BAB III

EKSPEKTASI INTEGRAL LEBESGUE PADA VARIABEL RANDOM

Dalam Ruang Probabilitas $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ yang berhingga dan $\xi = \xi(\omega)$ adalah variabel random yang sederhana atau dinotasikan sebagai :

$$\xi(\omega) = \sum_{k=1}^{n} X_k \, I_{A_k}(\omega)$$

Sedangkan $E\xi$ adalah ekspektasi dari variabel random yang didefinisikan sebagai :

$$E\xi = \sum_{k=1}^{n} X_k \, P(A_k)$$

yang sifat-sifatnya sudah disebutkan pada bab II .

Pada bagian ini akan disajikan mengenai definisi dan sifat-sifat dari ekspektasi integral lebesgue $E\xi$ pada variabel random yang konvergen ke ruang probabilitas .

Sehubungan dengan ukuran probabilitas Ekspektasi Integral Lebesgue dapat dinotasikan sebagai

$$\int_{\Omega} \xi(\omega) \, P(d\omega) \quad \text{atau} \quad \int_{\Omega} \xi \, dP$$

3.1 *EKSPEKTASI INTEGRAL LEBESGUE*

Diberikan $\xi = \xi(\omega)$ variabel random non negatif, dan dibentuk barisan variabel random non negatif $\{\xi_n\}_{n\geq 1}$ sedemikian sehingga $\xi_n(\omega) \uparrow \xi(\omega)$, $n \to \infty$. Karena $E\xi_n \leq E\xi_{n+1}$ sehingga $\lim\limits_{n\to\infty} E\xi_n$ ada.

Definisi 3.1.1

Ekspektasi Integral Lebesgue dari variabel random non negatif $\xi = \xi(\omega)$ adalah

$$E\xi = \lim_{n\to\infty} E\,\xi_n$$

Untuk menunjukkan bahwa definisinya tetap, akan diperlihatkan bahwa limitnya tidak bergantung dari pilihan barisan pendekatan $\{\xi_n\}$. Dengan kata lain akan ditunjukkan bahwa jika $\xi_n \uparrow \xi$ dan $\eta_m \uparrow \xi$ dengan η_m adalah barisan dari variabel-variabel random maka

$$\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} E\xi_n = \operatorname*{Lim}_{m\to\infty} E\eta_m$$

Lemma 3.1.1

Diberikan η dan ξ_n adalah variabel-variabel random sederhana, $n \geq 1$ dan $\xi_n \uparrow \xi \geq \eta$ maka $\lim\limits_{n\to\infty} E\xi_n \geq E\eta$

Bukti :

Diberikan $\varepsilon > 0$ dan $A_n = \{\omega : \xi_n \geq \eta - \varepsilon\}$ untuk ε yang besar maka jelas bahwa $A_n \uparrow \Omega$ dan $\xi_n = \xi_n I_{A_n} + \xi_n I_{\bar{A}_n} \geq$

$\xi_n I_{A_n} \geq (\eta - \varepsilon) I_{A_n}$

Oleh karena itu dari sifat ekspektasi yaitu jika $\xi \geq \eta$ maka $E\xi \geq E_\eta$ (sifat ke-3 dari ekspektasi pada Bab II) diperoleh bahwa :

$$\begin{aligned} E\xi_n \geq E(\eta - \varepsilon) I_{A_n} &= E\eta\, I_{A_n} - \varepsilon P(A_n) \\ &= E\eta - E\eta\, I_{\bar{A}_n} - \varepsilon P(A_n) \\ &\geq E\eta - CP(\bar{A}_n) - \varepsilon \end{aligned}$$

dengan $C = \text{mak}_\omega\ \eta(\omega)$. Dan karena ε sembarang terpenuhilah ketidaksamaan $\lim\limits_{n\to\infty} E\xi_n \geq E\eta$.

Dari lemma ini maka didapatkan :

$\lim\limits_{n\to\infty} E\xi_n \geq \lim\limits_{m\to\infty} E\eta_m$ dan dengan cara yang sama maka

$\lim\limits_{m\to\infty} E\eta_m \geq \lim\limits_{n\to\infty} E\xi_n$

Lemma 3.1.2

Diberikan ξ dan η_m adalah variabel-variabel random sederhana, $m \geq 1$ dan $\eta_m \uparrow \xi \geq \xi$ maka $\lim\limits_{n\to\infty} E\eta_m \geq E\xi$

Bukti :

Diberikan $\varepsilon > 0$ dan $A_n = \{\omega : \eta_m \geq \xi - \varepsilon\}$ untuk ε yang besar maka jelas bahwa $A_n \uparrow \Omega$ dan $\eta_m = \eta_m I_{A_n} + \eta_m I_{\bar{A}_n} \geq \eta_m I_{A_n} \geq (\xi - \varepsilon) I_{A_n}$

Oleh karena itu dari sifat ekspektasi yaitu jika $\xi \geq \eta$ maka $E\xi \geq E_\eta$ (sifat ke-3 dari ekspektasi pada Bab II) diperoleh bahwa :

$$E\eta_m \geq E(\xi - \varepsilon)\, I_{A_n} = E\xi\, I_{A_n} - \varepsilon P(A_n)$$
$$= E\xi - E\xi\, I_{\bar{A}_n} - \varepsilon P(A_n)$$
$$\geq E\xi - CP(\bar{A}_n) - \varepsilon$$

dengan $C = \text{mak}_\omega\ \xi(\omega)$. Dan karena ε sembarang terpenuhilah ketidaksamaan $\lim_{n\to\infty} E\eta_m \geq E\xi$.

Dari kedua lemma diatas yaitu lemma 3.1.1 dan lemma 3.1.2 yang menyatakan bahwa :

$$\lim_{n\to\infty} E\xi_n \geq E\eta \quad \text{dan} \quad \lim_{n\to\infty} E\eta_m \geq E\xi$$

maka membuktikan bahwa $\text{Lim}_{n\to\infty} E\xi_n = \text{Lim}_{m\to\infty} E\eta_m$. Jadi ekspektasi Integral Lebesgue terdefinisi jelas untuk variabel acak non negatif.

Dibawah ini selanjutnya dibahas dalam kasus umum. Diberikan ξ adalah variabel acak dan $\xi^+ = \text{mak}\ (\xi, 0)$, $\xi^- = \min\ (\xi, 0)$.

Definisi 3.1.2

Ekspektasi $E\xi$ dari variabel random ξ ada atau didefinisikan, jika setidaknya satu dari $E\xi^+$ dan $E\xi^-$ adalah berhingga

$$\min\ (E\xi^+, E\xi^-) < \infty$$

Dalam kasus umum ini didefinisikan bahwa :

$$E\xi \equiv E\xi^+ - E\xi^-$$

Ekspektasinya $E\xi$ juga disebut Ekspektasi Integral Lebesgue (dari fungsi berkaitan dengan ukuran probabilitas P).

Definisi 3.1.3

Ekspektasi dari ξ dikatakan berhingga jika $E\xi^+ < \infty$ dan $E\xi^- < \infty$.

Karena $|\xi| = \xi^+ - \xi^-$, keberhinggaan $E\xi$, atau $|E\xi| < \infty$ adalah ekuivalen dengan $E|\xi| < \infty$. Dalam hal ini dapat dikatakan bahwa Integral Lebesgue adalah absolut konvergen.

Dalam definisi ekspektasi Integral Lebesgue yang dibahas diatas dianggap bahwa P adalah ukuran probabilitas ($P(\Omega) = 1$) dan fungsi terukur $\mathfrak{F}$ (variabel random) ξ telah mempunyai nilai dalam $R(-\infty, \infty)$. Jika μ adalah ukuran apa saja yang didefinisikan pada ruang terukur $(\Omega, \mathfrak{F})$ dan mengambil nilai $+\infty$, dan bahwa $\xi = \xi(\omega)$ adalah fungsi terukur $\mathfrak{F}$ dengan nilai-nilai dalam $\bar{R}$ $[-\infty, +\infty]$ (variabel random yang diperluas). Dalam hal ini ekspektasi Integral Lebesgue menjadi $\int_\Omega \xi(\omega) \; \mu(d\omega)$ didefinisikan dengan cara yang sama untuk variabel random tidak negatif ξ hanya mengganti P dengan μ. Dan untuk variabel random tidak negatif sembarang dan secara umum dinotasikan dengan rumus :

$$\int_\Omega \xi(\omega) \; \mu(d\omega) = \int_\Omega \xi^+ \mu(d\omega) - \int_\Omega \xi^- \mu(d\omega)$$

Jika $E\xi$ telah terdefinisi diatas maka begitu pula untuk ekspektasi $E(\xi I_A)$ untuk setiap $A \in \mathfrak{F}$. Notasi $E(\xi : A)$ atau $\int_A \xi \, dP$ sering dipakai untuk $E(\xi I_A)$ atau ekuivalen dengan $\int_A \xi I_A \, dP$.

Integral $\int_A \xi \, dP$ adalah ekspektasi Integral Lebesgue dengan ukuran P atas himpunan A. Demikian pula $\int_A \xi \, d\mu$ dapat ditulis sebagai pengganti untuk ukuran μ sembarang. Khususnya jika μ adalah n-dimensi ukuran Lebesgue - Stieltjes dan $A = (a,b_1] \times \ldots \times (a_n,b_n]$. digunakan notasi :

$$\int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} \xi \, (x_1, \ldots, x_n) \mu(dx_1, \ldots, dx_n)$$

pengganti dari $\int_A \xi \, d\mu$.

Jika μ adalah ukuran lebesgue dapat ditulis $dx_1, \ldots, dx_n$ pengganti dari $\mu(dx_1, \ldots, dx_n)$.

3.2 *SIFAT-SIFAT EKSPEKTASI INTEGRAL LEBESGUE*

Sifat - sifat dari ekspektasi $E\xi$ dari variabel random ξ adalah sebagai berikut :

A. Misalkan c adalah konstanta dan $E\xi$ ada maka $E(c\xi)$ ada dan $E(c\xi) = cE\xi$.

ξ adalah variabel random sederhana dengan $\xi \geq 0$ $\xi_n \uparrow \xi$ dengan ξ_n adalah variabel acak sederhana dan $c \geq 0$ maka $c\,\xi_n \uparrow c\,\xi$

dan karenanya :

$$E(c\xi) = \text{Lim } E(c\xi_n) = c \text{ Lim } E\xi_n = cE\xi.$$

Dalam kasus umum $\xi = \xi^+ - \xi^-$ dan $(c\,\xi)^+ = c\,\xi^+ . (c\,\xi)^- = c\,\xi^-$ bila $c \geq 0$. Dan untuk $c < 0$ $(c\,\xi)^+ = -c\,\xi^- . (c\,\xi)^- = -c\,\xi^+$

B. Diberikan $\xi \leq \eta$, maka $E\xi \leq E\eta$ dengan pengertian bahwa jika $-\infty < E\,\xi$ maka $-\infty < E\,\eta$ dan $E\,\xi \leq E\,\eta$ atau jika $E\,\eta < \infty$ maka $E\,\xi < \infty$ dan $E\,\xi \leq E\,\eta$.

Bila $0 \leq \xi \leq \eta$ maka $E\xi$ dan $E\eta$ telah didefinisikan dan ketidaksamaan $E\,\xi \leq E\,\eta$ dari sifat ekspektasi bab II. Diambil $E\,\xi > -\infty$ maka $E\,\xi^- < \infty$. Jika $\xi \leq \eta$ didapatkan $\xi^+ \leq \eta^+$ dan $\xi^- \geq \eta^-$ Maka $E\eta^- \leq E\xi^- < \infty$ akibatnya $E\xi$ ditetapkan dan $E\xi = E\xi^+ - E\xi^- \leq E\eta^+ - E\eta^- = E\eta$.

C. Jika $E\xi$ ada maka $|E\xi| \leq E|\xi|$

Karena $-|\xi| \leq \xi \leq |\xi|$ dan dari sifat A dan B diatas maka $-E|\xi| \leq E\xi \leq E|\xi|$ sehingga $|E\xi| \leq E|\xi|$.

D. Jika ξ ada maka $E(\xi I_A)$ ada untuk setiap $A \in \mathfrak{F}$, jika $E\xi$ berhingga maka $E(\xi I_A)$ berhingga.

Ini berawal dari sifat B diatas dan $(\xi I_A)^+ = \xi^+ I_A \leq \xi^+$, $(\xi I_A)^- = \xi^- I_A \leq \xi^-$.

E. Jika ξ dan η adalah variabel random tidak negatif, atau sedemikian sehingga $E|\xi| < \infty$ dan $E|\eta| < \infty$ maka $E(\xi+\eta) = E\xi + E\eta$.

Diberikan $\xi \geq 0$, dan $\eta \geq 0$ dan diambil $\{\xi_n\}$ dan $\{\eta_n\}$ merupakan barisan fungsi sederhana sedemikian sehingga $\xi_n \uparrow \xi$ dan $\eta_n \uparrow \eta$, maka

$$E(\xi_n + \eta_n) = E\xi_n + E\eta_n$$

dan $E(\xi_n + \eta_n) \uparrow E(\xi+\eta)$, $E\xi_n \uparrow E\xi$, $E\eta_n \uparrow E\eta$ dan maka dari itu $E(\xi+\eta) = E\xi + E\eta$. Jika $E|\xi| < \infty$ dan $E|\eta| < \infty$

Untuk membuktikan berlakunya sifat E makadiambil $\xi = \xi^+ - \xi^-$, $\eta = \eta^+ - \eta^-$, $\xi^+ \leq |\xi|$, $\xi^- \leq |\xi|$ dan $\eta^+ \leq |\eta|$, $\eta^- \leq |\eta|$.

Sifat-sifat berikut mengenai ekspektasi dengan notasi P yang hampir pasti atau sering dikatakan P hampir ada dimana-mana atau hampir pasti (almost surely) atau hampir ada dimana-mana (almost everywhere).

Definisi 3.2.1

Dikatakan P hampir pasti jika terdapat himpunan $N \in \mathfrak{F}$ dengan $P(N)=0$ sedemikian rupa sehingga sifat itu berlaku untuk setiap titik ω dari $\Omega \backslash N$

F. Jika $\xi = 0$ hampir pasti maka $E\xi = 0$.

Jika ξ adalah variabel random sederhana, $\xi = \sum x_k I_{A_k}(\omega)$

dan $x_k \neq 0$, $P(A) = 0$ melalui hipotesa maka dari itu $E\xi = 0$. Jika $\xi \geq 0$ dan $0 \leq s \leq \xi$, padahal s adalah variabel random sederhana, maka $s = 0$ (hampir pasti), dan dengan sendirinya $Es = 0$ dan

$E\xi = \sup_{(s \in S \,:\, s < \xi)} Es = 0$. Untuk kasus umum diambil $\xi = \xi^{+} - \xi^{-}$ dan $\xi^{+} \leq |\xi|$, $\xi^{-} \leq |\xi|$, dan $|\xi| = 0$ (hampir pasti).

G. Jika $\xi = \eta$ (hampir pasti) dan $E|\xi| < \infty$, maka $E|\eta| < \infty$ dan $E\xi = E\eta$.

Diambil $N = \{\omega : \xi \neq \eta\}$. Maka $P(N) = 0$ dan $\xi = \xi I_N + \xi$

$I_{\bar N}$, $\eta = \eta\ I_N + \eta\ I_{\bar N} = \eta\ I_N + \xi\ I_{\bar N}$. Dengan sifat-sifat E dan F diatas diperoleh :

$E\xi = E\xi\ I_N + E\xi\ I_{\bar N} = E\eta\ I_{\bar N}$.

Tetapi $E\eta\ I_N = 0$, maka $E\xi = E\eta\ I_N + E\eta\ I_{\bar N} = E\eta$ dari sifat E diatas.

H. Diambil $\xi \geq 0$ dan $E\xi = 0$, maka $\xi = 0$ (hampir pasti).

Diambil $A = \{ \omega : \xi(\omega) > 0 \}$,$A_n = \{\omega : \xi(\omega) \geq 1/n\}$ maka $A_n \uparrow A$ dan $0 \leq \xi\ I_{A_n} < \xi\ I_A$. Maka dari sifat B didapat :

$0 \leq \xi_{A_n} < E\xi = 0$, sehingga

$0 = E\ \xi\ I_{A_n} \geq 1/n\ P(A_n)$.

Dan oleh karena $P(A) = 0$ untuk semua $n \geq 1$.Tetapi $P(A) = \text{Lim}\ P(A_n)$ dan oleh karena itu $P(A)=0$.

I. Diberikan ξ dan η sedemikian sehingga $E|\xi| < \infty$, $E|\eta| < \infty$ dan $E\ (\xi\ I_A) \leq E\ (\eta\ I_A)$ untuk semua $A \in \mathfrak{F}$ maka $\xi \leq \eta$ (hampir pasti).

Diambil $B = \{ \omega : \xi(\omega) > \eta(\omega) \}$, maka $E\ (\eta\ I_B) \leq E\ (\xi\ I_B) \leq E\ (\eta\ I_B)$, oleh karena demikian maka

$E\ (\xi\ I_B) = E\ (\eta\ I_B)$.

Dari sifat E diatas maka $E\ ((\xi-\eta)\ I_B) = 0$ dan dari sifat H diatas diperoleh $(\xi-\eta)\ I_B = 0$ (hampir pasti), maka $P(\ B\ ) = 0$.

J. Diberikan ξ adalah variabel random yang diperluas dan $E|\xi| < \infty$, maka $|\xi| < \infty$ (hampir pasti).

Diambil $A = \{ \omega : |\xi(\omega)| = \infty\}$ dan $P(A) > 0$,maka $E|\xi| \geq E(|\xi| I_A) = \infty. P(A) = \infty$, yang mempertentangkan hipotesa $E|\xi| < \infty$. Jadi harus diambil $A = \{ \omega : |\xi(\omega)| < \infty\}$ sehingga $P(A) < \infty$ maka $E|\xi| < \infty$