $i<j$), selanjutnya

$$|f_{n_i}(u) - f_{n_j}(u)|$$

$$\leq |f_{n_i}(u) - f_{n_{i+1}}(u)| + |f_{n_{i+1}}(u) - f_{n_{i+2}}(u)| + \dots$$

$$+ |f_{n_{j-1}}(u) - f_{n_j}(u)|$$

$$\leq 1/2^{i} + 1/2^{i+1} + 1/2^{i+2} + \dots + 1/2^{j-1} \leq 1/2^{i-1}$$

Sehingga barisan $\{f_n(u)\}$ konvergen seragam dalam himpunan $U \backslash H_k$, dimana $H_k = \cup_{j=k}^{\infty} E_j$ dan $\mu(H_k) \leq \sum_{j=k}^{\infty} \mu(E_j) \leq 2^{1-k}$, dengan kata lain barisan $\{f_n(u)\}$ konvergen hampir seragam dalam U. Dengan demikian teorema terbukti.

Teorema 2.3.2.

Syarat perlu dan cukup untuk suatu barisan $\{f_n(u)\}$ konvergen dalam ukuran μ bila barisan tersebut suatu barisan fundamental dalam ukuran μ.

Bukti :

Syarat perlu :

Jika $\{f_n(u)\}$ konvergen dalam ukuran ke fungsi $f(u)$, maka berlaku :

$$\mu\{u; |f_n(u) - f_m(u)| > \varepsilon\}$$

$$\leq \mu\{u; |f_n(u) - f(u)| > \varepsilon/2\} + \mu\{u; |f(u) - f_m(u)| > \varepsilon/2\} \longrightarrow 0$$

untuk $n,m \longrightarrow \infty$.

Syarat cukup :

Jika suatu barisan $\{f_n(u)\}$ adalah fundamental dalam ukuran, berdasarkan teorema memuat sebuah himpunan bagian $\{f_n(u)\}$ yang konvergen untuk beberapa fungsi $\mathfrak{S}$-terukur yang berhingga (mod μ) $f(u)$. Maka berlaku :

$\mu\{u; |f(u) - f_n(u)| > \varepsilon\}$

$\leq \mu\{u; |f(u) - f_{n_k}(u)| > \varepsilon/2\} + \mu\{u; |f_n(u) - f_n(u)| > \varepsilon/2\}$.

berdasarkan pilihan dari barisan $\{f_{n_k}(u)\}$, bentuk pertama dalam ruas kanan dari pertidaksamaan mendekati nol untuk $k \longrightarrow \infty$ dan bentuk kedua mendekati nol untuk $k,n \longrightarrow \infty$, terlihat $\{f_n(u)\}$ adalah fundamental dalam ukuran.

Teorema terbukti.

Selanjutnya jika $\{\xi_n\}$ menunjukkan suatu barisan dari variabel-variabel random. Dan didefinisikan suatu event S yang berarti bahwa barisan $\{\xi_n\}$ konvergen ke suatu limit berhingga dan didefinisikan P(S) adalah probabilitas event tersebut, maka diperoleh difinisi sebagai berikut :

Definisi 2.3.4.

Jika P(S) = 1 maka barisan fungsi-fungsi $\xi_n = f_n(u)$ konvergen hampir dimana-mana dan dikatakan bahwa barisan $\{\xi_n\}$ konvergen hampir tertentu (atau bahwa $\{\xi_n\}$ konvergen dengan probabilitas 1)

Definisi 2.3.5.

Jika suatu variabel random ξ sedemikian sehingga

$p\,\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\} \longrightarrow 0$ untuk sembarang $\varepsilon > 0$, maka barisan $\{\xi_n\}$ dikatakan konvergen dalam probabilitas ke variabel random ξ, yaitu jika : $\xi = P - \lim \xi_n$.

2.4. Integral Dalam Ukuran.

Dalam teori probabilitas, ditentukan suatu variabel random ξ, suatu harga khusus $E\xi$ yang dikenal sebagai ekspektasi matematika dari ξ. Jika variabel random ξ diasumsikan sebagai beberapa harga berhingga $x_1,\ldots,x_n$, ekspekstasi matematika diberikan dengan :

$$E\,\xi = \Sigma_{i=1} x_i P\{\xi = x_i\}$$

yang memiliki sifat-sifat berikut :

$$E\,(a\xi + b\eta) = aE\xi + bE\eta$$

dan pertidaksamaan $\xi \le \eta$ berarti $E\xi < E\eta$.

Jika variabel random diubah kesembarang fungsi yang didefinisikan dalam ruang terukur, konsep dari ekspektasi matematika menjadi konsep suatu integral. Diasumsikan suatu ruang terukur $\{U,\mathfrak{S},\mu\}$ dan bahwa semua fungsi-fungsi adalah $\mathfrak{S}$-terukur.

Definisi 2.4.1.

Integral :

$$E\xi = \int_u f(u)\,\mu(du), \text{ dengan } \xi = f(u)$$

disebut dengan Ekspektasi matematika dari variabel random ξ dan dinotasikan dengan $E\xi$.

Berikut adalah sifat-sifat sederhana dari integral fungsi sederhana :

$$\text{jika } f(u) \geq 0 \text{ berarti : } \int_u f(u)\,\mu(du) \geq 0$$

$$\int_u k\, f(u)\,\mu(du) = k\int_u f(u)\,\mu(du)$$

dimana k adalah sembarang konstanta.

Selanjutnya akan dibahas teorema-teorema perubahan limit.

Teorema 2.4.1. (Lebesque) .

Misalkan $\{f_n(u)\}$ adalah suatu barisan tidak turun dari fungsi-fungsi $\mathfrak{S}$-terukur nonnegatif. Didefinisikan bahwa :

$$f(u) = \text{Lim } f_n(u) \text{ (mod } \mu)$$

maka $\text{Lim} \int_u f_n(u)\ \mu(du) = \int_u f(u)\ \mu(du)$

Bukti :

Untuk tiap-tiap n, $\{g_{nk}(u)\}$ menunjukkan suatu barisan tidak turun dari fungsi-fungsi sederhana nonnegatif yang konvergen ke $f_n(u)$

$$\lim_{k\to\infty} g_{nk}(u) = f_n(u)$$

dan didefinisikan $h_n(u) = \max_{i\le n} g_{in}(u)$

Karena $g_{in}(u) \le f_i(u)$, maka diperoleh :

$$h_n(u) \le \max_{i\le n} f_i(u) = f_n(u)$$

dan

$$\text{Lim } h_n(u) \le \text{Lim } f_n(u) = f(u) \qquad (2.6)$$

barisan $\{h_n(u)\}$ adalah barisan tidak turun, yang terdiri dari fungsi-fungsi sederhana untuk semua k

$$\lim_{n\to\infty} h_n(u) \ge \lim_{n\to\infty} g_{nk}(u) = f_k(u)$$

Akibatnya :

$$\lim_{n\to\infty} h_n(u) \ge \lim_{k\to\infty} f_k(u) = f(u)$$

Berdasarkan (2.6) diperoleh :

$$f(u) = \lim_{n\to\infty} h_n(u)$$

Dari definisi integral dan formula (2.6), maka :

$$\int_u f(u)\ \mu(du) = \text{Lim}\int_u h_n(u)\ \mu(du) \le \text{Lim}\int_u f_n(u)\mu du) \qquad (2.7)$$

disisi lain :

$$f_n(u) = \lim_{n\to\infty} g_{nk}(u) \leq \lim_{n\to\infty} h_n(u) = f(u)$$

$$f_n(u) \leq f(u)$$

sehingga :

$$\int_u f_n(u)\ \mu(du) \leq \int_u f(u)\ \mu(du) \qquad (2.8)$$

dari pertidaksamaan (2.7) dan (2.8) dapat diambil kesimpulan :

$$\int_u f_n(u)\ \mu(du) = \int_u f(u)\ \mu(du)$$

sehingga teorema terbukti.

Dari teorema 2.4.1, jika $E\xi = \int_u f(u)\ \mu(du)$ maka berlaku sifat :

$$E \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k = \sum_{k=1}^{\infty} E\xi_k$$