BAB III

DERET FOURIER

Untuk menyelesaikan suatu masalah nilai batas tertentu diperlukan pengetahuan bagaimana meng-expansikan suatu fungsi menjadi suatu deret trigonometri.

Karena tiap-tiap suku dari trigonometri adalah periodik, jelas bahwa jika suatu periodik diexpansikan ke dalam deret tersebut hasilnya juga tentu periodik. Dengan demikian perhatian akan dialihkan pada fungsi-fungsi yang periodik.

3.1. FUNGSI-FUNGSI PERIODIK

DEFINISI 18 :

Suatu fungsi f dikatakan periodik dengan periodik T jika $f(x + T) = f(x)$ untuk setiap harga x. Harga T terkecil dari $T > 0$ disebut periodik dasar dari f.

DEFINISI 19 :

Jika f dan g adalah dua fungsi periodik dengan periode T, maka jumlahan f dan g juga periodik dengan periode T.

$$
\begin{aligned}
F(x) &= f(x) + g(x) \\
F(x + T) &= f(x + T) + g(x + T) \\
&= f(x) + g(x) \\
&= F(x).
\end{aligned}
$$

Theorema 7 :

Fungsi sin $(m\pi x/\ell)$ dan cos $(m\pi x/\ell)$, m = 1,2,3,... adalah periodik dengan periode dasar $T = 2\ell/m$. Selanjutnya, setiap fungsi demikian mempunyai periode 2ℓ

Bukti :

$$\sin m\pi\left(\frac{x+T}{\ell}\right) = \sin \frac{m\pi x}{\ell}, \text{ untuk semua } x \qquad ...(53)$$

$$\sin \frac{m\pi x}{\ell} \cos \frac{m\pi T}{\ell} + \cos \frac{m\pi x}{\ell} \sin \frac{m\pi T}{\ell} = \sin \frac{m\pi x}{\ell} \qquad ...(54)$$

Persamaan (54) terpenuhi untuk semua x, jika dapat dipilih T sedemikian hingga $\cos(m\pi T/\ell) = 1$ dan $\sin(m\pi T/\ell) = 0$. Pernyataan tersebut benar jika diambil $m\pi T/\ell = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, ...$

Untuk membuktikan bahwa tidak ada harga lain dari T dimana persamaan (53) terpenuhi. Asumsi bahwa ada suatu T dan pilih x sedemikian hingga $\cos(m\pi x/\ell) = 0$

$$\sin \frac{m\pi x}{\ell} \cos \frac{m\pi T}{\ell} = \sin \frac{m\pi x}{\ell}$$

$$\cos \frac{m\pi T}{\ell} = 1$$

kita pun pilih $\frac{m\pi T}{\ell} = 2\pi$, sehingga $T = \frac{2\pi}{m\pi/\ell} = \frac{2\ell}{m}$

Jadi $\sin(m\pi x/\ell)$ mempunyai periode 2ℓ untuk setiap m. Demikian juga untuk $\cos(m\pi x/\ell)$.

3.2 RELASI ORTHOGONAL

DEFINISI 20:

Inner product (u,v) dari 2 fungsi harga riil u dan v pada interval $\alpha \le x \le \beta$ didefinisikan sebagai

$$(u,v) = \int_{\alpha}^{\beta} u(x)\, v(x)\, dx$$

Fungsi u dan v dikatakan orthogonal pada $\alpha \leq x \leq \beta$

jika : $\int_{\alpha}^{\beta} u(x)\, v(x)\, dx = 0$

Theorema 8 :

Fungsi sin ($m\pi x/\ell$) dan cos ($m\pi x/\ell$), m = 1, 2, 3, ...

mempunyai relasi orthogonal pada interval $-\ell \leq x \leq \ell$

jika memenuhi persamaan :

$$\int_{-\ell}^{\ell} \cos \frac{m\pi x}{\ell} \cos \frac{n\pi x}{\ell}\, dx = \begin{cases} 0 , & m \neq n \\ \ell & m = n \end{cases} \qquad \text{...(57)}$$

$$\int_{-\ell}^{\ell} \cos \frac{m\pi x}{\ell} \sin \frac{n\pi x}{\ell}\, dx = 0 , \text{ untuk } \forall\, m,n \qquad \text{...(58)}$$

$$\int_{-\ell}^{\ell} \sin \frac{m\pi x}{\ell} \sin \frac{n\pi x}{\ell}\, dx = \begin{cases} 0 , & m \neq n \\ \ell , & m = n \end{cases} \qquad \text{...(59)}$$

Bukti : Ambil persamaan (59) :

$$\int_{-\ell}^{\ell} \sin \frac{m\pi x}{\ell} \sin \frac{n\pi x}{\ell}\, dx$$

$$= 1/2 \int_{-\ell}^{\ell} \left\{ \cos \frac{(m-n)\,\pi x}{\ell} - \cos \frac{(m+n)\,\pi x}{\ell} \right\} dx$$

$$= 1/2\frac{\ell}{\pi} \left\{ \frac{\sin [\,(m-n)\,\pi x/\ell\,]}{m-n} - \frac{\sin [(m+n)\,\pi x/\ell\,]}{m+n} \right\} \Bigg|_{-\ell}^{\ell}$$

$$= 0$$

di mana m + n dan m − n tidak nol. Karena m dan n positif, $m + n \neq 0$.

Jika m - n = 0, maka m = n dan integral menjadi

$$\int_{-\ell}^{\ell} \sin \frac{m\pi x}{\ell} \sin \frac{n\pi x}{\ell}\, dx = \int_{-\ell}^{\ell} \left(\sin \frac{m\pi x}{\ell}\right)^2 dx$$

$$= 1/2 \int_{-\ell}^{\ell} \left(1 - \cos \frac{2m\pi x}{\ell}\right) dx$$

$$= 1/2 \left\{ x - \frac{\sin (2m\pi x/\ell)}{2m\pi/\ell} \right\} \Bigg|_{-\ell}^{\ell}$$

$$= \ell.$$

Persamaan (57) dan (58) dapat dibuktikan dengan cara yang sama.

3.3. DEFINISI DERET FOURIER

Ambil $f(x)$ yang dapat ditentukan pada interval $(-\ell, \ell)$ sehinga mempunyai periode 2L. Deret Fourier atau ekspansi Fourier yang sehubungan dengan $f(x)$ didefinisikan sebagai :

$$f(x) = a_o + \sum_{n=1}^{\sim} \left[a_m \cos \frac{m\pi x}{\ell} + b_m \sin \frac{m\pi x}{\ell} \right] \qquad \ldots(60)$$

Koefisien a_m dan b_m dapat direlasikan dengan $f(x)$ sebagai konsekuensi dari syarat orthogonality pertama persamaan (60) dikalikan dengan $\cos (n\pi x/\ell)$ di mana n adalah bilangan bulat positif (n > 0) dan diintegralkan ke x dari $-\ell$ ke ℓ.

$$\int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx$$

$$= \frac{a_o}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx + \sum_{m=1}^{\sim} a_m \int_{-\ell}^{\ell} \cos \frac{m\pi x}{\ell} \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx +$$

$$\sum_{m=1}^{\sim} b_m \int_{-\ell}^{\ell} \cos \frac{m\pi x}{\ell} \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx \qquad \ldots(61)$$

Jika m = n, menurut persamaan (57) dan (59), maka persamaan (61) menjadi :

$$\int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx = 0 + a_n \ell + 0$$

$$\int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx = \ell a_n \qquad n = 1,2,\ldots$$

$$a_n = 1/\ell \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx \quad , n = 1,2,\ldots \qquad \ldots(61)$$

Untuk menentukan a_o, Persamaan (60) diintegralkan dari $-\ell$ ke ℓ.

$$\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\, dx = \frac{a_o}{2} \int_{-\ell}^{\ell} dx + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_{-\ell}^{\ell} \cos \frac{m\pi x}{\ell}\, dx$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} b_m \int_{-\ell}^{\ell} \sin \frac{m\pi x}{\ell}\, dx \qquad \ldots(62)$$

$$\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\, dx = \frac{a_o}{2} \Big]^{\ell} dx + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \left\{ \frac{\ell}{m\pi} \sin \frac{m\pi x}{\ell} \Big|_{-\ell}^{\ell} \right\}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m \left\{ \frac{-\ell}{m\pi} \cos \frac{m\pi x}{\ell}\, dx \Big|_{-\ell}^{\ell} \right\}$$

$$= \frac{a_o}{2} \left[\ell + \ell\right] + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \left\{ \frac{\ell}{m\pi} \sin m\pi + \frac{\ell}{m\pi} \sin m\pi \right\}$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} b_m \left\{ \frac{-\ell}{m\pi} \cos m\pi + \frac{\ell}{m\pi} \cos m\pi \right\}$$

$$= \frac{a_o}{2}\, 2\ell + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \left\{ 0 + 0 \right\} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \,.\, 0$$

$$= a_o . \ell + 0 + 0$$

$$\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\, dx = \ell .\, a_o$$

$$a_o = {}^{1}/_{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x)\, dx \qquad \ldots(63)$$

Jika persamaan (60) dikalikan dengan sin $(n\pi x/\ell)$ diintegralkan dari $-\ell$ ke ℓ.

$$\int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell}\, dx = \frac{a_o}{2} \int_{-\ell}^{\ell} \sin \frac{n\pi x}{\ell}\, dx$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_{-\ell}^{\ell} \cos \frac{m\pi x}{\ell}\, dx \ \sin \frac{n\pi x}{\ell}\, dx$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} b_m \int_{-\ell}^{\ell} \sin \frac{m\pi x}{\ell} \sin \frac{n\pi x}{\ell}\, dx \qquad \ldots(64)$$

Jika m = n, menurut pers. (57) dan (59) maka pers. (64) menjadi :

$$\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin \frac{n\pi x}{\ell}\, dx = 0 + 0 + b_n . \ell$$

$$\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin \frac{n\pi x}{\ell}\, dx = \ell\, b_n$$

$$b_n = {}^1/_\ell \int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin \frac{n\pi x}{\ell}\, dx \quad ,n = 1,2,\ldots \quad \ldots(65)$$

3.4. KONVERGENSI UNIFORM

Andaikan terdapat sebuah deret tak terhingga $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$. Didefinisikan jumlah parsial ke R dari suatu deret sebagai jumlah R suku yang pertama dati deret tersebut, yaitu :

$$S_R(x) = \sum_{n=1}^{R} U_n(x)$$

Berdasarkan definisi, suatu deret tak terhingga dikatakan sebagai konvergen ke $f(x)$ pada suatu interval, kalau diberikan sembarang bilangan positif ε, maka pada setiap x di dalam interval tersebut terdapat suatu bilangan positif N, sehingga :

$$\left| S_R(x) - f(x) \right| < \varepsilon \quad , \text{pada waktu } R > N$$

Bilangan N secara umum tergantung tidak hanya pada ε tetapi juga pada x. $f(x)$ dinamakan sebagai jumlah dari deret tersebut.

Salah satu kasus yang penting akan terjadi bilamana N tergantung pada ε akan tetapi tidak terfgantung pada x diinterval tersebut, dikatakan bahwa deret tersebut konvergen secara uniform ke

$f(x)$.

DEFINISI 21 :

Apabila masing-masing suku dari deret terhingga kontinu pada interval (a, b) dan deret tersebut konvergen secara uniform ke jumlah $f(x)$ pada interval ini, maka :

1. $f(x)$ juga kontinu pada interval tersebut.
2. deret tersebut dapat diintegralkan suku demi suku, yaitu :

$$\int_a^b \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} U_n\ (x) \right\} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b U_n\ (x)\ dx$$

3.5. DEFINISI-DEFINISI YANG BERHUBUNGAN DENGAN FUNGSI ORTOGONAL HIMPUNAN ORTONORMAL

Dua vektor $A = A_1\bar{i} + A_2\bar{j} + A_3\bar{k}$ dan $B = B_1\bar{i} + B_2\bar{j} + B_3\bar{k}$ dikatakan orthogonal (tegak lurus) kalau $A \cdot B = 0$

Secara khusus ambil sebuah fungsi, misalnya A(x) sebagai sebuah vektor yang mempunyai komponen tak terhingga, yang harga dari tiap-tiap komponennya ditentukan dengan mensubstitusi harga khusus dari x jyang diambil dari interval (a, b), sehingga untuk menentukan dua fungsi A(x) dan B(x) sebagai ortogonal pada (a, b).

$$\int_a^b A(x)\ B(x)\ dx = 0 \qquad \ldots(66)$$

Ruas sebelah kiri dari (66) sering disebut sebagai perkalian skalar dari A(x) dan B(x).

Sebuah vektor A disebut vektor satuan (unit vektor) atau vektor normal kalau besarnya sama dengan satu, yaitu $A \cdot A = A^2 = 1$. Dengan konsep ini dapat dikatakan bahwa fungsi A(x) disebut normal pada (a, b), jika :

$$\int_a^b \left\{ A(x) \right\}^2 dx = 1 \qquad \ldots(67)$$