BAB II

STRUKTUR DAN KESETIMBANGAN STRUKTUR BALOK KANTILEVER

2.1. Matriks

Definisi 2.1.1

Matriks adalah himpunan skalar (bilangan riil atau kompleks) yang disusun/dijajarkan secara empat persegi panjang (menurut baris-baris dan kolom-kolom).

Skalar-skalar itu disebut elemen matriks. Untuk batasnya

Contoh

$$A = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & -3 \\ 7 & \sqrt{2} & 10 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{---> baris 1} \\ \text{---> baris 2} \\ \text{---> baris 3} \end{array} \\ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} & \end{array}$$

kolom 1 2 3 4

Secara umum matriks dinotasikan dengan huruf besar A, B, C dan lain-lain.

Definisi 2.1.2

Matriks A_{ij} berordo m x n adalah matriks dengan jumlah elemen baris m dan elemen kolom n.

Contoh : Matriks A pada contoh di atas adalah matriks berordo 3 x 4 dengan notasi dari elemen-elemen matriks A adalah a_{ij}, i=1..3 dan j=1..4

Definisi 2.1.3

Transpose dari matriks A berordo m x n adalah matriks A^T berordo n x m yang didapatkan dari A.

Contoh

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 0 & 10 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$, dengan ordo dari A adalah (4 x 3)

Definisi 2.1.4

Matriks bujur sangkar A berordo n x n adalah matriks dengan banyak baris dan banyak kolom adalah n.

Contoh

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$, A adalah matriks bujur sangkar ordo 3 x 3

Definisi 2.1.5

Matriks simetris A ialah matriks bujur sangkar yang transposenya sama dengan dirinya sendiri, dengan perkataan lain $A = A^T$ atau $a_{ij} = a_{ji}$, $i,j = 1..n$.

Contoh

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad A^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 3 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Definisi 2.1.6

Determinan dari matriks A dinotasikan dengan $|A|$

Contoh

Sebuah matriks A berordo 2x2, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

Detreminannya $|A| = ad - bc$

Definisi 2.1.7

Sebuah matriks bujur sangkar A berordo n ,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

disebut mempunyai invers bila ada suatu matriks B, sehingga AB = BA = I_n. Matriks B di sebut invers matriks A, ditulis A^{-1}, merupakan matriks bujur sangkar berordo n.

Contoh

Carilah invers dari $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

Penyelesaian

Misalkan $A^{-1} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$, maka berlaku

$$I = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \text{ dengan matriks I}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bila dikalikan : $\begin{bmatrix} 2.a_1 + a_3 & 2.a_2 + a_4 \\ 4.a_1 + 3.a_3 & 4.a_2 + 3.a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$2.a_1 + a_3 = 1$$

$$2.a_2 + a_4 = 0$$

$$4.a_1 + 3.a_3 = 1$$

$$4.a_2 + 3.a_4 = 0 \qquad (2.1)$$

Dari persamaan (2.1) diperoleh $a_1 = 1.5$, $a_2 = -0.5$,

$a_3 = -2$ dan $a_4 = 1$, sehingga invers A^{-1}

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>Definisi 2.1.8</u>

Apabila sebuah matriks A memiliki matriks adjoin dan determinan $|A|$, maka invers matriks A memenuhi suatu persamaan

$$A^{-1} = \frac{Adj(A)}{|A|}$$

Contoh

Matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, maka $Adj(A) = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

dan $|A| = 2$, jadi $A^{-1} = \dfrac{Adj(A)}{|A|}$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}}{2} = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Kalau matriks berukuran besar, kadang-kadang akan lebih mudah bila dikerjakan secara bertahap, dengan membagi matriks tersebut menjadi sub matriks-sub matriks. Pandang sebuah matriks bujur sangkar C berordo n, yang mempunyai invers $C^{-1} = D$. Partisinya adalah sebagai berikut :

$$[C] = \left[\begin{array}{c|c} \underset{(p \times p)}{C_{11}} & \underset{(p \times q)}{C_{12}} \\ \hline \underset{(q \times p)}{C_{21}} & \underset{(q \times q)}{C_{22}} \end{array}\right] \qquad [D] = \left[\begin{array}{c|c} \underset{(p \times p)}{D_{11}} & \underset{(p \times q)}{D_{12}} \\ \hline \underset{(q \times p)}{D_{21}} & \underset{(q \times q)}{D_{22}} \end{array}\right]$$

di mana $p + q = n$

karena $[C].[D] = [I_n]$ maka diperoleh :

$$(\ i\ ).\ C_{11}.D_{11} + C_{12}.D_{21} = I_p$$

$$(ii\ ).\ C_{11}.D_{12} + C_{12}.D_{22} = 0$$

$$(iii).\ D_{21}.C_{11} + D_{22}.C_{21} = 0$$

$$(iv\ ).\ C_{21}.D_{12} + D_{22}.C_{22} = I_q \qquad (2.2)$$

Misalkan $D_{22} = L^{-1}$, bila disubstitusikan pada (ii),(iii),(i) diperoleh :

$$(ii\ )\ D_{12} = -(C_{11}^{-1}\ C_{12}).L^{-1}$$

$$(iii)\ D_{21} = -L^{-1}.(C_{21}\ C_{11})^{-1}$$

$$(i)\quad C_{11} = C_{11}^{-1} - C_{11}^{-1}.C_{12}.C_{21}^{-1}$$

$$= C_{11}^{-1} + (C_{11}^{-1}.C_{12}).L^{-1}.(C_{21}.C_{11}^{-1})$$

dan bila D_{22} ubstitusikan ke (iv) :

$$I_q = {}^{-1}.(C_{21}.C_{11}^{-1}).C_{12} + L^{-1}.C_{22}$$

$$L = C_{22} - (C_{21}.C_{11}^{-1}).C_{12}$$

$$= C_{22} - C_{21}.(C_{11}^{-1}.C_{12}\ )$$

Contoh

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, Hitunglah A^{-1} dengan partisi

A dipartisikan sebagai berikut :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ \hline 1 & 3 & 4 \end{array}\right]$$

Berarti $A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $A_{12} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$, $A_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}$

dan $A_{22} = [4]$

Dengan menggunakan matriks Adjoin didapat matriks invers

A^{-1}

$$A_{11}^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{11}^{-1}.A_{12} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$A_{21}.A_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L = A_{22} - A_{21}.(A_{11}^{-1}.A_{12}) = [4] - \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$L^{-1} = [\ 1\ ]$$

$$D_{11} = A_{11}^{-1} + (\ A_{11}^{-1}.A_{12}).L^{-1}.(A_{21}.A_{11}^{-1})$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}.[\ 1\ ].\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D_{12} = -(A_{11}^{-1}.A_{12}).L^{-1} = -\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}.[\ 1\ ] = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$D_{21} = -L^{-1}.(A_{21}.A_{11}^{-1}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_{22} = L^{-1} = [\ 1\ ]$$

Jadi matriks invers C adalah

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.2. Matriks kekakuan elemen pegas

Definisi 2.2.1

Suatu pegas disebut elasitis apabila gaya S yang bekerja pada pegas menimbulkan perpanjangan u dan memenuhi persamaan :

$$S = k \cdot u$$

k adalah konstanta kekakuan pegas.

Definisi 2.2.2

Pegas dikatakan memiliki kondisi batas tertahan, apabila pada ujung-ujung pegas A, B tidak terjadi suatu perpanjangan (u = 0).

Definisi 2.2.3

Suatu pegas elastis yang dikenai gaya S_1 dan S_2 dengan masing-masing gaya menimbulkan perpanjangan u_1 dan u_2 memenuhi suatu persamaan :

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \qquad (2.2.a)$$

di mana k = elemen-elemen matriks kekakuan pegas.

Diassumsikan $u_2 = 0$, sehingga persamaan (2.2.a) dapat diuraikan menjadi,

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 = 0 \end{bmatrix} \qquad (2.3)$$

Dari persamaan (2.3), $S_1 = k.u_1$ dan $S_2 = -k.u_1$.

Hasilnya adalah S_1 dan S_2 sama besar dan berlawanan arah.

2.3. Struktur dan kesetimbangan struktur

Definisi 2.3.1

Benda pejal adalah suatu benda padat yang terbentuk atau tersusun dari bahan-bahan mineral alam.

Definisi 2.3.2

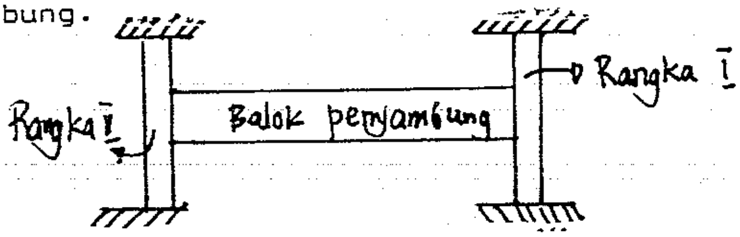
Struktur adalah susunan dari satu atau banyak benda pejal yang dikenai atau terkena pengaruh - pengaruh luar terpakai.

Definisi 2.3.3

Struktur balok kantilever ialah struktur yang berbentuk balok bulat lurus dengan ujung-ujung balok memiliki kondisi batas tertahan.

Contoh

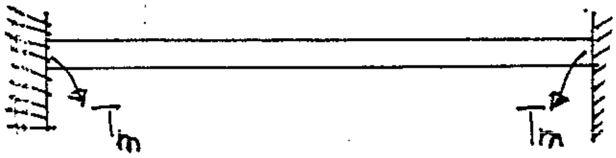
Dalam sistem rangka bangun, banyak dijumpai suatu penyambungan antara rangka satu dengan rangka lain dengan menggunakan balok pejal, di mana masing-masing ujung balok dilas atau dicor pada bangunan utama kedua rangka yang disambung.



Definisi 2.3.4

Titik - titik mati T_M pada balok kantilever adalah titik-titik pada ujung balok di mana pergeserannya ditiadakan.

Contoh gambar



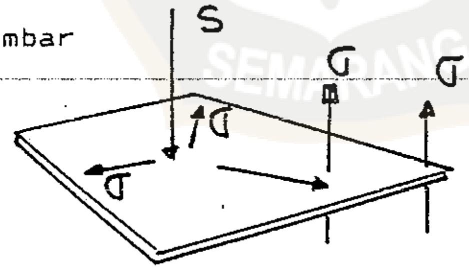
Definisi 2.3.5

Kesetimbangan struktur balok kantilever adalah kemampuan dari pada struktur balok dalam menjaga kestabilannya terhadap pengaruh-pengaruh luar terpakai.

Definisi 2.3.6

Tegangan σ struktur balok kantilever adalah suatu tahanan dalam pada struktur yang bekerja di permukaan struktur balok dengan arah sejajar dan tegak lurus dengan arah gaya S diletakkan.

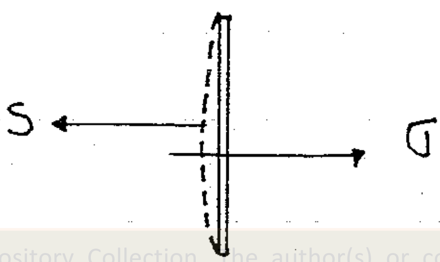
Contoh gambar



Definisi 2.3.7

vektor kerja gaya S adalah sejajar dan berlawan arah dengan arah vektor kerja tegangan σ

Contoh



Definisi 2.3.8

Suatu balok kantilever dikatakan memiliki tegangan maximum σ_{MAX}, bilamana gaya S yang bekerja pada luas permukaan A balok menghasilkan tahanan maximum.

Definisi 2.3.9

Gaya-dalam P pada struktur balok kantilever adalah gaya perlawanan dari struktur terhadap gaya luar S.

Definisi 2.3.10

Hubungan antara gaya-dalam P dengan tegangan σ pada permukaan seluas A yang terkena gaya S memenuhi persamaan

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

Definisi 2.3.11

Hubungan antara gaya P dan S pada struktur balok yang setimbang memenuhi persamaan,

$$S + P = 0$$

Dari definisi 2.3.10 dan 2.3.11, nilai dari besaran S :

$$S = -P$$

$$= -\sigma.A \qquad (2.4)$$

Selanjutnya dalam perhitungan gaya, nilai S dari persamaan (2.4) menjadi :

$$S = \sigma.A \qquad (2.5)$$

Definisi 2.3.12

Kesetimbangan gaya pada struktur memenuhi persamaan,

$$\Sigma S_i = 0 \text{ dengan } i = 1 \ldots n$$

Pada saat gaya mengenai permukaan struktur, maka pada permukaan struktur akan timbul tegangan - tegangan σ, yang meliputi :

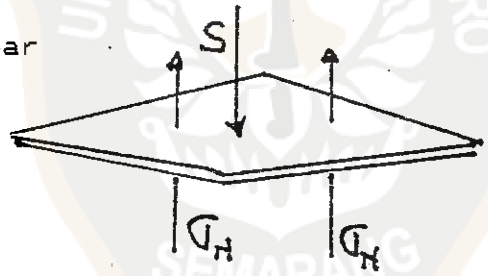
1. Tegangan normal (σ_N)
2. Tegangan Geser (σ_G)

1. Tegangan Normal

Definisi 2.3.13

Tegangan normal σ_N adalah tegangan yang bekerja tegak lurus permukaan balok kantilever.

Contoh gambar

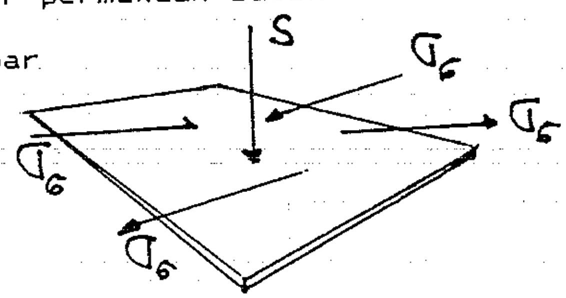


2. Tegangan Geser (σ_G)

Definisi 2.3.14

Tegangan geser σ_G adalah tegangan yang bekerja sejajar permukaan balok kantilever.

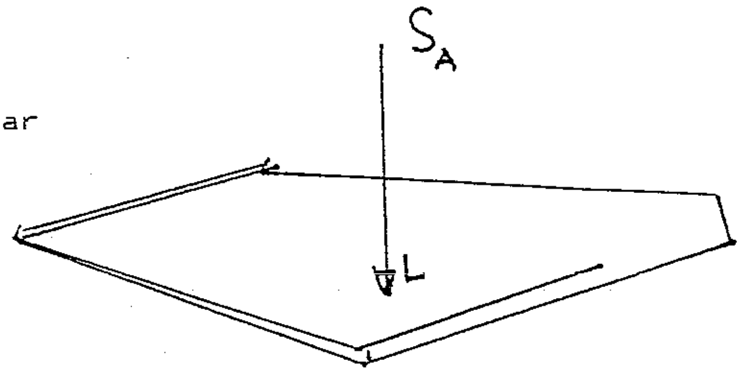
Contoh gambar



Definisi 2.3.15

Gaya axial S_A ialah gaya yang bekerja tegak lurus permukaan balok kantilever.

Contoh gambar



Gaya axial S_A dibagi menjadi 2 bagian

a. Gaya axial tekan S_{A-1}

b. Gaya axial tarik S_{A-2}

Definisi 2.3.16

Gaya axial tekan S_{A-1} ialah gaya axial yang bersifat menekan balok dan menimbulkan perpanjangan negatif.

Contoh

Diassumsikan terdapat balok kantilever dengan panjang L, dikenai gaya tekan S_{A-1}, diassumsikan gaya tekan tersebut panjang balok menjadi L − δL, sehingga selisih panjang balok setelah dibebani dengan panjang balok mula-mula adalah :

$$(L - \delta L) - L = - \delta L$$

Definisi 2.3.17

Gaya axial tekan S_{A-2} ialah gaya axial yang bersifat menarik balok dan menimbulkan perpanjangan positif.

Contoh

Dengan assumsi yang sama pada contoh dari definisi 2. 16, perpanjangan balok setelah dibebani adalah L + δL, sehingga perpanjangan positif balok :

$$(L + \delta L) - L = \delta L$$

Definisi 2.3.18

Momen lengkung M_L balok kantilever ialah suatu besaran yang dihasilkan oleh kelenturan balok pada titik-titik mati balok yang diakibatkan gaya geser S_G.

Contoh

Diassumsikan terdapat balok kantilever dengan panjang L yang diukur dari titik mati balok ke titik di mana gaya geser S_G bekerja. Disini arah kerja gaya geser S_G menekan balok kantilever dari atas.

Definisi 2.3.19

Kesetimbangan momen lengkung pada struktur memenuhi persamaan :

$$\Sigma M_{L-i} = 0 \qquad i = 1 \ldots n$$

Definisi 2.3.20

Regangan ϵ balok kantilever ialah suatu perpanjangan balok akibat gaya-gaya S.

Definisi 2.3.21

Regangan ϵ balok kantilever pada balok dengan panjang L yang dibebani S , dan perpanjangan yang terjadi sebesar δL memenuhi persamaan

$$\epsilon = \frac{\delta L}{L}$$

Definisi 2.3.22

Hubungan antara tegangan σ dengan ϵ memenuhi persamaan $\sigma = E \cdot \epsilon$, E = konstanta modulus young

<u>Teorema 2.1</u>

Gaya axial S_A yang menimbulkan perpanjangan δL pada balok kantilever dengan panjang L :

$$S = \epsilon . A . E$$

Bukti

Dari definisi 2.3.21

$$\epsilon = \frac{\delta L}{L} \qquad (2.6)$$

Dari definisi 2.3.22 dan persamaan (2.5),

$$\sigma = \frac{S}{A} \qquad (2.7)$$

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} \qquad (2.8)$$

persamaan (2.6) menjadi,

$$\delta L = \epsilon . L \qquad (2.9)$$

Substitusikan persamaan (2.8) pada (2.9)

$$= \frac{\sigma}{E} . L \qquad (2.10)$$

Substitusikan persamaan (2.7) pada (2.10)

$$\delta L = \frac{\frac{S}{A}}{E} . L$$

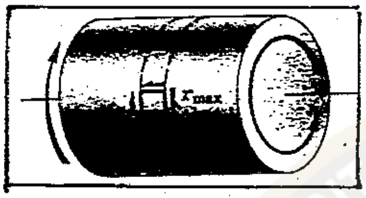
Sehingga didapat

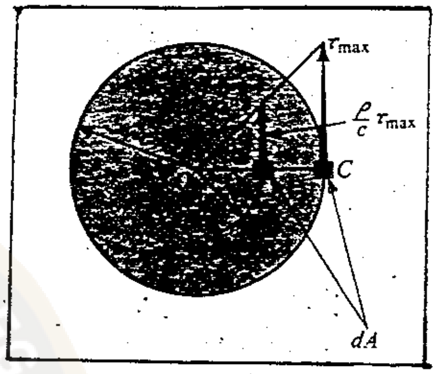
$$\delta L = \frac{S}{A.E} . L$$

$$S = A.E.\epsilon \qquad (2.11)$$

2.4. Momen puntir

Sebuah gaya S yang bekerja dengan cara memuntir balok struktur akan menimbulkan momen puntir pada balok.





Definisi 2.4.1

Tegangan geser maximum σ_{G-Max} pada balok yang dipuntir oleh gaya S adalah tegangan yang dihasilkan balok titik-titik terjauh dari titik pusat O.

Contoh

Titik C adalah merupakan titik dimana tegangan maximum σ_{G-Max} dihasilkan. Sedangkan jarak d titik C pada pusat O :

$$d = \sigma_{G-Max} - O = c$$

Definisi 2.4.2

Tegangan geser minimum σ_{G-MIN} pada balok yang dipuntir oleh gaya S adalah tegangan pada titik-titik terpendek dari titik pusat O.

Contoh

Titik B adalah lokasi σ_{G-MIN} .

$$d = \sigma_{G-MIN} - O = \mu$$

$$= \text{Jarak } \sigma_{G-MIN} \text{ ke titik pusat O}$$

Definisi 2.4.3

Momen puntir yang disebabkan gaya puntir S memenuhi persamaan,

$$M_P = S \cdot \mu$$

dengan μ = Jarak σ_{G-MIN} ke titik pusat O

Definisi 2.4.4

Distribusi tegangan σ pada balok kantilever akibat gaya S dipenuhi oleh persamaan :

$$\sigma = \frac{\mu}{c} \cdot \sigma_{G-MAx}$$

Definisi 2.4.5

Momen inersia I polar dari penampang luas balok yang dipuntir dipenuhi oleh persamaan

$$I = \int_A \cdot \mu^2 \cdot dA$$

Teorema 2.2

Apabila pada pada balok dikenakan gaya puntir S pada permukaan seluas $A = \int_A \cdot dA$, maka momen puntir balok kantilever adalah :

$$M_P = \frac{\sigma_{G-MAx}}{c} \int_A \cdot \mu^2 \cdot dA$$

$$= \frac{\sigma_{G-MAx}}{c} \cdot I$$

dengan c = jarak dari tegangan maximum σ_{G-MAx}

Bukti

Dengan melihat persamaan (2.5)

$$S = \sigma \cdot A \qquad (2.12)$$

dan diassumsikan luas permukaan A adalah $A = f_A \cdot dA$.

Dari definisi 2.4.4. Substitusikan σ pada (2.12) :

$$S = f_A \frac{\mu}{c} \cdot \sigma_{G-MAx} \cdot dA \qquad (2.13)$$

Berdasarkan definisi 2.4.3

$$M_P = S \cdot \mu \qquad (2.14)$$

Substitusikan S dari persamaan (2.13) pada persamaan (2.14) :

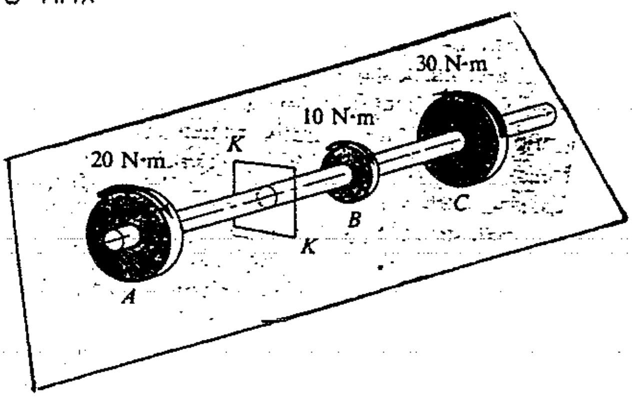
$$M_P = f_A \frac{\mu}{c} \cdot \sigma_{G-MAx} \cdot \mu . dA = \frac{\sigma_{G-MAx}}{c} f_A \cdot \mu^2 \cdot dA \qquad (2.15)$$

Dari definisi 2.4.5, gantikan I pada $f_A \cdot \mu^2 \cdot dA$, dari persamaan (2.15) sehingga diperoleh :

$$M_P = \frac{\sigma_{G-MAx}}{c} \cdot I$$

Contoh

Hitunglah σ_{G-MAx} pada poros AC dengan diameter $\varnothing$ = 10 mm.

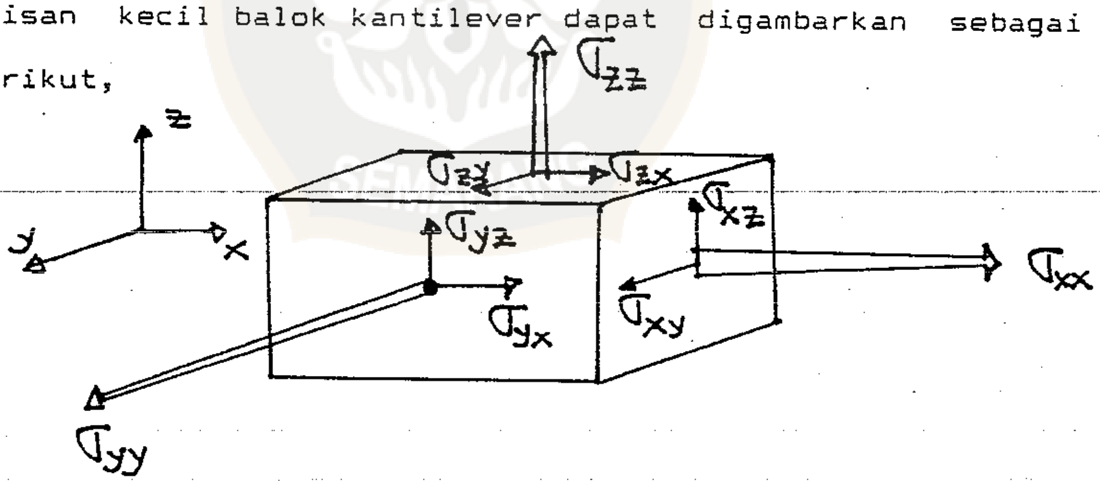


Dari gambar M_P maximum adalah 30 N.m dan c = 5 mm (jari-jari balok)

$$I = \frac{\pi \cdot c^4}{2} \quad \frac{\pi \cdot (0.005 \text{ m})}{2} = 9.82 \cdot 10^{-10} \text{ m}^4$$

$$\sigma_{G-MAx} = \frac{M_p . c}{I} = \frac{30 \times 0.005}{9.82 \times 10^{-10}} = 153 \times 10^{6} \ N/m^2$$

2.5. Tegangan dan regangan pada koordinat orthogonal x-y-z untuk dapat menguraikan perilaku-perilaku tegangan regangan, maka diperlukan suatu sistem peletakan vektor-vektor arah dari pada tegangan-tegangan dan regangan-regangan yang timbul dalam struktur balok kantilever akibat gaya-gaya luar terpakai. Sistem peletakkan yang dimaksud adalah sistem koordinat orthogonal x-y-z. vektor-vektor arah dari pada tegangan-tegangan yang bekerja pada irisan kecil balok kantilever dapat digambarkan sebagai berikut,



σ_{xx} ,σ_{yy}, σ_{zz} = tegangan-tegangan normal

σ_{xy} ,σ_{yx}, σ_{yz},σ_{zy} ,σ_{xz}, σ_{zx} = tegangan-tegangan geser

<u>Definisi 2.5.1</u>

Dalam kesetimbangan struktur berlaku suatu rumus tegangan,

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \qquad i,j = x,\ y,\ z$$

Definisi 2.5.2

Persamaan sudut geser τ_{ij} yang terbentuk oleh kerja tegangan geser σ_{ij} berbentuk

$$\tau_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{G} \cdot \delta_{ij}$$

di mana $\delta_{ij} = 0$ untuk $i = j$ dan

$\delta_{ij} = 1$ untuk $i \# j$ dengan

δ_{ij} = Koncker delta

G = Konstanta keelastisan geser balok kantilever

Definisi 2.5.3

Dalam kesetimbangan struktur berlaku pergeseran kecil τ, di mana $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ $i,j = x, y, z$

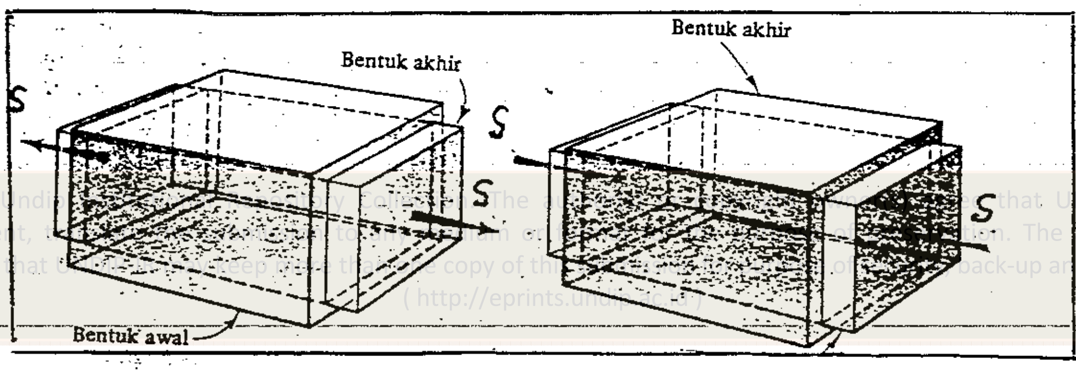
2.6. Perbandingan Poisson

Disamping regangan ϵ yang searah gaya S, sifat penting regangan lainnya pada struktur balok kantilever adalah regangan yang arah vektor kerjanya tegak lurus gaya axial S.

Definisi 2.6.1

Regangan lateral ϵ_L ialah regangan yang vektor kerjanya tegak lurus regangan axial ϵ_A akibat gaya axial S_A.

Contoh gambar



Definisi 2.6.2

Perbandingan Poisson v dalam hubungan regangan axial dan regangan lateral memenuhi persamaan

$$v = -\frac{\epsilon_L}{\epsilon_A}$$

Contoh

Tinjaulah suatu pengujian yang dilakukan secara hati-hati di mana sebuah batang alumunium berdiameter 50 mm diberi tegangan di dalam sebuah mesin penguji. Pada saat tertentu, dengan gaya terpakai S sebesar 100 KN, batang tersebut memuai sepanjanh 0.219 mm untuk panjang ukur 300 mm dan diameternya menyusut 0.01215 mm, cari tetapan fisis v.

Penyelesaian

Diassumsikan δ_T = 0.00001215 m dan diameternya D = 0.050 m. Berdasarkan definisi 2.3.21, regangan lateral ϵ_L adalah,

$$\epsilon_L = -\frac{\delta_T}{D} = -\frac{0.00001215 \quad m}{0.050 \quad m} = -0{,}000243$$

$$\epsilon_A = \frac{\delta}{L} = \frac{0.000219 \quad m}{0.3 \quad m} = 0.00073$$

Dari definisi 2.6.2 perbandingan Poisson v :

$$v = -\frac{\epsilon_L}{\epsilon_A} = -\frac{-0{,}000243}{0.00073} = 0.333$$

Definisi 2.6.3

Hubungan antara konstanta elastis geser G dengan konstanta modulus young E pada perbandingan Poisson memenuhi persamaan

$$G = \frac{E}{2.(1 + v)}$$

Definisi 2.6.4

Regangan-regangan normal ϵ_{xx}, ϵ_{yy}, ϵ_{zz} yang terjadi akibat efek Poisson dipenuhi oleh suatu persamaan

$$\epsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} - v\frac{\sigma_{yy}}{E} - v\frac{\sigma_{zz}}{E}$$

$$\epsilon_{yy} = - v\frac{\sigma_{xx}}{E} + \frac{\sigma_{yy}}{E} - v\frac{\sigma_{zz}}{E}$$

$$\epsilon_{zz} = - v\frac{\sigma_{xx}}{E} - v\frac{\sigma_{yy}}{E} + \frac{\sigma_{zz}}{E}$$

2.7. Persamaan regangan - peralihan

Dalam sebuah struktur yang elastis pada koordinat orthogonal x-y-z hubungan antara regangan dan peralihan(perpindahan) u berkaitan erat dengan sistem gaya yang dikenakan pada titik-titik ujung balok, di mana pada sistem koordinat orthogonal x-y-z terdapat tiga peralihan u_x, u_y, u_z.

$$u_x = u_x(x,y,z)$$

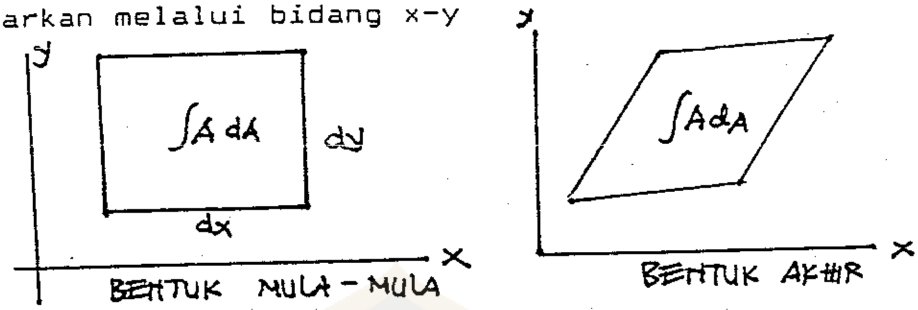
$$u_y = u_y(x,y,z)$$

$$u_z = u_z(x,y,z)$$

Masing-masing dari peralihan-peralihan tersebuat u_x, u_y, u_z adalah fungsi-fungsi dari x, y, z.

Diassumsikan terdapat sebuah struktur yang dikenai gaya S.

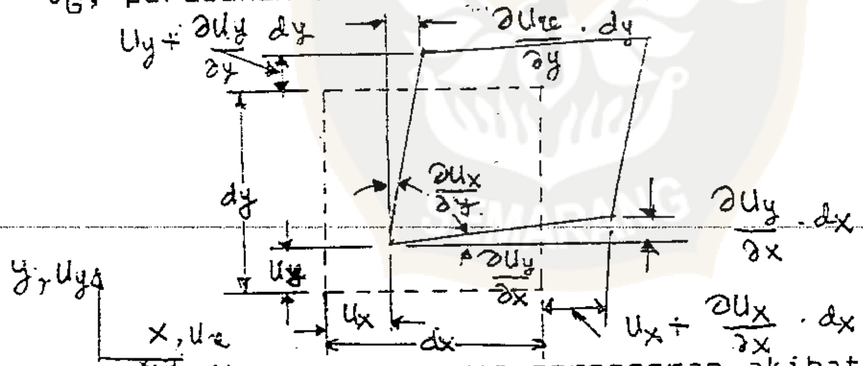
Gambaran dari pada hubungan peralihan-peralihan dapat digambarkan melalui bidang x-y



Luas A dari struktur yang terkena gaya S, A = dx . dy

Diassumsikan pula bahwa akibat gaya S, struktur mengalami perubahan bentuk dalam bidang tersebut.

Dan karena pengaruh tegangan normal σ_N dan tegangan geser σ_G, perubahan struktur sebenarnya adalah :



Diassumsikan pergeseran-pergeseran akibat tegangan geser σ_N adalah α dan β

$$\text{di mana } \beta = \delta.dx = \frac{\delta u_x}{\delta x} . dx \qquad (2.17)$$

$$\alpha = \delta.dx = \frac{\delta u_y}{\delta y} . dy \qquad (2.18)$$

Sedangkan sudut - sudut geser akibat tegangan geser σ_G adalah τ_1 dan τ_2 :

$$\tau_1 = \frac{\delta u_x}{\delta y} \qquad (2.19)$$

$$\tau_2 = \frac{\delta u_y}{\delta u_x} \tag{2.20}$$

Dengan melihat definisi 2.3.21, maka terdapat hubungan antara regangan normal ϵ_{xx} dalam arah x dengan peralihan u_x,

$$\epsilon_{xx} = \frac{\beta}{dx} \tag{2.21}$$

Substitusikan persamaan (2.17) pada (2.21)

$$\epsilon_{xx} = \frac{\frac{\delta u_x}{\delta x} \cdot dx}{dx} = \frac{\delta u_x}{\delta x} \tag{2.22}$$

Sementara itu dengan menganalogkan pada persamaan (2.22) dapat dicari regangan normal ϵ_{yy} dan ϵ_{zz}

$$\epsilon_{yy} = \frac{\delta u_y}{\delta_y}$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\delta u_z}{\delta_z} \tag{2.23}$$

Sedangkan regangan-regangan geser ϵ_{xy}, ϵ_{xz}, dan ϵ_{zy} adalah

$$\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx} = \tau_1 + \tau_2 = \frac{\delta u_y}{\delta x} + \frac{\delta u_x}{\delta y}$$

$$\epsilon_{xz} = \epsilon_{zx} = \frac{\delta u_z}{\delta x} + \frac{\delta u_x}{\delta z}$$

$$\epsilon_{yz} = \epsilon_{zy} = \frac{\delta u_z}{\delta y} + \frac{\delta u_y}{\delta z} \tag{2.24}$$

2.8. Regangan – regangan akibat temperatur panas

Dalam perhitungan kekuatan bahan terhadap pengaruh-pengaruh luar terpakai, maka efek samping dari terjadinya gaya-gaya yang bekerja pada struktur adalah gesekan-gesekan yang menimbulkan panas, atau pengaruh alam yang menyebabkan terjadinya pemuaian atau penyusutan struktur seperti panas matahari, api dan lain-lain. Dalam hubungan regangan-regangan akibat temperatur panas, dapat dibuat suatu assumsi pada sebuah balok kantilever dengan panjang L yang terkena suhu T. Dimana assumsi itu menyatakan terjadinya regangan sebesar δL, dengan $\delta L = \alpha.T.L$ di mana α adalah koefisien muai.

<u>Definisi 2.8.1</u>

Regangan ϵ_T akibat panas T memenuhi persamaan

$$\epsilon_T = \frac{\delta L}{L} = \frac{\alpha.T.L}{L} = \alpha.T$$

α = konstanta muai panas

Dengan melihat definisi 2.3.22, dapat dibuat suatu persamaan dari regangan ϵ_T

$$\epsilon_T = \frac{\sigma}{E} \qquad (2.25)$$

Substitusikan persamaan (2.7) pada (2.35)

$$\epsilon_T = \frac{S}{A.E}$$

$$S = \epsilon_T \,.\, A \,.\, E = = \alpha \,.\, T.\, A.\, E \qquad (2.26)$$

Definisi 2.8.2

Dalam koordinat orthogonal x-y-z regangan ϵ_T memenuhi persamaan

$$\epsilon_{T-ij} = \alpha \, . \, T \, . \, \delta_{ij} \qquad i,j = x,\ y,\ z$$

di mana $\delta_{ij} = 1$ bila $i = j$

$\delta_{ij} = 0$ bila $i \# j$

δ_{ij} = knocker delta

Dengan melihat definisi 2.8.2, regangan-regangan akibat temperatur T dapat dinyatakan,

$$\epsilon_{T-xx} = \alpha \, . \, T \, . \, 1, \quad \epsilon_{T-yy} = \alpha \, . \, T \, . \, 1$$

$$\epsilon_{T-zz} = \alpha \, . \, T \, . \, 1, \quad \epsilon_{T-xy} = \alpha \, . \, T \, . \, 0$$

$$\epsilon_{T-xz} = \alpha \, . \, T \, . \, 0, \quad \epsilon_{T-yz} = \alpha \, . \, T \, . \, 0$$

Definisi 2.8.3

Dalam kesetimbangan struktur regangan regangan karena pengaruh T memenuhi suatu persamaan,

$$\epsilon_{T-ij} = \epsilon_{T-ji} \qquad i,\ j = x,y,z$$

Definisi 2.8.4

Regangan total dari struktur yang dikenai gaya-gaya S dan temperatur T,

$$e_{ij} = \epsilon_{ij} + \epsilon_{T-ij} \qquad i,j = x,y,z$$

Definisi 2.8.5

Dalam kesetimbangan struktur, regangan total e_{ij} memenuhi persamaan

$$e_{ij} = e_{ji} \qquad i,j = x,y,z$$

Dengan melihat definisi 2.8.2 dan 2.8.4 serta definisi

2.6.4 dan definisi 2.5.2, dapat dicari regangan total dalam ruang z-y-z :

$$e_{xx} = \frac{1}{E} \left[\sigma_{xx} - v.\sigma_{yy} - v.\sigma_{zz} \right] + \alpha.T$$

$$= \frac{1}{E}.\ \sigma_{xx} - \frac{1}{E}\ v.\sigma_{yy} - \frac{1}{E}\ v.\sigma_{yy} + \alpha.T$$

$$e_{yy} = \frac{1}{E} \left[\sigma_{yy} - v.\sigma_{xx} - v.\sigma_{zz} \right] + \alpha.T$$

$$= \frac{1}{E}.\ \sigma_{yy} - \frac{1}{E}\ v.\sigma_{xx} - \frac{1}{E}\ v.\sigma_{zz} + \alpha.T$$

$$e_{zz} = \frac{1}{E} \left[\sigma_{zz} - v.\sigma_{yy} - v.\sigma_{xx} \right] + \alpha.T$$

$$= \frac{1}{E}.\ \sigma_{zz} - \frac{1}{E}\ v.\sigma_{yy} - \frac{1}{E}\ v.\sigma_{xx} + \alpha.T$$

$$e_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{G} = \frac{\sigma_{xy}\ .\ 2\ .\ (\ 1 + v\ )}{E}$$

$$e_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{G} = \frac{\sigma_{xz}\ .\ 2\ .\ (\ 1 + v\ )}{E}$$

$$e_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{G} = \frac{\sigma_{yz}\ .\ 2\ .\ (\ 1 + v\ )}{E} \qquad (2.27)$$

Persamaan (2.27) dapat dibentuk menjadi sebuah matriks [e] berordo 6x6

$$\begin{bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \\ e_{xy} \\ e_{xz} \\ e_{yz} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -v & -v & 0 & 0 & 0 \\ -v & 1 & -v & 0 & 0 & 0 \\ -v & -v & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.(1+v) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.(1+v) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.(1+v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} + \alpha \,.\, T \,.\, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (2.28)$$

Dalam bentuk perkalian matriks, persamaan (2.28) disederhanakan :

$$[e] = \frac{1}{E} [C] \cdot [\sigma] + \alpha.T.\{1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\}$$

Dengan $[e] = \{ e_{xx} \ \ e_{yy} \ \ e_{zz} \ \ e_{xy} \ \ e_{xz} \ \ e_{yz} \}$,

$[\sigma] = \{ \sigma_{xx} \ \ \sigma_{yy} \ \ \sigma_{zz} \ \ \sigma_{xy} \ \ \sigma_{xz} \ \ \sigma_{yz} \}$,

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & -v & -v & 0 & 0 & 0 \\ -v & 1 & -v & 0 & 0 & 0 \\ -v & -v & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.(1+v) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.(1+v) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.(1+v) \end{bmatrix}$$

Persamaan (2.28) menunjukkan bahwa regangan $[e]$ menghasilkan matriks $[C]$ yang bersifat symetri, bujursangka sehingga menurut definisi 2.1.3, matriks transpose $[C]^T = [C]$. Kemudian untuk mencari matriks tegangan $[\sigma]$, harus dicari matriks invers dari $[C]$ yaitu $[D]$ yang memenuhi $[C] \cdot [D] = [I]$.

Berdasarkan definisi 2.1.8, matrik invers $[D]$ dapat dicari dengan membentuk sistem sekatan pada matrik $[C]$ dan $[D]$.

Matriks $[C]$ dibuat menjadi 4 submatriks :

$$[C] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -v & -v & 0 & 0 & 0 \\ -v & 1 & -v & 0 & 0 & 0 \\ -v & -v & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2.(1+v) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.(1+v) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.(1+v) \end{array}\right]$$

Masing-masing dari submatriks $[C]$ adalah

$$[C] = \left[\begin{array}{c|c} \underset{(p \times p)}{C_{11}} & \underset{(p \times q)}{C_{12}} \\ \hline \underset{(q \times p)}{C_{21}} & \underset{(q \times q)}{C_{22}} \end{array}\right]$$

$$C_{11} = \begin{bmatrix} 1 & -v & -v \\ -v & 1 & -v \\ -v & -v & 1 \end{bmatrix}, \quad C_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_{22} = \begin{bmatrix} 2.(1+v) & 0 & 0 \\ 0 & 2.(1+v) & 0 \\ 0 & 0 & 2.(1+v) \end{bmatrix}$$

Sedangan partisi pada matriks $|D|$

$$[D] = \left[\begin{array}{c|c} \underset{(p \times p)}{D_{11}} & \underset{(p \times q)}{D_{12}} \\ \hline \underset{(q \times p)}{D_{21}} & \underset{(q \times q)}{D_{22}} \end{array}\right]$$

Dimana $p + q = n$, karena $[C].[D] = [I_n]$ maka diperoleh :

$$(\text{ i }).\ C_{11}.D_{11} + C_{12}.D_{21} = I_p$$

$$(\text{ii }).\ C_{11}.D_{12} + C_{12}.D_{22} = 0$$

$$(\text{iii}).\ D_{21}.C_{11} + D_{22}.C_{21} = 0$$

$$(\text{iv }).\ C_{21}.D_{12} + D_{22}.C_{22} = I_q$$

Misalkan $D_{22} = L^{-1}$,

dari (ii) $D_{12} = -(C_{11}{}^{-1}\ C_{12}).L^{-1}$

dari (iii) $D_{21} = -L^{-1}.(C_{21}\ C_{11})^{-1}$

dari (i) $C_{11} = C_{11}{}^{-1} - C_{11}{}^{-1}.C_{12}.C_{21}{}^{-1}$

$= C_{11}{}^{-1} + (C_{11}{}^{-1}.C_{12}).L^{-1}.(C_{21}.C_{11}{}^{-1})$

dan bila disubstitusikan ke (iv) :

$-L^{-1}.(C_{21}.C_{11}{}^{-1}).C_{12} + L^{-1}.C_{22} = I_q$

$L = C_{22} - (C_{21}.C_{11}{}^{-1}).C_{12}$

$= C_{22} - C_{21}.(C_{11}{}^{-1}.C_{12}\ )$

Dengan melihat bentuk perkalian matrik di atas, maka dapat dicari invers dari submatriks $[C]$.

$$C_{11}^{-1} = \frac{Adj.\ C_{11}}{|C_{11}|} = \frac{\begin{bmatrix} 1-v^2 & v+v^2 & v+v^2 \\ v+v^2 & 1-v^2 & v+v^2 \\ v+v^2 & v+v^2 & 1-v^2 \end{bmatrix}}{1 - 3.v^2 - 2.v^3}$$

$$C_{11}^{-1} = \frac{1}{1 - 3.v^2 - 2.v^3} \begin{bmatrix} 1-v^2 & v+v^2 & v+v^2 \\ v+v^2 & 1-v^2 & v+v^2 \\ v+v^2 & v+v^2 & 1-v^2 \end{bmatrix}$$

$$C_{11}^{-1}C_{12} = \frac{1}{1 - 3v^2 - 2v^3} \begin{bmatrix} 1-v^2 & v+v^2 & v+v^2 \\ v+v^2 & 1-v^2 & v+v^2 \\ v+v^2 & v+v^2 & 1-v^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_{21}C_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{1 - 3v^2 - 2v^3} \begin{bmatrix} 1-v^2 & v+v^2 & v+v^2 \\ v+v^2 & 1-v^2 & v+v^2 \\ v+v^2 & v+v^2 & 1-v^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L = C_{22} - C_{21}.(C_{11}^{-1}.C_{12})$$

$$= \begin{bmatrix} 2(1+v) & 0 & 0 \\ 0 & 2(1+v) & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+v) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2(1+v) & 0 & 0 \\ 0 & 2(1+v) & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+v) \end{bmatrix}$$

$$D_{11} = C_{11}^{-1} + (C_{11}^{-1}.C_{12}).L^{-1}\ (C_{21}.C_{11}^{-1})$$

$$= \frac{1}{1 - 3v^2 - 2v^3} \begin{bmatrix} 1-v^2 & v+v^2 & v+v^2 \\ v+v^2 & 1-v^2 & v+v^2 \\ v+v^2 & v+v^2 & 1-v^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{1 - 3v^2 - 2v^3} \begin{bmatrix} 1-v^2 & v+v^2 & v+v^2 \\ v+v^2 & 1-v^2 & v+v^2 \\ v+v^2 & v+v^2 & 1-v^2 \end{bmatrix}$$

$$D_{12} = -(C_{11}^{-1}.C_{12}).L^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_{21} = -L^{-1}(C_{21}.C_{11}^{-1}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_{22} = L^{-1}$$

$$L^{-1} = \frac{Adj.\ L}{|L|} = \frac{\begin{bmatrix} 4.(1+v)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 4.(1+v)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4.(1+v)^2 \end{bmatrix}}{8.(\ 1 + v\ )^3}$$

$$L^{-1} = \frac{1}{8.(1+v)^3} \begin{bmatrix} 4.(1+v)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 4.(1+v)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 4.(1+v)^2 \end{bmatrix}$$

Dengan melihat hasil diatas, maka dari persamaan (2.28) yaitu

$$[e] = \frac{1}{E}[C].[\sigma] + \alpha.T.\{1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\}$$,dikalikan dengan $[C^{-1}]$

$$[C^{-1}].[e].E - [C^{-1}].E.\alpha.T.\{1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\} = [C^{-1}].[C].[\sigma]$$

$$|\sigma| = |C^{-1}|.|e|.E - |C^{-1}|.E.\alpha.T.\{1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\}$$

Maka matriks $[\sigma]$ menjadi,

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+v).(1-2.v)} \begin{bmatrix} 1-v & v & v & 0 & 0 & 0 \\ v & 1-v & v & 0 & 0 & 0 \\ v & v & 1-v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2.v)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2.v)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2.v)}{} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \\ e_{xy} \\ e_{xz} \\ e_{yz} \end{bmatrix} - \frac{E.\alpha.T}{1-2.v} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Dari persamaan (2.29) diperoleh :

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1+v).(1-2.v)} \left[(1-v).e_{xx} + v.(e_{yy} + e_{zz})\right]$$

$$- \frac{E.\sigma.T}{1 - 2.v}$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1 + v).(1 - 2.v)} \left[(1 - v).e_{yy} + v.(e_{zz} + e_{xx})\right]$$

$$- \frac{E.\sigma.T}{1 - 2.v}$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{(1 + v).(1 - 2.v)} \left[(1 - v).e_{zz} + v.(e_{xx} + e_{yy})\right]$$

$$- \frac{E.\sigma.T}{1 - 2.v}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{2.(1 + v)} e_{xy} , \quad \sigma_{yz} = \frac{E}{2.(1 + v)} e_{yz}$$

$$\sigma_{zx} = \frac{E}{2.(1 + v)} e_{zx} \tag{2.30}$$

Secara simbolik persamaan(2.29) dapat berbentuk

$$\sigma = æ.e + \alpha.T.æ_T \tag{2.31}$$

dimana $\sigma = \{ \sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{zx} \quad \sigma_{zx} \}$

$e = \{ e_{xx} \quad e_{yy} \quad e_{zz} \quad e_{xy} \quad e_{yz} \quad e_{zx} \}$

$$æ_T = \frac{E}{1 - 2.v} \{ -1 \quad -1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \}$$

$$æ = \frac{E}{(1 + v).(1 - 2.v)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 - v & v & v & & & \\ v & 1 - v & v & & 0 & \\ v & v & 1 - v & & & \\ \hline & & & 1 - 2.v & 0 & 0 \\ & 0 & & 0 & 1 - 2.v & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 - 2.v \end{array}\right]$$