BAB II
MATERI PENUNJANG

2.1. UKURAN

Didefinisikan himpunan U dan klas $\mathfrak{S}$ dari himpunan bagian U sehingga setiap kejadian (event) A dapat diartikan sebagai beberapa himpunan bagian dari himpunan U yang berada dalam $\mathfrak{S}$. Sembarang kejadian A dapat diartikan sebagai gabungan dari elemen-elemen U yang berada dalam A. Titik-titik dalam U disebut kejadian-kejadian elementer dan U disebut ruang dari kejadian-kejadian elementer.

Sebagai contoh, jika suatu eksperimen memuat gambaran grafik dari fungsi random kontinu dalam interval tertentu dari waktu [a,b], maka U dapat diartikan sebagai ruang dari fungsi kontinu pada interval [a,b].

U menunjukkan suatu himpunan abstrak, yang disebut dengan ruang. Dimisalkan bahwa definisi dan sifat-sifat sederhana dari operasi aljabar dalam himpunan diketahui dan dinyatakan hubungan dualitas :

$$\overline{\bigcap_k A_k} = \bigcup_k \overline{A_k} \qquad \text{...........(2.1)}$$

$$\overline{\bigcup_k A_k} = \bigcap_k \overline{A_k} \qquad \text{...........(2.2)}$$

dimana indeks k berada dalam sembarang himpunan-himpunan yang mempunyai harga.

Definisi 2.1.1 :

Suatu klas tidak kosong $\mathcal{R}$ dari himpunan-himpunan bagian U disebut suatu aljabar dari himpunan-himpunan U jika memiliki sifat-sifat sebagai berikut :

a. $A \in \mathcal{R}$ dan $B \in \mathcal{R}$ maka $A \cup B \in \mathcal{R}$

b. $A \in \mathcal{R}$ maka $\overline{A} \in \mathcal{R}$

Akibat sederhana dari definisi diatas : karena $A \cup \overline{A}$, dan $A \in \mathcal{R}$ maka $U \in \mathcal{R}$. Hal ini berarti bahwa himpunan kosong berada dalam himpunan-himpunan aljabar.

Jika $A \in \mathcal{R}$ dan $B \in \mathcal{R}$, maka berdasarkan (2.1) dan (2.2) :

$A \cap B = \overline{(\overline{A} \cup \overline{B})} \in \mathcal{R}$ dan $A \backslash B = A \cup \overline{B} \in \mathcal{R}$.

Contoh :

$U = \{ 1,2,3,4 \}$

$\mathfrak{S} = \{ \{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,2,3\},\{1,2,4\},$
$\{2,3\},\{2,3,4\},\{3,4\},\{1,3,4\},\emptyset \}$

$\mathfrak{S} = \sigma$-aljabar

Definisi 2.1.2 :

Suatu aljabar dari himpunan-himpunan $\mathfrak{S}$ disebut suatu σ-aljabar jika untuk sembarang barisan dari himpunan-himpunan $A_k \in \mathfrak{S}$, dimana $k = 1,2,\dots, \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{S}$. Himpunan-himpunan $A \in \mathfrak{S}$ disebut $\mathfrak{S}$-terukur.

Karena $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{A}_k}$, maka interseksi dari sembarang gabungan dari himpunan-himpunan contabel yang berada dalam $\mathfrak{S}$ juga berada dalam $\mathfrak{S}$).

Definisi 2.1 3:

Suatu himpunan fungsi W disebut aditif, jika dianggap harga-harga tak berhingga dan jika untuk sembarang barisan berhingga dari himpunan-himpunan $A_k \in \mathscr{A}$ (untuk k=1,2,...,n) adalah pasangan saling asing (yaitu :$A_k \cap A_r = \emptyset$, untuk $k \neq r$ dimana k,r = 1,2,...,n dan $\emptyset$ adalah himpunan kosong),sedemikian sehingga :

$$\bigcup_{k=1}^{n} A \in \mathscr{A}$$

sehingga didapat :

$$W\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} W(A_k) \qquad .....(2.3)$$

Jika persamaan (2.3) untuk sembarang gabungan yang contabel. yaitu jika :

$$W\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} W(A_k)$$

untuk sembarang barisan dari himpunan-himpunan $A_k \in \mathscr{R}$, ($\mathscr{R}$ adalah klas tidak kosong dari himpunan-himpunan bagian U),dimana $A_k \cap A_r = \emptyset$ bila $k \neq r$, untuk k,r = 1,2,....,n sedemikian sehingga :

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A \in \mathscr{A}$$

maka himpunan fungsi W = W(A) disebut aditif countabel (atau aditif lengkap).

Definisi 2.1.4 :

Suatu fungsi himpunan aditif contabel nonnegatif $\mu=\mu(A)$ didefinisikan dalam suatu σ-aljabar dari himpunan-himpunan $\mathfrak{S}$ dan memenuhi persamaan $\mu(\emptyset)=0$ yang disebut dengan Ukuran.

Jika suatu σ-aljabar dari himpunan-himpunan $\mathfrak{S}$ didefinisikan dalam suatu himpunan U disebut dengan suatu ruang ukuran $\{U,\mathfrak{S},\mu\}$ atau ruang terukur.

Dalam masalah khusus, jika U merupakan ruang sampel dan jika P menunjukkan suatu ukuran yang didefinisikan dalam $\mathfrak{S}$ sedemikian sehingga P (U) = 1, maka tripel $\{U,\mathfrak{S},P\}$ disebut dengan suatu Ruang Probabilitas.
Selanjutnya akan dibahas beberapa sifat dari ukuran.

Theorema 2.1.1:

a. Jika A dan $B \supset A$ berada dalam $\mathfrak{S}$, maka $\mu(A) \le \mu(B)$ dan jika $\mu(A) \ne \infty$, maka $\mu(B\backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$.

b. Jika { A_n } adalah barisan-barisan yang contabel atau infinit dari himpunan-himpunan yang berada dalam $\mathfrak{S}$ maka $\mu\left(\bigcup_n A_n\right) \le \sum_n \mu(A_n)$

Bukti :

a. Karena $B \backslash A \in \mathfrak{S}$ dan $B = A \cup (B \backslash A)$ (untuk $A \subset B$), maka diperoleh : $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \backslash A)$

sehingga : $\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$

b. Ambil $C_1 = A_1$ dan $C_n = A_n \backslash (\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k)$ untuk $n = 2,3,\ldots$ Kemudian himpunan-himpunan C_n berada dalam $\mathfrak{S}$ dan pasangan disjoint (yaitu $C_n \cap C_r = \emptyset$ untuk $n \neq r$).

Oleh karena itu :

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

dan $\mu(C_n) \leq \mu (A_n)$, maka :

$$\mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \right) = \mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu (C_n)$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu (A_n)$$

2.2. FUNGSI-FUNGSI TERUKUR

Dalam suatu eksperimen, tidak dapat ditentukan hasilnya dengan pasti, namun demikian dapat ditentukan koleksi-koleksi (himpunan) dari setiap hasilnya (yang mungkin). Apabila eksperimen itu dapat diulang dikatakan suatu Eksperimen Random (Percobaan Random). Kumpulan hasil yang mungkin diesbut Ruang Sampel. Jadi variabel random adalah bilangan (variabel) yang berhubungan dengan kemungkinan hasil dari sebuah eksperimen.

Misalkan C menyatakan suatu himpunan dari setiap hasil yang mungkin dari suatu percobaan random, maka C dapat dinyatakan sebagai ruang sampel. Jika $A \subset C$, maka P(A) menyatakan probabilitas bahwa suatu hasil percobaan random adalah di A. Sebuah variabel random dapat dianggap sebagai suatu fungsi yang menunjukkan satu dan hanya satu bilangan riil yaitu $X(c) = x$, untuk setiap $c \in C$.

Suatu variabel random ξ dapat digambarkan sebagai suatu fungsi dari suatu kejadian elementer, $\xi = f(u)$ untuk $u \in U$.Disis lain, dalam teori probabilitas dasar, suatu variabel random ξ dikarakterisasikan oleh fungsi distribusi :

$$F(x) = P\{ \xi < x \}.$$

Sedangkan dalam teori ukuran pengertian kejadian $\{ \xi < x \}$ ditunjukkan dengan $\{ u, f(u)<x \}$.Oleh karena itu dalam membahas fungsi distribusi dari sebuah variabel random, maka himpunan $\{ u, f(u)<x \}$ harus untuk sembarang harga x yang real berada dalam $\mathfrak{S}$. Dalam bab ini akan dibahas klas-klas dari fungsi yang didefinisikan pada ruang terukur $\{U,\mathfrak{S},\mu\}$.

Definisi 2.2.1:

$\mathfrak{S}$ menunjukkan suatu σ-aljabar dari himpunan-himpunan ruang U. Diambil f(u) menunjukkan suatu fungsi yang didefinisikan pada suatu himpunan $\mathfrak{S}$-terukur N dan mengasumsikan harga-harga real (dan kemungkinan harga-harga $\pm\infty$). Sehingga suatu fungsi f(u) dikatakan $\mathfrak{S}$-terukur jika untuk setiap harga real x,himpunan { u, f(u)<x } adalah $\mathfrak{S}$-terukur.

Definisi 2.2.2 :

Misal x suatu ruang topologi. Jika terdapat σ-aljabar terkecil B dalam x sedemikian sehingga setiap himpunan terbuka dalam x menjadi anggota B maka anggota-anggota B disebut himpunan-himpunan borel dalam x.

Definisi 2.2.3 :

Fungsi f(x) untuk $x \in R$ dikatakan sebagai suatu fungsi Borel jika untuk sembarang real a himpunan { x, f(x) < a } adalah suatu himpunan Borel.

Theorema 2.2.1 :

A menunjukkan sembarang himpunan Borel dalam ruang E_n dimensi n dan $f_1(u),\ldots,f_n(u)$ menunjukkan fungsi $\mathfrak{S}$-terukur yang semuanya didefinisikan dalam beberapa himpunan $M \in \mathfrak{S}$.

Maka himpunan :

$$\{ u;\ u \in M,\ (f_1(u),\ldots,f_n(u)) \in A \}$$

adalah $\mathfrak{S}$-terukur.

Bukti :

Karena :

$\{ u; u \in M, (f_1(u),\ldots,f_n(u)) \in A'\backslash A'' \}$

$$= \{ u; u\in M, (f_1(u),f_2(u),\ldots,f_n(u)) \in A' \} \setminus \{ u; u\in M, (f_1(u),f_2(u),\ldots,f_n(u)) \in A'' \}$$

$\{ u; u\in M, (f_1(u),f_2(u),\ldots,f_n(u)) \in \bigcup_{k=1}^{\infty} A^{(k)} \}$

$$= \bigcup_{k=1}^{\infty} \{ u; u\in M, (f_1(u),f_2(u),\ldots,f_n(u)) \in A^{(k)} \}$$

klas $\mathscr{A}$ dari himpunan-himpunan A yang termuat dalam E_n sedemikian sehingga himpunan :

$$\{ u; u \in M, (f_1(u),f_2(u),\ldots,f_n(u)) \in A \}$$

adalah $\mathfrak{S}$-terukur yang merupakan suatu σ-aljabar. $\mathscr{A}$ berisi interval tak berhingga dimensi-n

$$I_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} = \{ (x_1,\ldots,x_n); x_1<\alpha_1,\ldots,x_n<\alpha_n \}$$

Karena :

$$\{ u; u \in M, (f_1(u),f_2(u),\ldots,f_n(u)) \in I_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \}$$

$$= \bigcap_{k=1}^{\infty} \{ u; u \in M, (f_k(u) < a_k \}$$

Akibatnya $\mathscr{A}$ berisi semua himpunan Borel dalam E_n.

Theorema 2.2.2 :

$f_1(u).f_2(u).\ldots.f_n(u)$ menunjukkan suatu himpunan dari fungsi-fungsi $\mathfrak{S}$-terukur berhingga yang didefinisikan dalam suatu himpunan $\mathfrak{S}$-terukur M dan $\varphi(t_1,....,t_n)$ menunjukkan suatu fungsi Borel dalam ruang E_n demensi-n.

Maka fungsi $\varphi(f_1(u),f_2(u),...,f_n(u))$ untuk $u\in M$ adalah $\mathfrak{S}$-terukur.

Bukti :

Untuk sembarang real a, himpunan :

$$B_\alpha = \{ (t_1,....,t_n);\varphi(t_1,....,t_n)<a \}$$

adalah suatu himpunan bagian dari E_n. Himpunan :

$\{ u: u \in M, \varphi(f_1(u),f_2(u),...,f_n(u)) < a \}$

$$= \{ u; u \in M, (f_1(u),f_2(u),...,f_n(u)) \in B_\alpha \}$$

adalah $\mathfrak{S}$-terukur, dengan dasar theorema 2.2.1 ,maka terbuktilah theorema ini.

Selanjutnya adalah pembahasan istilah-istilah yang sering digunakan.Jika μ dianggap mempunyai sifat hampir dimana-mana pada himpunan M, maka pernyataan (mod μ) sebagai penganti μ hampir dimana-mana.

Misalkan :

Jika f dan g adalah ekuivalen pada himpunan M, maka dapat ditulis $f(u)=g(u)$, $u \in M(\text{mod } \mu)$.

Selanjutnya dalam ruang probabilitas berlaku definisi dibawah ini :

Definisi 2.2.4 :

Sembarang fungsi $\mathfrak{S}$-terukur terbatas dan real (mod P) disebut suatu variabel random.

Definisi 2.2.5:

Dua variabel random $\xi_1 = f_1(u)$ dan $\xi_2 = f_2(u)$ dianggap sama jika dua variabel random tersebut ekuivalen $\xi_1 = \xi_2$ (Jika $f_1(u) = f_2(u)$ (mod P)).

Untuk setiap variabel random ξ, suatu fungsi $F(x)$ dari argumen real x, dikatakan sebagai fungsi distribusi dari variabel random ξ, dan didefinisikan :

$$F(x) = P\{ \xi < x \} = P\{ u;\ f(u) < x \}$$

Jika $\{ \xi_k = f_k(u),\ k = 1,2,\ldots,n \}$ adalah n-tupel dari variabel-variabel random, fungsi (dari n variabel real) :

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = P\{ \xi_1 < x_1, \ldots, \xi_n < x_n \}$$

$$= P\left[\bigcap_{k=1}^{n} \{ u;\ f_k(u) < x_k \} \right]$$

disebut dengan fungsi distribusi bersama dari variabel-variabel random ξ_k untuk $k = 1,2,\ldots,n$.

Jika $\varphi(t_1,\ldots,t_n)$ menunjukkan suatu fungsi Borel dalam ruang Euclid berdemensi n dan $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$

menunjukkan n variabel-variabel random dan didefinisikan $\varphi(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n) = \varphi(f_1(u),f_2(u),\ldots,f_n(u)) = F(u)$ dengan $\xi_k = f_k(u)$ untuk k =1,2,...,n. Jika fungsi $f_k(u)$ diganti suatu fungsi $f_k(u)$ (mod P), fungsi F(u) diganti dengan suatu fungsi (mod μ), maka dengan dasar theorema 2.2.2 diperoleh sifat sebagai berikut :

Jika suatu fungsi Borel $\varphi(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ dari suatu variabel-variabel random $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ adalah berhingga (mod P), maka fungsi Borel tersebut adalah variabel random juga.

2.3 INTEGRAL DALAM UKURAN

Dalam teori probabilitas, ditentukan suatu variabel random ξ, suatu harga khusus E ξ yang dikenal sebagai ekspektasi matematika diberikan oleh formula :

$$E\,\xi = \sum_{i=1} x_i \; P\{\, \xi = x_i \,\}$$

dan memiliki sifat-sifat berikut :

$$E\,(\, a\xi + b\eta \,) = a\,E\,\xi + b\,E\,\eta$$

dan pertidaksamaan $\xi \leq \eta$ berarti $E\,\xi < E\,\eta$.

Jika variabel random diubah ke sembarang fungsi yang didefinisikan dalam ruang terukur, konsep dari ekspektasi matematika menjadi konsep suatu integral.

Diasumsikan suatu ruang terukur $\{U,\mathfrak{S},\mu\}$ dan bahwa semua fungsi-fungsi adalah $\mathfrak{S}$-terukur.

Definisi 2.3.1 :

Integral : $E\xi = \int_u f(u)\,\mu(du)$, dengan $\xi = f(u)$ disebut dengan Ekspektasi Matematika dari variabel random ξ dan dinotasikan dengan $E\xi$.

Berikut adalah sifat-sifat dari integral fungsi sederhana :

jika $f(u) \geq 0$ berarti : $\int_u f(u)\,\mu(du) \geq 0$

$$\int_u k\, f(u)\,\mu(du) = k \int_u f(u)\,\mu(du)$$

dimana k adalah sembarang konstanta.

$$\int_u [f_1(u) + f_2(u)]\,\mu(du) = \int_u f_1(u)\,\mu(du) + \int_u f_2(u)\,\mu(du)$$

Selanjutnya akan dibahas theorema-theorema perubahan limit.

Theorema 2.3.1 (Lebesgue):

Misalkan $\{f_n(u)\}$ adalah suatu barisan tidak turun dari fungsi-fungsi $\mathfrak{S}$-terukur nonnegatif. Didefinisikan bahwa :

$$f(u) = \lim f_n(u) \pmod{\mu}$$

Maka :

$$\lim \int_u f_n(u)\ \mu(du) = \int_u f(u)\ \mu(du)$$

Bukti :

Untuk tiap-tiap n, $\{g_k(u)\}$ menunjukkan suatu barisan tidak turun dari fungsi-fungsi sederhana nonnegatif yang konvergen ke $f_n(u)$:

$$\lim g_{n_k}(u) = f_n(u)$$

dan didefinisikan $h_n(u) = \max_{i \le n} g_{i_n}(u)$ karena $g_{i_n}(u) \le f_i(u)$, maka diperoleh :

$$h_n(u) \le \max_{i \le n} f_i(u) = f_n(u)$$

danlim $h_n(u) \le \lim f_n(u) = f(u)$ ....(2.4)

barisan { $h_n(u)$ } adalah barisan tidak turun, yang terdiri dari fungsi-fungsi sederhana untuk semua k

$$\lim_{n\to\infty} h_n(u) \ge \lim_{n\to\infty} g_{n_k}(u) = f_k(u)$$

Akibatnya :

$$\lim_{n\to\infty} h_n(u) \ge \lim_{k\to\infty} f_k(u) = f(u)$$

Dengan berdasarkan (2.4) diperoleh :

$$f(u) = \lim_{n\to\infty} h_n(u)$$

Dari definisi integral dan formula (2.4), maka :

$$\int_U f(u)\,\mu(du) = \lim \int_U h_n(u)\,\mu(du) \le \lim \int_U f_n(u)\,\mu(du) \quad ..(2.5)$$

dilain sisi :

$$f_n(u) = \lim_{k\to\infty} g_{n_k}(u) \le \lim_{n\to\infty} h_n(u) = f(u)$$

$$f_n(u) \le f(u)$$

sehingga :

$$\lim \int_U f_n(u)\,\mu(du) \le \int_U f(u)\,\mu(du) \quad .....(2.6)$$

dari pertidaksamaan (2.5) dan pertidaksamaan (2.6) dapat diambil kesimpulan :

$$\lim \int_U f_n(u)\,\mu(du) = \int_U f(u)\,\mu(du)$$

sehingga terbuktilah theorema 2.3.1.

Dari theorema 2.3.1, jika $E\,\xi = \int_U f(u)\,\mu(du)$ maka berlaku sifat :

$$E \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k = \sum_{k=1}^{\infty} E\,\xi_k$$

2.4 PROSES STASIONER

Bagian dari proses random yang lebih khusus adalah proses stasioner. Walaupun ada perubahan waktu, karakteristik probabilistik proses tersebut tidak berubah.

Definsi 2.4.1 :

Suatu proses random $\zeta(t)$ yang didefinisikan dalam $\mathfrak{T}$ dikatakan stasioner jika sembarang n,t dan $t_1, t_2, \ldots, t_n$ sedemikian sehingga $t_i + t \in \mathfrak{T}$ (untuk $i=1,2,3,\ldots,n$), fungsi distribusi barisan vektor random $\zeta(t_1+t)$, $\zeta(t_2+t)$, $\zeta(t_3+t), \ldots, \zeta(t_n+t)$ adalah independed terhadap t.

Definisi 2.4.2 :

Fungsi momen $m_{j1,j2,\ldots,js}(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n)$ dari fungsi random $\xi(\theta)$, dimana $\theta \in \Theta$ yang didefinisikan sebagai fungsi :

$$m_{j1,j2,\ldots,js}(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n)$$

$$= E(\ [\xi(\theta_1)]^{j1}[\xi(\theta_2)]^{j2}\ldots[\xi(\theta_S)]^{js}\ )$$

dimana $jk > 0$ dengan $k=1.2.3,\ldots,s$

Definisi 2.4.3:

Fungsi kovarian $R(\theta_1,\theta_2)$ didefinisikan sebagai :

$R(\theta_1,\theta_2) = E(\ [\xi(\theta_1) - m(\theta_1)][\xi(\theta_2) - m(\theta_2)])$.

Fungsi $m(\theta)$ dinamakan nilai mean.

Untuk $\theta_1 = \theta_2 = \theta$, fungsi kovarian diberikan variansi $\sigma^2(\theta)$ dari variabel random $\xi(\theta)$;

$$R(\theta.\theta) = \sigma^2(\theta)$$

Untuk proses stasioner ($\Theta = \mathfrak{T}$), ternyata :

$m(t) = \text{konstan}$

$R(t_1,t_2) = R(\ t_1 - t_2, 0\ ) = R(t_1 - t_2)$

bahwa fungsi kovarian tergantung hanya pada selisih nilai t.Fungsi $R(t) = R(t_1+t, t_1)$ juga dikatakan fungsi kovarian dari suatu proses stasioner.

Definisi 2.4.4:

Suatu proses $\xi(t)$ dikatakan stasioner dalam arti luas jika $E\,\xi^2(t) < \infty$ dan $E\,\xi(t) = m = \text{konstan}$;

$E(\ [\xi(t_1) - m)][\xi(t_2) - m])\ = R(t_1 - t_2)$.

Untuk proses stasioner dalam arti luas , variansi σ^2 dari variabel random $\xi(t)$ adalah :

$\sigma^2 = R(0) = E\ [\ \xi(t) - m\ ]^2$.

Definsi 2.4.5 :

Jika dua variabel random ξ dan η dengan momen order dua finite yang memenuhi syarat :

$R_{\xi,\eta} = E\ [(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)] = 0$

maka variabel random ξ dan η dikatakan tak terhubung (uncorrelated).