

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1. PENGERTIAN

Persamaan Differensial order 2. Linear Homogen berbentuk :

$$p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0 \quad , \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \dots (1)$$

dimana  $p(x)$ ,  $q(x)$  &  $r(x)$  kontinu pada interval  $[0,1]$ . Untuk menyelesaikan PD (1) terdapat syarat batas yang harus dipenuhi:

$$a_1 y(0) + a_2 y'(0) = 0$$

$$b_1 y(1) + b_2 y'(1) = 0$$

Masalah untuk memecahkan PD (1) dalam suatu interval, dengan syarat batas pada masing-masing titik interval disebut MASALAH HARGA BATAS 2 TITIK.

PD (1) disebut self Adjoint jika dapat ditulis dalam bentuk :

$$\frac{d [p(x)y']}{d(x)} + r(x) y = 0$$

Suatu persamaan Sturm Liouville adalah PD Linear Homogen order 2 dalam bentuk Self Adjoint :

$$[p(x)y']' - q(x) y + \lambda r(x)y = 0 \quad \dots (2)$$

pada interval  $0 < x < 1$  dengan syarat batas

$$a_1 y(0) + a_2 y'(0) = 0$$

$$b_1 y(1) + b_2 y'(1) = 0$$

operator L didefinisikan sebagai

$$L[y] = -[p(x)y']' + q(x)y$$

maka PD (2) dapat ditulis sebagai

$$L[y] = \lambda r(x)y \quad \dots (3)$$

dimana L adalah operator Self Adjoint, p, p', q, & r kontinu pada interval  $0 \leq x \leq 1$ ,  $p(x) > 0$ ,  $r(x) > 0$  pada setiap titik dalam  $0 \leq x \leq 1$ .

System Sturm Liouville adalah persamaan Sturm Liouville (3) dengan syarat batas yang memenuhi solusi. Solusi nontrivial dari system Sturm Liouville disebut eigen function dan  $\lambda$  yang bersangkutan disebut eigen value.

Teori Sturm Liouville digunakan untuk menentukan semua eigenfunction dan eigenvalue dari sistem Sturm Liouville.

Contoh :

1. Masalah Harga Batas

$$y'' + \lambda y = 0$$

$$y(0) = 0, y(1) = 0$$

mempunyai solusi umum :  $y = A \sin \sqrt{\lambda}x + B \cos \sqrt{\lambda}x$

$$* \text{ Syarat } y(0) = 0 \quad \longrightarrow \quad 0 = A \sin 0 + B \cos 0$$

$$0 = B$$

$$\text{jadi } y = A \sin \sqrt{\lambda} x$$

$$* \text{ Syarat } y(1) = 0 \quad \longrightarrow \quad 0 = A \sin \sqrt{\lambda}$$

Karena  $A \neq 0$ , maka  $\sqrt{\lambda}$  adalah kelipatan dari  $\pi$

$\lambda = n^2 \pi^2$ ,  $n = 1, 2, \dots$  disebut eigenvalue dan

$y = A \sin n\pi x$  disebut eigenfunction.

## 2. Masalah Harga Batas Sturm Liouville

$$y'' + \lambda y = 0$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0$$

adalah system Sturm Liouville (2) dengan  $p(x) = 1$ ,  
 $q(x) = 0$ , dan  $r(x) = 1$

Dari contoh (1) didapat eigenvalue adalah  
 $\lambda_n = n^2 \pi^2$ , dan eigenfunction :  $\phi_n(x) = A \sin n\pi x$ .  
 Dengan Theorema Sturm Liouville (dibahas dalam bab  
 IV), kita dapat menentukan nilai A :

$$\int_0^1 r(x) \phi_n^2(x) dx = 1, \quad n = 1, 2, \dots$$

karena  $r(x) = 1$ , maka :

$$\int_0^1 (A \sin n\pi x)^2 dx = 1$$

$$A^2 \int_0^1 \sin^2 n\pi x dx = A^2 \int_0^1 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2n\pi x \right) dx$$

$$= 1$$

$$\frac{1}{2} A^2 = 1$$

$$A^2 = 2 \quad \rightarrow A = \pm \sqrt{2}$$

jadi eigenfunction dari contoh 2 adalah :

$$\phi_n(x) = \pm \sqrt{2} \sin n\pi x, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

### 1.2. PERMASALAHAN

Dari uraian di atas dapat di ambil suatu permasalahan yaitu : Bagaimana sifat-sifat eigenfunction dan eigenvalue dari masalah harga batas Sturm Liouville.

### 1.3. PEMBAHASAN

Dari deffinisi & teorema dasar yang ada akan di bahas masalah harga batas Sturn Lioville homogen , non homogen dan fungsi green dalam menyelesaikan masalah harga batas.

Sistematika pembahasan adalah :

- BAB I, Pendahuluan yang berisi latar belakang dari penulisan tugas akhir ini.
- BAB II, Teori penunjang yaitu materi dasar yang diperlukan dalam menyelesaikan masalah harga batas.
- BAB III, Teori penunjang yang berisi Deret Fourier yang biasanya terjadi sebagai solusi dari persamaan differensial.
- BAB IV, Merupakan bab isi yang terdiri dari 3 sub bab yang menguraikan masalah harga Sturn Lioville Homogen, masalah harga batas Sturn Lioville Non Homogen & Fungsi Green dalam menyelesaikan masalah harga batas.
- BAB V, Bab penutup yang berisi kesimpulan.