BAB II

VARIABEL RANDOM

Suatu variabel random ξ adalah suatu bilangan (variabel) yang berkorespondensi dengan tiap-tiap keluaran yang mungkin dari sebuah eksperimen.

Probabilitas pada umumnya digunakan untuk mengukur kemungkinan terjadinya suatu peristiwa pada eksperimen. Berkaitan dengan hal-hal tersebut, akan diuraikan beberapa definisi dan sifat-sifat dari probabilitas yang menunjang pengertian-pengertian dan pemahaman dari ekspektasi Integral Lebesgue yang dibahas pada bab-bab berikutnya.

Sebuah himpunan adalah kumpulan dari sembarang elemen yang didefinisikan dengan jelas dan himpunan kosong adalah himpunan yang tidak punya elemen. Suatu himpunan tidak kosong Ω yang memuat elemen-elemen disebut ruang. Elemen-elemen dari Ω dinamakan titik dan dinotasikan dengan ω. Notasi A, B, C,......menunjukkan himpunan dari titik-titik, $\{\omega\}$ menunjukkan himpunan yang memuat satu titik dan $\emptyset$ menunjukkan himpunan kosong. Jika ω adalah sebuah titik dalam A, maka dinyatakan dengan $\omega \in A$ dan jika ω bukan titik di dalam A ditulis $\omega \notin A$.

Sebuah himpunan dari himpunan-himpunan disebut kelas yang biasanya dinotasikan dengan $\mathfrak{F}, \mathfrak{U}, \mathfrak{C}, \ldots$ Kelas dari semua himpunan dalam Ω disebut ruang dari himpunan-himpunan dalam Ω akan ditunjukkan sebagai $S(\Omega)$. Dalam setiap percobaan setiap hasil yang mungkin akan disebut titik (ω).

2.1 *RUANG SAMPEL DAN EVENT*

Selanjutnya diberikan beberapa definisi sebagai berikut :

Definisi 2.1.1 (Ruang Sampel)

Ruang sampel (Ω) adalah koleksi dari semua hasil percobaan yang mungkin terjadi.

Definisi 2.1.2 (Event dan Ruang Event)

Suatu event adalah suatu himpunan bagian dari ruang sampel. Ruang event ($\mathfrak{F}$) adalah kelas dengan anggota-anggotanya semua event yang mungkin dari suatu percobaan.Notasi $\{\omega\}$, $\emptyset$, Ω merupakan event.

Definisi 2.1.3 (Elementary event)

Elementary event adalah event yang terdiri dari satu anggota , misalkan $\{\omega\}$.

A dikatakan subset dari B atau termuat di B jika semua titik dari A adalah titik dari B dinotasikan $A \subset B$ atau $B \supset A$. Untuk setiap himpunan A, $\emptyset \subset A \subset \Omega$.

Operasi aljabar dari himpunan-himpunan yang seringkali digunakan adalah hubungan dualitas :

$$\overline{\bigcap_k A_k} = \bigcup_k \overline{A_k}$$

$$\overline{\bigcup_k A_k} = \bigcap_k \overline{A_k}$$

Definisi 2.1.4 (Aljabar)

Sebuah kelas tidak kosong $\mathfrak{F}$ dari himpunan bagian-himpunan bagian Ω dinamakan sebuah aljabar dari himpuanan-himpunan dalam Ω jika mempunyai sifat-sifat berikut :

a. $A \in \mathfrak{F}$ dan $B \in \mathfrak{F}$ maka $A \cup B \in \mathfrak{F}$

b. $A \in \mathfrak{F}$ memenuhi $\overline{A} \in \mathfrak{F}$ untuk $\overline{A}$ adalah komplemen dari A yaitu himpunan titik-titik yang bukan anggota dari A, tetapi termasuk dalam Ω.

Akibat sederhana dari definisi ini adalah :

1. Karena $A \cup \overline{A} = \Omega$ dan $A \in \mathfrak{F}$ maka memenuhi $\Omega \in \mathfrak{F}$ hal ini berarti bahwa himpunan kosong termasuk dalam aljabar dari himpunan-himpunan.

2. $A \in \mathfrak{F}$ dan $B \in \mathfrak{F}$,maka berdasar (a) dan (b) diatas $A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$ dan $A \backslash B = A \cup \overline{B} \in \mathfrak{F}$

Definisi 2.1.5 (σ - Aljabar)

Suatu aljabar dari himpunan-himpunan $\mathfrak{F}$ disebut suatu σ-aljabar jika untuk sembarang barisan dari himpunan-himpunan $A_k \in \mathfrak{F}$ dengan k=1,2,... maka :

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{F}$$

Himpunan-himpunan $A \in \mathfrak{F}$ disebut $\mathfrak{F}$ terukur karena $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{A_k}}$, maka interseksi dari sembarang gabungan dari himpunan-himpunan countable yang berada dalam $\mathfrak{F}$ juga berada dalam $\mathfrak{F}$.

Berikut akan diuraikan dasar-dasar dari fungsi probabilitas.

Definisi 2.1.6 Fungsi

Suatu fungsi , misal f(.), dengan domain A dan kodomain B adalah koleksi pasangan berurut, misal (a,b) yang memenuhi :

i. $a \in A$ dan $b \in B$

ii. $\forall a \in A$ menjadi elemen pertama dari pasangan berurutan dalam koleksi ($\forall b \in B$ tidak perlu harus menjadi elemen kedua dari pasangan berurutan).

iii. tidak ada dua pasangan berurutan (yang ber beda) dalam koleksi dengan elemen pertama yang sama.

Definisi 2.1.7 (Fungsi Probabilitas)

Fungsi Probabilitas P[.] adalah himpunan fungsi dengan domain $\mathfrak{F}$ (suatu aljabar dari kejadian-kejadian) dan kodomain interval [0,1] yang memenuhi

i. $P[A] \geq 0$ untuk $\forall A \in \mathfrak{F}$

ii. $P[\Omega] = 1$

iii. Jika $A_1, A_2, \ldots$ adalah barisan yang saling asing dari kejadian-kejadian dalam $\mathfrak{F}$ (yaitu $A_i \cap A_j = \emptyset$ untuk $i \neq j; i,j=1,2,\ldots$), jika $A_1 \cup A_2 \cup \ldots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{F}$

maka $= \sum_{i=1}^{\infty} P[A_i][A_i][A_i]$

Dari definisi-definisi diatas, maka dapat didefinisikan suatu Ruang Probabilitas, yaitu

Definisi 2.1.8 (Ruang Probabilitas)

Ruang Probabilitas adalah triplet $(\Omega, \mathfrak{F}, P[.])$ dengan

a. Ω adalah himpunan dari titik - titik ω atau ruang sampel

b. $\mathfrak{F}$ adalah koleksi (diasumsikan sebuah σ-aljabar) kejadian-kejadian yang merupakan himpunan bagian dari Ω.

c. P[.] adalah fungsi probabilitas dengan domain $\mathfrak{F}$.

2.2 *UKURAN DAN FUNGSI TERUKUR*

Pertama didefinisikan sebuah himpunan Ω dan sebuah kelas $\mathfrak{U}$ yang merupakan himpunan bagian-himpunan bagian Ω, sehingga setiap kejadian A diartikan sebagai beberapa himpunan bagian dari Ω termasuk dalam $\mathfrak{U}$. Karena sebarang kejadian A diartikan sebagai gabungan (union) elemen-elemen dari Ω yang termasuk dalam A, titik-titik dalam himpunan Ω disebut elemen kejadian (elementary event) dan himpunan Ω disebut ruang dari elementary event. Kelas $\mathfrak{U}$ adalah sebuah himpunan dari kejadian-kejadian A.

Definisi 2.2.1

Sebuah fungsi himpunan W dikatakan additive (atau additive berhingga) jika diasumsikan harga-harga tak berhingga (infinite) dengan hanya satu tanda dan jika untuk sebarang barisan berhingga dari himpunan-himpunan $A_k \in \mathfrak{F}$ (untuk k = 1, 2,...,n) merupakan pasangan saling asing ($A_k \cap A_r = \emptyset$ untuk $k \neq r$, k,r=1, 2, ...,n) dan $\emptyset$ menunjukkan himpunan kosong sedemikian sehingga :

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathfrak{F}$$

Didapatkan bahwa : $$W\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} W(A_k)$$

Jika persamaan ini dipenuhi untuk sebarang kumpulan countable (terhitung) dari himpunan-himpunan yaitu jika:

$$W\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} W(A_k)$$

Untuk sebarang barisan dari himpunan-himpunan $A_k \in \mathfrak{F}$, dengan $A_k \cap A_r = \emptyset$, $k \neq r$, untuk $k,r = 1, 2, 3, \ldots, n$ sedemikian sehingga :

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \in \mathfrak{F}$$

maka fungsi himpunan $W = W(A)$ dikatakan countably additive (atau completely additive).

Definisi 2.2.2

Sebuah fungsi himpunan non negatif $\mu = \mu(A)$ yang countably additive didefinisikan pada sebuah σ-aljabar dari himpunan-himpunan Ω dan memenuhi $\mu(\emptyset) = 0$ dinamakan sebuah ukuran.

Suatu variabel random ξ adalah suatu bilangan (variabel) yang berkorespondensi dengan tiap-tiap keluaran yang mungkin dari sebuah eksperimen. Karena keluaran-keluaran dari suatu eksperimen digambarkan oleh kejadian -kejadian elementer, suatu variabel random dapat dianggap sebagai sebuah fungsi dari sebuah elemen kejadian (elementary event), $\xi = f(u)$, $u \in \Omega$. Pada teori dasar probabilitas sebuah variabel random ξ secara lengkap ditunjukkan dengan fungsi distribusinya $F(x) = P\{\xi < x\}$ Jika dalam teori probabilitas digunakan elemen kejadian $\{\xi < x\}$ maka dalam ruang dengan ukuran digunakan himpunan $\{ u, f(u) < x \}$. Selanjutnya untuk membicarakan sebuah fungsi distribusi dari sebuah variabel random, himpunan {u, $f(u) < x$} harus untuk sebarang real x termasuk dalam $\mathfrak{F}$. Pada bagian ini diuraikan tentang kelas dari fungsi-fungsi yang didefinisikan pada ruang terukur $\{\Omega, \mathfrak{F}, \mu\}$.

Definisi 2.2.3

$\mathfrak{F}$ menunjukkan suatu σ-aljabar dari himpunan-himpunan ruang Ω. Diambil $f(u)$ menunjukkan suatu fungsi yang didefinisikan pada suatu himpunan $\mathfrak{F}$-terukur M dan mengasumsikan harga-harga riil (dan kemungkinan harga-harganya $\pm\infty$). Sehingga suatu fungsi $f(u)$ dikatakan $\mathfrak{F}$-terukur jika untuk setiap harga real x, himpunan {u, $f(u) < x$} adalah $\mathfrak{F}$-terukur.

Corollary

Jika $f(u)$ adalah fungsi $\mathfrak{F}$-terukur, maka untuk se-setiap x, himpunan

$\{u \; ; \; u \in M \; , \; f(u) \leq x\}$; $\{u \; ; \; u \in M \; , \; f(u) > x\}$

$\{u \; ; \; u \in M \; , \; f(u) \geq x\}$; $\{u \; ; \; u \in M \; , \; f(u) = x\}$

$\{u \; ; \; u \in M \; , \; a \leq f(u) < b\}$, dst adalah $\mathfrak{F}$-terukur.

Bukti :

1. $f(u)$ adalah $\mathfrak{F}$-terukur $\Leftrightarrow$ untuk sebarang real x himpunan {{u ; $f(u) \geq x$} adalah $\mathfrak{F}$-terukur. Jika $f(u)$ adalah $\mathfrak{F}$-terukur, maka untuk masing-masing bilangan real x himpunan {u; $f(u) < x$} adalah $\mathfrak{F}$-terukur(definisi

2.2.3). Maka komplemen dari himpunan $\{u;\ f(u) < x\}$ yaitu $\{u;\ f(u) \geq x\}$ adalah $\mathfrak{F}$-terukur. Sebaliknya juga demikian.

2. $f(u)$ adalah $\mathfrak{F}$-terukur $\Leftrightarrow$ untuk masing-masing bilangan x himpunan $\{u; f(u) \leq x\}$ adalah $\mathfrak{F}$-terukur. Jika $f(u)$ adalah $\mathfrak{F}$-terukur maka himpunan $\{u;\ f(u) < x + \frac{1}{n}\}$ adalah $\mathfrak{F}$-terukur untuk n = 1,2,... sehingga :

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \{u;\ f(u) < x + \frac{1}{n}\} = \{u;\ f(u) \leq x\} \text{ adalah } \mathfrak{F}\text{-terukur.}$$

Sebaliknya juga demikian.

3. $f(u)$ adalah $\mathfrak{F}$-terukur $\Rightarrow$ himpunan $\{ u;\ f(u) = x \}$ adalah $\mathfrak{F}$-terukur untuk masing-masing bilangan real. $\{u;\ f(u) = x\} = \{u;\ f(u) \geq x\} \cap \{u;\ f(u) \leq x\}$. Karena himpunan-himpunan pada ruas kanan adalah $\mathfrak{F}$-terukur maka irisannya juga merupakan $\mathfrak{F}$-terukur.

Teorema 2.2.1

Diambil $\{f_n(u)\ ,\ n = 1,2,...,\ u \in M\}$ menunjukkan sebuah barisan dari fungsi $\mathfrak{F}$-terukur. Maka fungsi-fungsi :

$$\operatorname*{Sup}_n f_n(u)\ ,\ \operatorname*{Inf}_n f_n(u)\ ,\ \overline{\operatorname*{Lim}_n}\, f_n(u)\ ,\ \underline{\operatorname*{Lim}_n}\, f_n(u)$$

adalah $\mathfrak{F}$-terukur.

Bukti :

Diperoleh dari relasi-relasi :

$$\{u; u \in M\ , \operatorname*{Sup}_n f_n(u) > x\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{u; u \in M\ , f_n(u) > x\}$$

$$\{u;u \in M, \operatorname*{Inf}_{n} f_n(u) < x\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{u;u \in M, f_n(u)<x\}$$

$$\{u;u \in M, \overline{\operatorname*{Lim}_{n}}\, f_n(u) > x\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{j=n}^{\infty} \{u;u \in M, f_j(u) < x \tfrac{1}{k}\}$$

$$\{u;u \in M, \underline{\operatorname*{Lim}_{n}}\, f_n(u) > x\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{j=n}^{\infty} \{u;u \in M, f_j(u) > x \tfrac{1}{kk}\}$$

Definisi 2.2.4

Fungsi indikator $I_{Ak}(\omega)$ dari sebuah himpunan A didefinisikan sebagai sebuah fungsi yang sama dengan 1 untuk $\omega \in A$ dan sama dengan 0 untuk $\omega \in A$. Jadi bisa dinyatakan :

$$I_{Ak}(\omega) = \begin{cases} 1 \text{ jika } \omega \in A \\ 0 \text{ jika } \omega \notin A \end{cases}$$

Catatan :

$$I_{A \cap B}(\omega) = I_A(\omega)\, I_B(\omega)$$

$$I_{A \cup B}(\omega) = I_A(\omega) + I_B(\omega) \qquad (A \cap B = \emptyset)$$

$$I_{\bar{A}}(\omega) = 1 - I_A(\omega)$$

$$I_{\overline{\text{Lim}}\, A_n} = \overline{\text{Lim}}\, I_{A_n}(\omega)$$

$$I_{\underline{\text{Lim}}\, A_n} = \underline{\text{Lim}}\, I_{A_n}(\omega)$$

Definisi 2.2.5

Sebuah fungsi $\mathfrak{F}$-terukur , $f(\omega)$ dikatakan *fungsi sederhana* jika didefinisikan pada sebuah himpunan $M \in \mathfrak{F}$ dan diasumsikan harga-harga a_1, a_2, ..., a_n (dengan

$a_i \neq a_j$, jika $i \neq j$, untuk $i,j = 1,2,\ldots,n$). Ambil himpunan $A_j = \{u \; ; \; u \in M, f(w) = a_j \}$ untuk $j = 1,2,\ldots,n$. Maka A_j adalah $\mathfrak{F}$-terukur dan $f(\omega) = \sum_{j=1}^{n} a_j \, I_{A_j}(\omega)$, $\omega \in M$ dengan $I_{A_j}(\omega)$ adalah fungsi indikator dari himpunan A_j. Setiap fungsi yang digambarkan dalam bentuk (1) merupakan fungsi sederhana yang didefinikan pada M.

2.3 *VARIABEL RANDOM DAN FUNGSI DISTRIBUSI*

Pada bagian ini akan dibicarakan konsep - konsep mengenai variabel random dan fungsi distribusinya. Variabel random digunakan untuk menggambarkan kejadian-kejadian dalam suatu percobaan sedangkan fungsi distri-distribusi variabel randomnya digunakan untuk memberikan probabilitas dari kejadian-kejadian tertentu didefinisikan dalam kaitannya dengan variabel random atau menggambarkan distribusi nilai-nilai variabel random.

Definisi 2.3.1 (*Variabel random*)

Untuk suatu ruang probabilitas $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ suatu variabel random ($\mathcal{X}$ atau $\mathcal{X}(.)$) adalah suatu fungsi dengan domain Ω dan kodomain garis riil. Fungsi $\mathcal{X}(.)$ pasti merupakan himpunan $A_r = \{\omega : \mathcal{X}(\omega) \leq r \} \subset \mathfrak{F}$ untuk $\forall \; r \in R$.

Bila pembuat eksperimen lebih memperhatikan pada variabel random yang menggambarkan pengamatan, perhatian utamanya adalah dalam probabilitas dengan variabel random yang bervariasi nilainya. Dari sudut pandang ini mereka tertarik tidak dalam distribusi probabilitas $(\Omega,\mathfrak{F})$ tetapi pada distribusi jangkauan dari variabel random. Pada Ω yang mengandung jumlah titik-titik berhingga maka jangkauan X pada random variabel ξ juga berhingga. Ambil $X=\{x_1, \ldots, x_m\}$ dengan angka-angka berbeda $x_1, \ldots, x_m$ melebihi nilai-nilai ξ.

Misalkan $\mathcal{X}$ adalah himpunan dari seluruh himpunan bagian pada X, dan $B \in \mathcal{X}$ dan B diartikan event jika ruang sampel diambil pada X, himpunan nilai-nilai dari ξ. Pada $(X,\mathcal{X})$ pertimbangkan probabilitas $P_\xi(.)$ yang disebabkan oleh ξ yang berbentuk

$$P_\xi(B) = P\{\omega:\xi(\omega)\in B\},\ B \in \mathcal{X}$$

Jelaslah bahwa nilai-nilai probabilitas ini samasekali ditentukan oleh

$$P_\xi(x_i) = P\{\omega:\xi(\omega) = x_i\},\ x_i \in X$$

Himpunan dari angka-angka $\{P_\xi(x_1), \ldots, P_\xi(x_m)\}$ disebut Probabilitas Distribusi Random Variabel ξ.

Definisi 2.3.2 (*Fungsi Distribusi*)

Diambil $x \in R^1$ Fungsi $F_\xi(x) = P\{\omega:\xi(\omega) \le x\}$ disebut fungsi distribusi variabel random ξ.

Untuk jelasnya $F_\xi(x) = \sum_{(i:x_i \le x)} P_\xi(x_i)$ dan

$$P_\xi(x_i) = F_\xi(x_i) - F_\xi(x_i-)$$

dengan $F_\xi(x-) = \text{Lim}_{y\uparrow x} F_\xi(y)$. Jika diandaikan $x_1<x_2<..x_m$ dan $F_\xi(x_0) = 0$, maka :

$$P_\xi(x_i) = F_\xi(x_i) - F_\xi(x_{i-1}),\ i=1,...m$$

Dari definisi 2.3.2 distribusi $F_\xi = F_\xi(x)$ mempunyai sifat-sifat :

1. $F_\xi(-\infty) = 0,\ F_\xi(+\infty) = 1$.
2. $F_\xi(x)$ kontinu di kana ($F_\xi(x+) = F_\xi(x)$) dan konstan urutannya.

2.4 *KONSEP DAN SIFAT-SIFAT DASAR EKSPEKTASI*

Diambil $(\Omega,\mathfrak{F},P)$ menjadi ruang probabilitas ber-berhingga dan $\xi = \xi(\omega)$ adalah variabel random dengan nilai-nilai dalam himpunan $X = (x_1, \ldots, x_k)$. Jika diambil $A_i = \{\omega : \xi = x_i\}$, $i = 1,\ldots,k$, maka ξ dapat dengan jelas digambarkan sebagai :

$$\xi(\omega) = \sum_{i=1}^{k} x_i I(A_i)$$

dengan himpunan-himpunan $A_1,\ldots,A_k$ membentuk sebuah dekomposisi dari Ω (yaitu sebuah pasangan disjoint dan jumlahnya adalah Ω). Misalkan $p_i = P\{\xi = x_i\}$, jika diamati nilai-nilai dari variabel random ξ didalam n pengulangan-pengulangan dari eksperimen yang identik. Nilai x_i harus ditemukan kira-kira $p_i n$ kali i=1,...,k. maka nilai rata-rata dihitung dari hasil-hasil n eksperimen adalah nilai rata-rata secara kasar.

Definisi 2.4.1 (Ekspektasi)

Ekspektasi atau nilai rata-rata dari variabel random $\xi = \sum_{i=1}^{k} x_i I(A_i)$ adalah jumlah $E\xi = \sum_{i=1}^{k} x_i P(A_i)$.

Karena $A_i = \{\omega : \xi(\omega) = x_i\}$ dan $P_\xi(x_i) = P(A_i)$, didapatkan $E\xi = \sum_{i=1}^{k} x_i P_\xi(x_i)$. Mengingat definisi dari $F_\xi = F_\xi(x)$ dan $\Delta F_\xi(x) = F_\xi(x) - F_\xi(x-)$ didapatkan $P_\xi(x_i) = \Delta F_\xi(x_i)$ maka $E\xi = \sum_{i=1}^{k} x_i \Delta F_\xi(x_i)$.

Sebelum membahas sifat-sifat dasar ekspektasi gam gambaran lain dari variabel random ξ adalah

$$\xi(\omega) = \sum_{j=1}^{L} x'_j I(B_j)$$

dengan $B_1 + \ldots + B_L = \Omega$, tetapi beberapa dari x'_j dapat diulang. Dalam hal ini $E\xi$ dapat dihitung dari rumus $\sum_{j=1}^{L} x'_j P(B_j)$ yang secara formal berbeda dari x_i diatas karena x_i seluruhnya berbeda. Pada kenyataannya

$$\sum_{j:x'_j=x_i} x'_j P(B_j) = x_i \sum_{j:x'_j=x_i} P(B_j) = x_i P(A_i)$$

dan karena itu $\sum_{i=1}^{L} x_j P(B_j) = \sum_{i=1}^{k} x_i P(A_i)$.

Sifat-sifat dasar dari Ekspektasi adalah :

1. Jika $\xi \geq 0$ maka $E\xi \geq 0$
2. $E(a\xi+b\eta) = aE\xi + bE\eta$,dengan a,b = konstan
3. Jika $\xi \geq \eta$ maka $E\xi \geq E\eta$
4. $|E\xi| \leq E|\xi|$
5. Jika ξ dan η independen maka $E\xi\eta = E\xi \cdot E\eta$
6. $(E|\xi\eta|)^2 \leq E\xi^2 . E\eta^2$
7. Jika $\xi = I(A)$ maka $E\xi = P(A)$

Dibawah ini akan diberikan bukti dari sifat-sifat dasar ekspektasi. Sifat (1) dan (7) sudah sangat jelas . Adapun bukti dari sifat (2) sampai dengan (6) adalah sebagai berikut :

sifat (2)

$E(a\xi+b\eta) = aE\xi + bE\eta$,dengan a,b = konstan

Bukti :

Diambil $\xi = \sum_i x_i I(A_i)$, $\eta = \sum_j y_j I(B_j)$ kemudian

$$a\xi + b\eta = a \sum_{i,j} x_i I(A_i \cap B_j) + b \sum_{i,j} y_j I(A_i \cap B_j)$$

$$= \sum_{i,j} (ax_i + by_j)\ I(A_i \cap B_j) \quad \text{dan}$$

$$E(a\xi + b\eta) = \sum_{i,j}(ax_i + by_j)\, P(A_i \cap B_j)$$

$$= \sum_i ax_i P(A_i) + \sum_j by_j P(B_j)$$

$$= a \sum_i x_i P(A_i) + b \sum_j y_j P(B_j)$$

$$= a\, E\xi + b\, E\eta$$

sifat (3)

Jika $\xi \geq \eta$ maka $E\xi \geq E\eta$

Bukti :

Dari sifat (1) yaitu jika $\xi \geq 0$ maka $E\xi \geq 0$ dan sifat (2) yaitu $E(a\xi + b\eta) = aE\xi + bE\eta$,dengan a,b = konstan maka jika $\xi \geq \eta$ maka $E\xi \geq E\eta$.

sifat (4)

$|E\xi| \leq E|\xi|$

Bukti :

Karena $|E\xi| = \left|\sum_i x_i P(A_i)\right| \leq \sum_i |x_i| P(A_i) = E|\xi|$

sifat (5)

Jika ξ dan η independent maka $E\xi\eta = E\xi \cdot E\eta$

Bukti :

Untuk variabel random yang independent (bebas) event-event $A_i = \{\omega:\xi(\omega) = x_i\}$ dan $B_j = \{\omega:\eta(\omega) = y_j\}$ adalah independent maka $P(A_i \cap B_j) = P(A_i)P(B_j)$ maka :

$$E\xi\eta = E\left[\sum_i x_i I(A_i)\right]\left[\sum_j y_j I(B_j)\right]$$

$$= E\sum_{i,j} x_i y_j I(A_i \cap B_j) = \sum_{i,j} x_i y_j P(A_i \cap B_j)$$

$$= \sum_{i,j} x_i y_j P(A_i)P(B_j)$$

$$= \left[\sum_i x_i P(A_i)\right]\left[\sum_j y_j P(B_j)\right]$$

$$= E\xi . E\eta$$

sifat (6)

$(E|\xi\eta|)^2 \le E\xi^2.E\eta^2$

Bukti :

Untuk membuktikannya diamati bahwa $\xi^2 = \sum_i x_i^2 \; I(A_i) \; \eta^2$

$= \sum_j y_j^2 \; I(B_j)$ dan $E\xi^2 = \sum_i x_i^2 \; P(A_i)$, $E\eta^2 = \sum_j y_j^2 \; P(B_j)$

Diambil $E\xi^2 > 0$, $E\eta^2 > 0$ dan $\bar{\xi} = \frac{\xi}{\sqrt{E\xi^2}}$, $\bar{\eta} = \frac{\eta}{\sqrt{E\eta^2}}$, karena

$2|\bar{\xi}\bar{\eta}| \le \bar{\xi}^2 + \bar{\eta}^2$,didapatkan $2E|\bar{\xi}\bar{\eta}| \le E\bar{\xi}^2 + E\bar{\eta}^2 = 2$

karena itu $E|\bar{\xi}\bar{\eta}| \le 1$ dan $(E|\xi\eta|)^2 \le E\xi^2.E\eta^2$.

II.5 *INTEGRAL LEBESGUE*

II.5.1 *UKURAN LEBESGUE*

Proposisi 2.5.1

Jika f sebuah fungsi bernilai riil yang diperluas yang domainnya adalah terukur maka pernyataan-pernyataan berikut adalah ekuivalen :

1. Untuk masing-masing himpunan bilangan riil α $\{x : f(x) > \alpha\}$ adalah terukur.
2. Untuk masing-masing himpunan bilangan riil α $\{x : f(x) \geq \alpha\}$ adalah terukur.
3. Untuk masing-masing himpunan bilangan riil α $\{x : f(x) < \alpha\}$ adalah terukur.
4. Untuk masing-masing himpunan bilangan riil α $\{x : f(x) \leq \alpha\}$ adalah terukur.

Pernyataan-pernyataan itu (2 dan 4) mengandung arti bahwa :

5. Untuk masing-masing himpunan bilangan riil α yang diperluas $\{x : f(x) = \alpha\}$ adalah terukur.

Bukti :

Ambil domain dari fungsi f adalah D pernyataan 1 ekuivalen dengan pernyataan 4 , $\{ x : f(x) > \alpha \}$ ekuivalen $\{ x : f(x) \leq \alpha\} = D$.

Jika untuk masing-masing himpunan bilangan riil $\{x:f(x) > \alpha \}$ adalah terukur maka untuk $\{x : f(x) \leq \alpha \}$ jelas terukur juga. Begitu pula untuk pernyataan 2 ekuivalen dengan pernyataan 3. Dan untuk pernyataan 1 ekuivalen pernyataan 2 , $\{ x : f(x) \geq \alpha \} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{ x : f(x) > \alpha-1/n\}$

Jadi irisan dari barisan himpunan -himpunan yang terukur adalah terukur. Begitu juga untuk pernyataan 2 ekuivalen dengan pernyataan 1 $\{ x : f(x) > \alpha \} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{ x : f(x) \geq \alpha+1/n \}$ Jadi gabungan dari barisan himpunan -himpunan yang terukur adalah terukur.

Ini menunjukkan bahwa keempat pernyataan tersebut adalah ekuivalen . Jika α adalah himpunan bilangan riil $\{ x : f(x) = \alpha \} = \{ x : f(x) \geq \alpha \} \cap \{ x : f(x) \leq \alpha \}$ sehingga dari pernyataan 2 dan pernyataan 4 irisannya adalah pernyataan 5.

Definisi 2.5.1

Sebuah fungsi f bernilai riil yang diperluas dikatakan terukur (menurut lebesgue) , jika domainnya adalah terukur dan jika memenuhi salah satu dari empat pernyataan didalam proposisi 2.5.1.

Suatufungsi kontinu dengan domain yang terukur adalah terukur dan setiap masing-masing bagian dari fungsi tersebut adalah terukur. Jika f adalah fungsi terukur dan N adalah himpunan bagian yang terukur pada domain f maka fungsi f yang dibatasi oleh N juga terukur.

II.5.2 *INTEGRAL LEBESGUE UNTUK FUNGSI-FUNGSI TERUKUR YANG TERBATAS*

Ambil f(x) fungsi yang terbatas dan terukur pada interval [a,b]. Andaikan bahwa α dan β adalah dua bilang riil sebarang sedemikian sehingga $\alpha < f(x) < \beta$. Jarak α ke β dibagi menjadi sub-sub interval $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ sehingga

$$\alpha = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_{n-1} < y_n = \beta$$

Selanjutnya , ambil N_k , k=1,2,...,n yang merupakan himpunan semua x didalam [a.b] sehingga

$$y_{k-1} \leq f(x) \leq y_k$$

$$N_k = \{ x : y_{k-1} \leq f(x) < y_k \} , k = 1,2,\ldots,n.$$

Karena f(x) adalah terukur , himpunan - himpunan tersebut juga terukur.

Untuk setiap himpunan-himpunan N_k dibentuk jumlah atas yaitu:

$$U = \sum_{k=1}^{n} y_k \; m(N_k)$$

jumlah bawah yaitu:

$$u = \sum_{k=1}^{n} y_{k-1} \; m(N_k)$$

Dengan partisi yang berbeda-beda dipilih himpunan-himpunan dari U dan u sehingga diperoleh :

I = batas bawah terbesar (infrimum) dari harga U untuk semua partisi yang mungkin.

J = batas atas terkecil (suprimum) dari harga u untuk semua partisi yang mungkin.

Bilangan-bilangan $I = \overline{\int_a^b} f(x)\, dx$; $J = \underline{\int_a^b} f(x)dx$, dengan infrimum dan suprimum diambil meliputi semua partisi pada [a,b] , berturut-turut dinamakan integral atas Lebesgue dan integral bawah Lebesgue fungsi f(x) pada [a,b].

Jika nilai integral atas dan integral bawah sama, maka dikatakan bahwa f(x) dapat terintegral Lebesgue pada [a,b] dan ditulis $\int_a^b f(x)dx$

Definisi 2.5.2

Jika N merupakan himpunan terukur didalam [a,b] , maka Integral Lebesgue dari fungsi f(x) pada N didefinisikan sebagai : $\int_N f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$

$$\text{dimana } g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{untuk } x \in N \\ 0 & \text{untuk } x \notin N \end{cases}$$

Ini juga dapat didefinisikan langsung dengan menggunakan jumlah atas dan jumlah bawah dimana

$$N_k = \{x : x \in N \text{ , } y_{k-1} \le f(x) < y_k \}$$

sehinggahasil-hasil yang diperoleh menjadi kasus khusus dengan N = [a,b].