BAB III

FUNGSI RANDOM SEPARABEL

3.1 SEPARABILITAS DARI FUNGSI RANDOM

Misalkan Θ dan X menyatakan 2 buah ruang metrik dengan fungsi jarak atau metriknya berturut-turut $r(\theta_1,\theta_2)$ dan $\rho(x_1,x_2)$ dan diasumsikan Θ separabel. Misalkan juga U menyatakan ruang sampel, dan $g(\theta,u)$ menyatakan suatu fungsi random dari dua parameter yang didefinisikan pada Θ x U kedalam ruang metrik X. Pada definisi separabilitas yang akan banyak berperan adalah himpunan -himpunan bagian tertutup dari X dan himpunan -himpunan bagian terbuka dari Θ. Sebelum membahas separabilitas dari fungsi random akan diberikan terlebih dahulu himpunan bagian N dari himpunan U yang memegang peranan penting dalam konsep separabilitas ini.

Definisi 3.1.1

Misal U menyatakan ruang sampel dan $g(\theta;u)$ menyatakan suatu fungsi random yang didefinsikan pada Θ x U kedalam ruang metrik X. Untuk sembarang himpunan terbuka $G \subset \Theta$ dan sembarang himpunan tertutup $F \subset X$ didefinisikan

$$N = \{\ u;\ g(\theta_j,u) \in F,\ \theta_j \in G \text{ dan } g(\theta,u) \notin F,\ \forall\theta \in G\ \}$$

Definisi 3.1.2

Suatu fungsi random $g(\theta,u)$ dikatakan separabel (dapat dipisah-pisahkan) jika Θ memuat himpunan terbilang dari titik-titik $\{ \theta_j \}$ yang rapat disetiap tempat untuk $j = 1,2,3,\ldots$ dan jika U memuat himpunan bagian N dengan probabilitas 0 sedemikian hingga untuk sembarang himpunan terbuka $G \subset \Theta$ dan untuk sembarang himpunan tertutup $F \subset X$,
dua himpunan,

$$\{ u;\ g(\theta_j,u) \in F,\ \theta_j \in G \}$$

$$\text{dan } \{ u;\ g(\theta,u) \in F \text{ untuk semua } \theta \in G \}$$

hanya akan berbeda oleh himpunan bagian N.

Himpunan terbilang dari titik-titik θ_j disebut himpunan separabilitas dari fungsi random.

Teorema 3.1.1

Suatu fungsi random $\tilde{g}(\theta,u)$ dikatakan separabel jika dan hanya jika terdapat suatu himpunan N sedemikian hingga $P(N) = 0$ dan dipenuhi $\tilde{g}(\theta,u) \in F$ dimana $u \notin N$.

Bukti :

Syarat perlu ($\longrightarrow$)

Misal $\tilde{g}(\theta,u)$ adalah fungsi random yang separabel, Misalkan juga I menyatakan himpunan separabilitas dari fungsi random, N menyatakan himpunan yang berkorespondensi dengan titik u. Dan V menyatakan kelas-kelas dari semua bola-bola terbuka didalam ruang Θ

dengan jari-jari rasional dan pusatnya adalah titik-titik yang menjadi anggota himpunan bagian terbilang dari Θ yang rapat disetiap tempat, sehingga V adalah terbilang. Oleh karena itu, sembarang himpunan bagian terbuka G dari Θ dapat dinyatakan sebagai gabungan (union) terbilang dari beberapa bola yang termuat didalam V. Misal F menyatakan himpunan bagian tertutup dari X dan misal A(G,u)menyatakan tutupan dari jangkauan (range) fungsi $\tilde{g}(\theta,u)$ untuk θ meliputi himpunan $I \cap G$, maka $A(\theta,u)$ merupakan interseksi dari semua A(S,u) untuk S adalah bola-bola didalam V dimana titik θ menjadi anggotanya. Atau dapat dituliskan

$$A(\theta,u) = \bigcap_{S\in V} A(S,u)$$

Karena sifat kekompakkan dari X, maka pada keluarga himpunan-himpunan tertutup A(G,u) dengan $\theta \in G$ sebagai pusatnya, akan mempunyai anggota himpunan-himpunan berhingga. Dan untuk sebarang himpunan-himpunan berhingga dari A(G,u) akan mempunyai irisan (titik-titik sekutu), Akibatnya $A(\theta,u)$ tidak kosong. Sehingga diperoleh $\tilde{g}(\theta,u) \in A(\theta,u) \subset F$, kontradiksi dengan definisi dari himpunan N dimana $\tilde{g}(\theta,u) \notin F$ sehingga $P(N) = 0$ dan $u \notin N$. Maka dipenuhi

$$\tilde{g}(\theta,u) \in A(\theta,u) \subset F, \text{ dimana } u \notin N \quad \ldots.(3.1.1)$$

Syarat cukup ($\longleftarrow$)

Sebaliknya jika (3.1.1) dipenuhi untuk $u \notin N$ sedemikian hingga $P(N) = 0$, maka $\tilde{g}(\theta,u)$ adalah fungsi random separabel. Untuk memperlihatkan hal ini dicatat bahwa jika $\tilde{g}(\theta,u) \in F$ untuk semua $\theta \in I \cap S$ dimana F adalah himpunan bagian tertutup dari X dan $S \in V$, maka $A(\theta,u) \subset A(S,u) \subset F$ untuk setiap $\theta \in S$ dan akibatnya $\tilde{g}(\theta,u) \in F$ untuk setiap θ dalam S.

Misalkan G menyatakan sembarang himpunan terbuka dalam Θ. Maka G dapat dinyatakan sebagai $G = \bigcup_k S_k$ dari himpunan-himpunan bagian V, sehingga diperoleh :

$$\tilde{g}(\theta,u) \in F \text{ untuk semua } \theta \in I \cap G,\ u \notin N ,$$

yang berarti

$$\tilde{g}(\theta,u) \in F \text{ untuk sembarang } \theta \in G$$

Jadi terbukti bahwa $\tilde{g}(\theta,u)$ adalah fungsi random separabel.

3.2 KEEKUIVALENAN STOKHASTIK DARI FUNGSI RANDOM

Untuk menyusun suatu fungsi random ekuivalen stokhastik ke fungsi random separabel , pemberian lemma-lemma dibawah ini sangat membantu dalam memudahkan pembuktian hal tersebut diatas.

Lemma 3.2.1

Misal B merupakan himpunan bagian Borel sembarang dari X maka terdapatlah himpunan dari titik-titik θ_1, θ_2, ... , yang terbilang tak berhingga atau berhingga sedemikian hingga himpunan

$$N(\theta,B) = \{\ u; g(\theta_k,u) \in B, k = 1,2,\ \ldots,\ g(\theta,u) \notin B\ \}$$

mempunyai probabilitas 0 untuk sembarang $\theta \in \Theta$.

Bukti :

Bukti :

Misal θ adalah sembarang. Jika dari θ_1, θ_2, ..., θ_k dibentuk suatu himpunan

$$m_k = \sup_{\theta\in\Theta} P\{g(\theta_1,u) \in B, \ldots, g(\theta_k,u) \in B;\ g(\theta,u) \notin B\}$$

maka barisan { m_k } monoton turun. Jika $m_k = 0$, berarti barisan yang bersesuaian telah tersusun/terbentuk.

Jika $m_k > 0$, Misal θ_{k+1} suatu titik sedemikian hingga

$$P\{g(\theta_1,u) \in B, \ldots, g(\theta_k,u) \in B,\ g(\theta_{k+1},u) \notin B\} \geq \frac{m_k}{2}$$

Karena himpunan

$$L_k = \{u;\ g(\theta_i,u) \in B,\ i = 1,2, \ldots, k,\ g(\theta_{k+1},u) \notin B\}$$

tidak mempunyai titik persekutuan maka diperoleh

$$1 \geq \sum P(L_k) \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} m_k$$

Akibatnya, $m_k \longrightarrow 0$ untuk $k \longrightarrow \infty$.

Sehingga untuk θ sembarang berlaku

$$P\{g(\theta_k,u) \in B,\ k = 1,2, \ldots, g(\theta,u) \notin B\} \leq \lim m_k = 0$$

lemma terbukti.

Lemma 3.2.2

Misalkan $\mathfrak{M}_0$ menyatakan kelas himpunan-himpunan terbilang dan $\mathfrak{M}$ menyatakan kelas yang memuat interseksi dari semua sub-sub kelas yang mungkin dari himpunan-himpunan yang menjadi anggota $\mathfrak{M}_0$, maka terdapatlah himpunan yang berhingga atau terbilang tak berhingga dari titik-titik θ_1, θ_2, ..., θ_n, ... dan untuk setiap θ himpunan $N(\theta)$ sedemikian hingga

$P\{N(\theta)\} = 0$ dan

$$\{ u;\ g(\theta_n,u) \in B,\ n = 1,2,\ \ldots,\ g(\theta,u) \notin B \} \subset N(\theta)$$

untuk setiap $B \in \mathfrak{M}$

Bukti :

Misal I menyatakan himpunan terbilang dari titik-titik dalam Θ yaitu gabungan dari himpunan-himpunan $\{\theta_n,\ n = 1,2,\ \ldots\}$ yang disusun untuk setiap $B \in \mathfrak{M}_o$ sesuai dengan lemma 3.2.1

Didefinisikan

$$N(\theta) = \bigcup_{B \in \mathfrak{M}_o} N(\theta,B)$$

Jika $B' \in \mathfrak{M}$ dan jika $B' \subset B \in \mathfrak{M}_o$, maka

$$\{u;\ g(\theta_n,u) \in B',\ \theta_n \in I,\ g(\theta,u) \notin B'\} \subset \{u;\ g(\theta_n,u) \in B,\ \theta_n \in I,\ g(\theta,u) \notin B\} \subset N(\theta,B) \subset N(\theta)\ .$$

Selanjutnya, jika $B' = \bigcap_{k=1}^{\sim} B_k$ untuk $B_k \in \mathfrak{M}_o$, maka

$$\{u;\ g(\theta_n,u) \in B',\ \theta_n \in I,\ g(\theta,u) \notin B'\}$$
$$\subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \{ u;\ g(\theta_n,u) \in B_k,\ \theta_n \in I,\ g(\theta,u) \notin B_k \}$$
$$\subset \bigcup_{k=1}^{\infty} N(\theta,B_k) \subset N(\theta)\ ,$$

lemma terbukti.

Teorema 3.2.1

Misalkan X dan Θ menyatakan ruang metrik. Diasumsikan X kompak dan Θ separabel. Maka untuk sembarang fungsi random $g(\theta,u)$ yang didefinisikan pada

Θ ke dalam X akan ekuivalen stokhastik ke fungsi random separabel.

Bukti :

Misal $\tilde{g}(\theta,u)$adalah fungsi random yang ekuivalen stokhastik ke fungsi random $g(\theta,u)$. Akan dibuktikan dahulu bahwa fungsi random $\tilde{g}(\theta,u)$ adalah separabel. Bukti sesuai dengan bukti theorema 2.

Syarat perlu ($\longrightarrow$)

Misal $\tilde{g}(\theta,u)$ adalah fungsi random yang separabel, Misalkan juga I menyatakan himpunan separabilitas dari fungsi random, N menyatakan himpunan yang berkorespondensi dengan titik u. Dan V menyatakan kelas-kelas dari semua bola-bola terbuka didalam ruang Θ dengan jari-jari rasional dan pusatnya adalah titik-titik yang menjadi anggota himpunan bagian terbilang dari Θ yang rapat disetiap tempat, sehingga V adalah terbilang. Oleh karena itu, sembarang himpunan bagian terbuka G dari Θ dapat dinyatakan sebagai gabungan (union) terbilang dari beberapa bola yang termuat didalam V. Misal F menyatakan himpunan bagian tertutup dari X dan misal A(G,u)menyatakan tutupan dari jangkauan (range) fungsi $\tilde{g}(\theta,u)$ untuk θ meliputi himpunan $I \cap G$, maka $A(\theta,u)$ merupakan interseksi dari semua A(S,u) untuk S adalah bola-bola didalam V dimana titik θ menjadi anggotanya. Atau dapat dituliskan

$$A(\theta,u) = \bigcap_{S \in V} A(S,u)$$

Karena sifat kekompakkan dari X, maka pada keluarga himpunan-himpunan tertutup A(G,u) dengan $\theta \in G$ sebagai pusatnya, akan mempunyai anggota himpunan-himpunan berhingga. Dan untuk sebarang himpunan-himpunan berhingga dari A(G,u) akan mempunyai irisan (titik sekutu), Akibatnya $A(\theta,u)$ tidak kosong. Sehingga diperoleh $\tilde{g}(\theta,u) \in A(\theta,u) \subset F$, kontradiksi dengan definisi dari himpunan N dimana $\tilde{g}(\theta,u) \notin F$ sehingga $P(N) = 0$ dan $u \notin N$. Maka dipenuhi

$$\tilde{g}(\theta,u) \in A(\theta,u) \subset F, \text{ dimana } u \notin N \quad .....(3.2.1)$$

Syarat cukup ($\longleftarrow$)

Sebaliknya jika (3.2.1) dipenuhi untuk $u \notin N$ sedemikian hingga $P(N) = 0$, maka $\tilde{g}(\theta,u)$ adalah fungsi random separabel. Untuk memperlihatkan hal ini dicatat bahwa jika $\tilde{g}(\theta,u) \in F$ untuk semua $\theta \in I \cap S$ dimana F adalah himpunan bagian tertutup dari X dan $S \in V$, maka $A(\theta,u) \subset A(S,u) \subset F$ untuk setiap $\theta \in S$ dan akibatnya $\tilde{g}(\theta,u) \in F$ untuk setiap θ dalam S

Misalkan G menyatakan sembarang himpunan terbuka dalam Θ. Maka G dapat dinyatakan sebagai $G = \bigcup_k S_k$ dari himpunan-himpunan bagian V,

sehingga diperoleh :

$$\tilde{g}(\theta,u) \in F \text{ untuk semua } \theta \in I \cap G,\ u \notin N\ ,$$

yang berarti

$$\tilde{g}(\theta,u) \in F \text{ untuk sembarang } \theta \in G$$

Jadi terbukti bahwa $\tilde{g}(\theta,u)$ adalah fungsi random separabel.

Untuk menyusun fungsi random separabel ekuivalen stokhastik ke $g(\theta,u)$, cukup ditentukan atau dicari suatu fungsi $\tilde{g}(\theta,u)$ yang memenuhi (3.2.1) dan sama dengan fungsi $g(\theta,u)$ dengan probabilitas 1.

Karena sudah terpenuhinya kondisi (3.2.1) oleh fungsi $\tilde{g}(\theta,u)$, sekarang akan dibuktikan teorema 3.2.1. Ambil $L \in X$, suatu himpunan terbilang dari titik-titik yang rapat di sembarang tempat. Misal $\mathfrak{M}_o$ menyatakan kelas komplemen dari bola-bola dengan jari-jari rasional dan pusat pada titik-titik dari L. Misalkan $\mathfrak{M}$ menyatakan kelas irisan dari himpunan-himpunan terbuka yang menjadi anggota $\mathfrak{M}_o$. Selanjutnya untuk setiap $S \in V$, pandang fungsi random $g(\theta,u)$ yang hanya didefinisikan untuk $\theta \in S$. Bentuk barisan $I = I(S)$ dan himpunan $N(\theta) = N_s(\theta)$ sesuai dengan lemma 3.2.2.

Didefinisikan

$$J = \bigcup_{S\in V} I(S) \;, \qquad N_\theta = \bigcup_{S\in V} N_s(\theta) \;,$$

dan $\quad \tilde{g}(\theta,u) = g(\theta,.u)$, jika $\theta \in J$ atau $u \notin N_\theta$.

Pandang jika $u \in N_\theta$ dan $\theta \notin J$.Didefinisikan sebarang fungsi $\tilde{\tilde{g}}(\theta,u)$, sedemikian sehingga $\tilde{g}(\theta,u) \in A(\theta,u)$. Karena untuk semua $\theta \in J$ nilai fungsi $\tilde{g}(\theta,u)$ dan $g(\theta,u)$ sama, maka dari definisi $\tilde{g}(\theta,u) \in A(\theta,u)$ untuk sebarang θ dan u, himpunan $A(\theta,u)$ yang dibentuk untuk fungsi $\tilde{g}(\theta,u)$ dan $g(\theta,u)$ juga sama.

Sehingga jika diambil $\theta \notin J$, diperoleh :

$$\tilde{g}(\theta,u) \neq g(\theta,u)$$

atau

$$\{ u;\ g(\theta,u) \neq \tilde{g}(\theta,u) \} \subset N_{\theta} ,$$

yang berakibat

$$P \{\tilde{g}(\theta,u) = g(\theta,u)\} = 1 ,$$

sehingga fungsi random yang didefinisikan pada Θ ke dalam X akan ekuivalen stokhastik ke fungsi random separabel. Jadi theorema terbukti.

Selanjutnya teorema 3.2.1 diatas akan diperluas untuk fungsi random dengan range dalam ruang kompak lokal separabel.

Teorema 3.2.2

Misal X menyatakan ruang kompak lokal separabel dan Θ menyatakan ruang metrik separabel sembarang. Untuk sembarang fungsi random $g(\theta,u)$ yang didefinisikan pada Θ dengan range (jangkauan) didalam X, terdapatlah suatu fungsi random separabel ekuivalen stokhastik $\tilde{g}(\theta,u)$ dengan range didalam perluasan kompak $\tilde{X}$ dari ruang $X(\tilde{X} \supset X)$.

Bukti :

Bukti terlihat dari kenyataan bahwa setiap ruang separabel kompak lokal X dapat dipandang sebagai subset (himpunan bagian) dari himpunan kompak $\tilde{X}$. Sebagai contoh, jika $g(\theta,u)$ adalah fungsi random dengan range didalam ruang dimensi hingga X, maka dengan melengkapi X dengan titik "berjarak tak hingga", mudah kita dapatkan ruang kompak $\tilde{X} = X \cup \{ \infty \}$ dengan metrik baru sedemikian hingga setiap himpunan tertutup $F \subset X$ (dalam ruang topologi X) juga tertutup didalam $\tilde{X}$ (sehubungan dengan metrik baru tersebut).

Teorema 3.2.3

Misal Θ menyatakan ruang separabel dan $g(\theta,u)$ menyatakan suatu fungsi random. Maka sembarang himpunan terbilang dari titik-titik yang rapat disetiap tempat dalam Θ dapat menggantikan himpunan separabilitas untuk fungsi random $g(\theta,u)$.

Bukti :

Misal $V = \{ S \}$ menyatakan himpunan terbilang dari bola-bola dalam Θ, seperti telah diberikan pada bukti teorema 3.1.1, $J = \{\theta_k,\ k = 1,2,\ \ldots,\ n,\ \ldots\}$ menyatakan himpunan separabilitas dari fungsi random $g(\theta,u)$, N menyatakan himpunan harga-harga u yang muncul dalam definisi separabilitas dan Λ menyatakan sembarang himpunan terbilang dari titik-titik yang rapat disetiap tempat didalam Θ . Misalkan pula B(S,u) menyatakan tutupan dari himpunan harga-harga $g(\gamma_k,u)$ untuk titik γ_k yang meliputi $\Lambda \cap S$ dan $N(\dot{S},k)$ menyatakan event bahwa $g(\theta_k,u) \notin B(S,u)$, jika $\theta_k \in S$. Event-event N(S,k) ini mempunyai probabilitas 0. Untuk memperlihatkan hal ini, misalnya $\{ \gamma_r \}$ untuk $r = 1,2,\ \ldots,\ n,\ \ldots$ menyatakan sembarang barisan dari titik-titik didalam $\Lambda \cap S$ yang memusat ke θ_k , Maka

$$P\{\ g(\theta_k,u) \notin B(S,u)\} \leq P\{ \underline{\lim}_{r\to\infty} \ \rho(g(\theta_k,u),\ g(\gamma_r,u) > 0\ \}$$

$$\leq \lim_{n\to\infty}\ P\{ \underline{\lim}_{r\to\infty} \rho(g(\theta_k,u),\ g(\gamma_r,u)) > \frac{1}{n}\ \}$$

$$\leq \lim_{n\to\infty}\ \underline{\lim}_{r\to\infty} P\{ \rho(g(\theta_k,u),\ g(\gamma_r,u)) > \frac{1}{n}\ \} = 0$$

Misalkan $N' = \bigcup_{S} \bigcup_{\theta_k \in S} N(S,k)$

Maka $P(N') = 0$. Jika $u \notin N \cup N'$ dan $g(\gamma,u) \in F$, untuk semua $\gamma \in \Lambda \cap G$, dimana G adalah himpunan terbuka dan $F \subset X$ adalah tertutup, maka untuk setiap $\theta_k \in G$ dan S sedemikian hingga $\theta_k \in S \subset G$, berlaku :

$$g(\theta_k,u) \in B(S,u) \subset F$$

Dari definisi himpunan $\{\ \theta_k\ \}$, tampak bahwa $g(\theta,u) \in F$, untuk semua $\theta \in G$ dan $u \notin N \cup N'$. Sehingga himpunan Λ memenuhi kondisi dalam definisi himpunan separabilitas dari fungsi random.