BAB III

ORTHOGONALITAS RUANG HILBERT

3.1 RUANG HILBERT

Diberikan H yang menunjukkan ruang linier dari field bilangan komplek dan diberikan (x,y) yang menunjukkan fungsi nilai komplek yang didefinisikan x,y $\in$ H dengan sifat-sifat berikut ini :

a. $(x,x) \geq 0$

b. $(x,x) = 0$ jika hanya jika $x = 0$

c. $(x,y) = \overline{(y,x)}$

d. $(\lambda x_1+\mu x_2,y) = \lambda(x_1,y)+\mu(x_2,y)$

dimana (x,y) dinamakan perkalian skalar elemen x dan y pada ruang H dan dinyatakan dengan :

$$(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \, y_k$$

Perkalian skalar ini digunakan untuk menjabarkan konsep :

- panjang vektor x
- jarak antara dua vektor
- sifat orthogonal dua vektor

Panjang vektor x didefinisikan sebagai $\sqrt{(x,x)}$ dan dinotasikan dengan : $||x||$.

Jarak antara dua vektor x dan y didefinisikan :

$$\rho(x,y) = ||x-y|| = \sqrt{(x-y,x-y)}$$

Beberapa sifat produk skalar (x,y) :

1. $|(x,y)|^2 \le (x,x)(y,y)$ atau $|(x,y)| \le ||x||\,||y||$ pertidaksamaan ini disebut pertidaksamaan Cauchy - schwarz.
2. $||x+y|| \le ||x|| + ||y||$ pertidaksamaan ini disebut pertidaksamaan tringle.

Bukti :

1. $|(x,y)|^2 \le (x,x)(y,y)$

$$|(x,y)|^2 = \left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \; y_k \right|^2$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k \; y_k \right)^2$$

$$\le \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} y_k^2 \right)$$

$$= (x,x)\;(y,y)$$

Jadi $|(x,y)|^2 \le (x,x)(y,y)$

2. $|x+y|| \le ||x|| + ||y||$

$$|x+y|| = \sqrt{(x+y\;,\;x+y)}$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{\infty} (x_k + y_k)^2 \right]^{1/2}$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{\infty} (x_k^2 + x_k \; y_k + y_k x_k + y_k^2) \right]^{1/2}$$

$$= \left[(x,x) + (x,y) + (y,x) + (y,y) \right]^{1/2}$$

$$\leq \left[(x,x) + 2 \, |(x,y)| + (y,y) \right]^{1/2}$$

$$\leq \left[(x,x) + 2 \sqrt{(x,x)} \sqrt{(y,y)} + (y,y) \right]^{1/2}$$

$$= \left[(\sqrt{(x,x)} + \sqrt{(y,y)})^2 \right]^{1/2}$$

$$= ||x|| + ||y||$$

Jadi $|x+y|| \leq ||x|| + ||y||$

Definisi 3.1.1:

Suatu ruang linier X dengan perkalian skalar seperti yang didefinisikan diatas dinamakan **ruang Hilbert** jika syarat-syarat diatas (a-d) dipenuhi.

Sekarang ambil $x(\theta)$ menunjukkan fungsi yang didefinisikan dalam sembarang himpunan Θ dalam H dan diberikan $\psi(\theta)$ menunjukkan fungsi non negatif yang didefinisikan dalam Θ dengan mengamsumsikan sembarang nilai positif terkecil.

Elemen h pada H dinamakan "Limit fungsi $x(\theta)$" jika

$\psi(\theta) \to 0$ dan ditulis dalam bentuk :

$$h = \lim_{\psi(\theta)\to 0} x(\theta) \qquad \text{atau ditulis}$$

$$x(\theta) \longrightarrow h \quad \text{jika} \quad \psi(\theta) \longrightarrow 0$$

jika untuk semabarang positip ε ada suatu positip δ sedemikian sehingga :

$$\| x(\theta) - h \| < \varepsilon \quad \text{untuk } 0 < \psi(\theta) < \delta \ .$$

Berikut ini lemma untuk adanya sebuah limit :

Lemma 3.1.1 :

Untuk limit : $\lim_{\psi(\theta)\to 0} x(\theta)$ ada maka syarat perlu dan cukup adalah adanya :

$$\lim_{\psi(\theta')+\psi(\theta'')\to 0} (x(\theta') , x(\theta'')) = A \qquad \text{........(3.1.1)}$$

Bukti :

syarat perlu (==>)

Bukti perlunya dimulai dari sifat kontinuitas produj skalar. Jika $\lim_{\psi(\theta)\to 0} x(\theta)$ maka :

$$\lim_{\psi(\theta')+\psi(\theta'')\to 0} (x(\theta') , x(\theta'')) = (h,h) \qquad \text{......(3.1.2)}$$

syarat cukup (<==)

Untuk membuktikan syarat cukupnya perlu dicatat bahwa :

$$\| x(\theta') - x(\theta'') \|^2 = (x(\theta') - x(\theta'') , x(\theta') - x(\theta''))$$

$$= (x(\theta') , x(\theta')) - (x(\theta') , x(\theta'')$$

$$-(x(\theta''),x(\theta') + (x(\theta''),x(\theta''))$$

Dalam persamaan (3.1.1) bilangan A adalah nonnegatif. Karena itu untuk sembarang positip ε maka ada positip δ sedemikian sehingga $\| x(\theta') - x(\theta'') \| < \varepsilon^2$ dimana $0 < \psi(\theta') + \psi(\theta'') < \delta$. Sekarang ada barisan $\{\theta_n\}$ sedemikian sehingga $0 < \psi(\theta_n) < 1/n$ dan $\{x(\theta_n)\}$ merupakan elemen barisan.

Berdasarkan kelengkapan ruang, maka limit lim $x(\theta_N)$ = h maka :

$\| x(\theta) - h \| \leq \| h - x(\theta) \| + \| x(\theta_n) - x(\theta) \| \longrightarrow 0$ dengan $n \longrightarrow \infty$ jika $\psi(\theta_n) + \psi(\theta) \longrightarrow 0$ dengan $n \longrightarrow \infty$. Terbuktilah lemma diatas.

3.2 ORTHOGONALITAS RUANG HILBERT

Didalam ruang Hilbert H dapat dibentuk vektor-vektor yang saling berhubungan. Bentuk-bentuk tersebut dapat berupa orthogonal atau non orthogonal.

Definisi 3.2.1:

Dua vektor x dan y dikatakan orthogonal jika (x,y) = 0 dan dituliskan sebagai $x \perp y$. Dua himpunan A dan B yang berada dalam H dikatakan orthogonal ($A \perp B$) jika setiap vektor $x \in A$ adalah orthogonal pada setiap vektor $y \in B$. Vektor x dan y yang orthogonal maka :

$$||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 .$$

Definisi 3.2.2:

Sebuah subset H' dikatakan subruang jika subset H' adalah linier dan tertutup.

Theorema 3.2.1:

Untuk sembarang subruang F dari ruang Hilbert H dan untuk sembarang vektor $x \in H$ maka ada dekomposisi tunggal : $x = x_F + x_N$ dimana $x_F \in F$ dan $x_N \perp F$.

Bukti :

Diasumsikan bahwa : $x = x_F + x_N$

$$= x_{F1} + x_{N1}$$

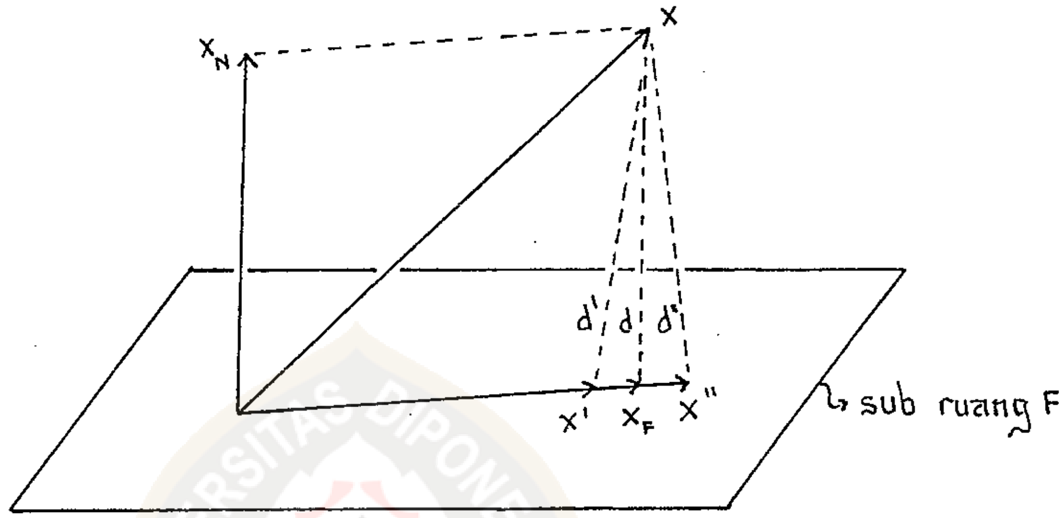
dimana x_F , $x_{F1} \in F$ dan x_N , $x_{N1} \in N = F^{\perp}$, maka :

$$x_F - x_{F1} = x_{N1} - x_N .$$

Karena $x_F - x_{F1} \in F$ dan $x_{N1} - x_N \in N$ maka dapat diperlihatkan bahwa :

$$x_F - x_{F1} \in F \cap F^{\perp} = \{0\}.$$

Sehingga $x_F = x_{F1}$ dan $x_N = x_{N1}$.



Gambar 3.1 : proyeksi x_F vektor x pada sub ruang F

Vektor x_F disebut proyeksi vektor x kedalam subruang F (lihat gambar 3.1). Proyeksi x_F vektor x kedalam subruang F memiliki sifat elementer bahwa jarak antara x dan vektor x' yang berada F mencapai nilai minimum (d terkecil/terpendek) jika hanya jika $x' = x_F$. Dapat dilihat bahwa himpunan semua vektor y yang orthogonal pada F merupakan subruang dan disebut orthogonal koplemen yang dinotasikan dengan N.

Jadi N adalah orthogonal koplemen pada F yang dinyatakan dengan :

$$H = F \oplus N$$

dimana $\oplus$ menunjukkan jumlahan orthogonal subruang.

Relasi diatas dapat dikatakan bahwa ruang H adalah jumlahan orthogonal subruang F dan N.

Persamaan : $H_1 = F_1 \oplus F_2 \oplus \ldots \oplus F_n \oplus \ldots$

dimana H_1 dan F_k (k=1,2,3,...) adalah subruang dari H. Hal ini berarti :

Subruang F_i dan F_j untuk sembarang i dan j $(i \neq j)$ adalah orthogonal dan sembarang vektor $x \in H$ dapat dijabarkan dalam bentuk :

$$x = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n + \ldots$$

dimana $x_N \in F_n$ untuk n=1.2.... dan H_1 dikatakan jumlahan subruang F_n.

Definisi 3.2.2:

Diberikan G menunjukkan himpunan bagian dari H. Pandang jumlahan yang berbentuk :

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k g_k$$

dimana : n adalah sembarang integer

λ_k adalah sembarang bilangan komplek

$g_k \in G$. untuk k=1.2.3,....n.

Himpunan yang mempunyai jumlahan yang demikian disebut Linier Hull dari G. Tutupan linier hull G disebut closed linier hull G.

Definisi 3.2.3 :

Diberikan A menunjukkan operator pemetaan linier dari H kedalam H.
Operator-operator menpunyai norma finite yang dinamakan dengan bounded.

Definisi 3.2.4 :

Untuk sembarang operator bounded A maka ada operator bounded A^* yang memenuhi relasi :

$$(Ax,y) = (x,A^*y)$$

Untuk setiap pasangan elemen x,y dalam H.Jika $A = A^*$ maka A dikatakan operator bounded self-adjoint.

Definisi 3.2.5 :

Diberikan operator S yang memetakan H kedalam H yang disebut **operator unitary** jika operator S berlaku produk skalar sebagai berikut :

$$(Sx.Sy) = (x,y)$$

3.3 VARIABEL RANDOM DALAM RUANG HILBERT

Seperti dalam pembahasan sub bab 2.2 dijelaskan bahwa suatu variabel random ζ dapat dijabarkan sebagai suatu fungsi dari kejadian elementer, $\zeta = f(u)$ untuk $u \in U$. Variabel random ini selanjutnya dipandang dalam Ruang Hilbert dengan syarat tertentu.

Definisi 3.3.1 :

Himpunan nilai-komplek variabel random $\zeta = f(u)$ untuk $u \in U$ sedemikian sehingga $E\,|\zeta|^2 < \infty$ dinamakan ruang Hilbert $L_2=L_2(U,\mathfrak{S},P)$ dari variabel-variabel random ruang probabilitas $\{U,\mathfrak{S},P\}$.

Produk skalar dalam L_2 didefinisikan dengan :

$$(\zeta\ ,\ \eta) = E\,\zeta\,\bar{\eta}$$

Norma $\|\ \zeta\ \|$ dari variabel random ζ :

$$\|\ \zeta\ \| = (\ E\ |\ \zeta\ |^2\ )^{1/2}$$

Dua variabel random ζ dan η dikatakan orthogoanal jika :

$$(\zeta\ ,\ \eta) = E\,\zeta\,\bar{\eta} = 0$$

Kuadrat norma $\|\ \zeta\ \|^2$ dari variabel random real ζ sama dengan momen order kedua :

$$\|\ \xi\ \|^2 = E\ |\ \zeta\ |^2$$

dan jika $E\,\zeta = 0$ itu sama dengan varian.

Jika ζ dan η adalah real dan $E\,\zeta = E\,\eta = 0$ maka kedua variabel tersebut ortogonal dan tak terhubung.

Contoh :

Kita lihat ruang Euclid R^n. Ruang R^n adalah ruang Hilbert dengan produk skalar misalkan dengan variabel random ξ . η yang didefinisikan sebagai berikut :

$$(\xi\ ,\ \eta) = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \ .\ .\ .\ .\ . + \xi_n\eta_n$$

dimana : $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$

$\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$.

Normanya dapat ditentukan sebagai berikut :

$$\| \xi \| = (\xi , \xi)^{1/2}$$

$$= (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots\ldots + \xi_n^2)^{1/2}$$

Jika n = 3, produk skalarnya menjadi :

$$(\xi , \eta) = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3$$

dan sifat orthogonalitasnya :

$$(\xi , \eta) = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3 = 0$$

Definisi 3.3.2 :

Suatu fungsi random nilai-komplek $\zeta(\theta)$ untuk $\theta \in \Theta$ dinamakan suatu *fungsi random Hilbert* jika :

$$E \mid \zeta(\theta) \mid^2 < \infty \quad , \theta \in \Theta \, .$$

Fungsi random Hilbert dapat dibawa dalam suatu fungsi yang didefinisikan dalam ruang Hilbert L_2 :

$$\theta \longrightarrow \zeta(\theta) = f(\theta,u) \in L_2 \, .$$

Jika Θ adalah suatu interval real (a.b) fungsi random Hilbert dapat diitulis sebagai suatu kurva dalam ruang Hilbert L_2. Bentuk $\zeta = \zeta(\theta)$ untuk $\theta \in (a,b)$ adalah persamaan parametrik untuk kurva. Pada sub bab ini kita hanya memandang fuangsi random Hilbertnya saja.

Misalkan ada fungsi nonnegatif yang didefinisikan dalam Θ yaitu diasumsikan sembarang nilai positip terkecil.

Definisi 3.3.3 :

Suatu variabel random $\eta \in L_2$ dikatakan limit kuadrat-mean (atau disingkat m.s.limit) dari suatu fungsi random Hilbert $\zeta(\theta)$ dengan $\psi(\theta) \longrightarrow 0$ jika $\zeta(\theta) \longrightarrow \eta$ yaitu jika untuk sembarang $\varepsilon > 0$ maka ada suatu $\delta > 0$ sedemikian sehingga :

$$E \mid \eta - \zeta(\theta) \mid^2 < \varepsilon^2$$

untuk setiap θ sedimikian sehingga $0 < \psi(\theta) < \delta$.

Pada hal khusus jika Θ adalah suatu ruang metrik dengan metrik $r(\theta_1,\theta_2)$, fungsi $\zeta(\theta)$ dikatakan kuadrat-mean kontinu di titik $\theta_o \in \Theta$ jika :

$$E \mid \zeta(\theta_1) - \zeta(\theta_o) \mid^2 \longrightarrow 0 \text{ untuk } r(\theta_1,\theta_2) \longrightarrow 0.$$

Definisi 3.3.4 :

Kovarian $B(\theta_1,\theta_2)$, dimana $\theta_1,\theta_2 \in \Theta$, dari suatu fungsi random Hilbert $\zeta(\theta)$ didefinisikan dengan :

$$B(\theta_1,\theta_2) = E\,\zeta(\theta_1)\,\overline{\zeta(\theta_2)}$$

$$= (\ \zeta(\theta_1),\zeta(\theta_2)\ )$$

Lemma 3.3.1 :

Untuk suatu fungsi random $\zeta(\theta)$ yang mempunyai limit kuadrat-mean dengan $\psi(\theta) \longrightarrow 0$ maka syarat perlu dan cukupnya adalah limit lim $B(\theta_1,\theta_2)$ dengan $\psi(\theta_1) + \psi(\theta_2) \longrightarrow 0$ ada.

Jika syarat tersebut diatas dipunuhi maka :

$$E \mid \eta \mid^2 = \lim_{\psi(\theta_1)+\psi(\theta_2) \longrightarrow 0} B(\theta_1,\theta_2)$$

dimana : $\eta = \lim\limits_{\psi(\theta) \longrightarrow 0} \zeta(\theta)$.

Bukti :

Pada dasarnya pembuktian lemma diatas seperti pembuktian lemma 3.3.1 hanya saja berlaku untuk variabel random η.

syarat perlu (==>)

Diketahui fungsi random $\zeta(\theta)$ mempunyai limit kuadrat-mean dengan $\psi(\theta) \longrightarrow 0$. Jika fungsi random $\zeta(\theta)$ dengan limit kuadrat-mean tersebut dimisalkan variabel random η_1 dan η_2 maka :

$$\eta_1 = \lim_{\psi(\theta_1) \longrightarrow 0} \zeta(\theta_1)$$

$$\eta_2 = \lim_{\psi(\theta_2) \longrightarrow 0} \zeta(\theta_2).$$

Produk skalarnya berbentuk :

$$(\eta_1,\eta_2) = \lim_{\psi(\theta_1)+\psi(\theta_2) \longrightarrow 0} (\zeta(\theta_1), \zeta(\theta_2))$$

$$E(\eta_1\eta_2) = \lim_{\psi(\theta_1)+\psi(\theta_2) \longrightarrow 0} B(\theta_1,\theta_2)$$

syarat cukup (<==)

Untuk membuktikan syarat cukupnya dicatat bahwa :

$$\| \zeta(\theta_1) - \zeta(\theta_2) \|^2 = (\zeta(\theta_1) - \zeta(\theta_2) , \zeta(\theta_1) - \zeta(\theta_2))$$

$$= (\zeta(\theta_1) , \zeta(\theta_1)) - (\zeta(\theta_1) , \zeta(\theta_2))$$

$$-(\zeta(\theta_2),\zeta(\theta_1)) + (\zeta(\theta_2),\zeta(\theta_2))$$

Pada lemma diatas $\lim_{\psi(\theta_1)+\psi(\theta_2) \longrightarrow 0} B(\theta_1,\theta_2)$ ada sehingga untuk sembarang positip ε maka ada positip δ sedemikian sehingga $\| \zeta(\theta_1) - \zeta(\theta_2) \| < \varepsilon^2$ dimana $0 < \psi(\theta_1) + \psi(\theta_2) < \delta$. Sekarang ada barisan $\{\theta_n\}$ sedemikian sehingga $0 < \psi(\theta_n) < 1/n$ dan $\{\zeta(\theta_n)\}$ merupakan elemen barisan. Berdasarkan kelengkapan ruang, maka limit $\lim \zeta(\theta_n) = \eta$. Terbuktilah lemma diatas.