BAB II

TEORI PENUNJANG

2.1 Deret Fourier

2.1.1 Fungsi Periodik

Suatu fungsi waktu periodik $x(t)$ disebut mempunyai periode P atau menjadi periodik dengan periode P, jika P positif terkecil untuk semua harga t yang memenuhi :

$$x(t + P) = x(t) \quad \text{.................} (2.1)$$

contoh 2.1

1. $x(t) = \sin t$ mempunyai periode 2π
2. $x(t) = \cos nt$, n = bilangan bulat positip .
   Periodenya adalah $2\pi/n$.

2.1.2 Fungsi Genap dan Fungsi Ganjil

2.1.2.1 Fungsi Ganjil

Suatu fungsi waktu $x(t)$ disebut fungsi ganjil dalam selang [a,b] . Jika :

$$x(-t) = -x(t) \quad \text{..............} (2.2)$$

untuk semua harga $t \in [a,b]$.

contoh 2.2

1. $x(t) = t^3$

2. $x(t) = \sin t$

2.1.2.2 Fungsi Genap

Suatu fungsi $x(t)$ disebut **fungsi genap** dalam selang $[a,b]$, jika :

$$x(-t) = x(t) \qquad \text{................(2.3)}$$

untuk semua harga $t \in [a,b]$

contoh 2.3

1. $x(t) = t^4$

2. $x(t) = \cos t$

2.1.3 Deret Fourier dengan Koefisien Riil

Suatu fungsi waktu periodik $x(t)$ besarnya sama dalam satu periode , maka deret Fourier dengan koefisien riil didefinisikan oleh :

$$x(t) = \frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos \frac{2\pi kt}{P} + b_k \sin \frac{2\pi kt}{P} \right] \qquad \text{....(2.4)}$$

dimana :

P = perioda

k/P = frekuensi

k = 0,1,2, ...

a_k , a_o , b_k = koefisien deret Fourier

dengan harga – harga koefisien :

$$a_o = \frac{2}{P} \int_0^P x(t) \; dt \qquad \text{.............(2.5)}$$

$$a_k = \frac{2}{P}\int_0^P x(t)\cos\frac{2\pi kt}{P}\,dt \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.6)$$

$$b_k = \frac{2}{P}\int_0^P x(t)\sin\frac{2\pi kt}{P}\,dt \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.7)$$

Bukti :

Untuk menentukan koefisien – koefisien deret Fourier persamaan (2.5), persamaan (2.6) dan persamaan (2.7) menggunakan integral-integral dibawah ini :

i. $$\int_0^P \sin\frac{2\pi nt}{P}\,dt = \int_0^P \cos\frac{2\pi nt}{P}\,dt = 0 \qquad \ldots.(2.8)$$

ii. $$\int_0^P \cos\frac{2\pi nt}{P}\cos\frac{2\pi kt}{P}\,dt =$$

$$\int_0^P \sin\frac{2\pi nt}{P}\sin\frac{2\pi kt}{P}\,dt = \begin{cases} 0 & ,\text{untuk } n \neq k \\ P/2, & \text{untuk } n = k \end{cases} \qquad \ldots(2.9)$$

iii. $$\int_0^P \sin\frac{2\pi nt}{P}\cos\frac{2\pi kt}{P}\,dt = \int_0^P \cos\frac{2\pi nt}{P}\sin\frac{2\pi kt}{P}\,dt = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.10)$$

a. Menentukan Koefisien a_o

Koefisien a_o pada persamaan (2.5) diperoleh dengan mengintegralkan kedua ruas pada persamaan (2.4) dengan periode penuh (interval $o \leq t \leq P$) sehingga menjadi :

$$\int_0^P x(t)\,dt = \int_0^P \frac{a_o}{2}\,dt + \int_0^P\left[\sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\frac{2\pi kt}{P} + b_k\sin\frac{2\pi kt}{P}\right]dt$$

$$= \frac{a_o}{2}\int_0^P dt + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\int_0^P \cos\frac{2\pi kt}{P}\,dt + b_k\int_0^P \sin\frac{2\pi kt}{P}\right]$$

$$\int_0^P x(t)\,dt = \frac{a_o}{2}\,t\,\Big|_0^P + \sum_{k=1}^{\infty}\Big[\,0 + 0\,\Big]$$

$$= \frac{a_o}{2}\,(P - 0)$$

$$= \frac{a_o P}{2}$$

Sehingga $a_o = \frac{2}{P}\int_0^P x(t)\,dt$ ....(2.11)

b. Menentukan Koefisien a_k

Koefisien a_k pada persamaan (2.6) diperoleh dengan mengalikan kedua ruas pada persamaan (2.4) dengan $\cos\frac{2\pi nt}{P}$ dan diintegralkan dengan periode penuh (interval $o \le t \le P$) sehingga menjadi :

$$\int_0^P x(t)\cos\frac{2\pi nt}{P}\,dt = \int_0^P \frac{a_o}{2}\cos\frac{2\pi nt}{P}\,dt + \int_0^P \sum_{k=1}^{\infty}\Big[\,a_k \cos\frac{2\pi nt}{P}\cos\frac{2\pi kt}{P} + b_k\cos\frac{2\pi nt}{P}\sin\frac{2\pi kt}{P}\Big]\,dt$$

$$= \frac{a_o}{2}\int_0^P \cos\frac{2\pi nt}{P}\,dt + \sum_{k=1}^{\infty}\Big[\,a_k\int_0^P \cos\frac{2\pi nt}{P}\cos\frac{2\pi kt}{P}\,dt + b_k\int_0^P \cos\frac{2\pi nt}{P}\sin\frac{2\pi kt}{P}\,dt\,\Big]$$

Dengan menggunakan persamaan (2.8), persamaan (2.9), dan persamaan (2.10) diperoleh :

$$\int_0^P x(t)\cos\frac{2\pi nt}{P}\,dt = 0 + \frac{a_k P}{2} + 0$$

$$= \frac{a_k P}{2}$$

maka $\int_0^P x(t)\cos\frac{2\pi kt}{P}\,dt = \frac{a_k P}{2}$

Jadi diperoleh $a_k = \frac{2}{P} \int_0^P x(t) \cos \frac{2\pi kt}{P} \, dt$ ...(2.12)

c. Menentukan Koefisien b_k

Koefisien b_k pada persamaan (2.7) diperoleh dengan mengalikan kedua ruas pada persamaan (2.4) dengan $\sin \frac{2\pi nt}{P}$ dan diintegralkan dengan periode penuh (interval $0 \le t \le P$) , sehingga :

$$\int_0^P x(t) \sin \frac{2\pi nt}{P} \, dt = \int_0^P \frac{a_0}{2} \sin \frac{2\pi nt}{P} \, dt + \int_0^P \sum_{k=1}^{\infty} \Big[a_k \sin \frac{2\pi nt}{P} \cos \frac{2\pi kt}{P} + b_k \sin \frac{2\pi nt}{P} \sin \frac{2\pi kt}{P} \Big] \, dt$$

$$= \frac{a_0}{2} \int_0^P \sin \frac{2\pi nt}{P} \, dt + \sum_{k=1}^{\infty} \Big[a_k \int_0^P \sin \frac{2\pi nt}{P} \cos \frac{2\pi kt}{P} \, dt + b_k \int_0^P \sin \frac{2\pi nt}{P} \sin \frac{2\pi kt}{P} \, dt \Big]$$

Dengan menggunakan persamaan (2.8), persamaan (2.9), dan persamaan (2.10) diperoleh :

$$\int_0^P x(t) \sin \frac{2\pi nt}{P} \, dt = 0 + 0 + \frac{b_k P}{2}$$

$$= \frac{b_k P}{2}$$

maka $\int_0^P x(t) \sin \frac{2\pi kt}{P} \, dt = \frac{b_k P.}{2}$

Jadi diperoleh $b_k = \frac{2}{P} \int_0^P x(t) \sin \frac{2\pi kt}{P} \, dt$ ...(2.13)

2.1.4 Deret Fourier dengan Koefisien Komplek

Deret Fourier dengan koefisien riil persamaan (2.4) dikonversi untuk deret Fourier dengan koefisien Komplek menggunakan identitas Eulers yaitu :

$$\cos \theta = \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \quad \text{..........(2.14)}$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2i} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \quad \text{..........(2.15)}$$

dimana $\theta = \frac{2\pi k t}{P}$

Subtitusi persamaan (2.14) dan persamaan (2.15) kedalam persamaan (2.4) maka :

$$x(t) = \frac{a_o}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\sim} \left[a_k \; (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + \frac{b_k}{i} \; (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \right]$$

$$= \frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\sim} \left[\frac{1}{2} a_k \; e^{i\theta} + \frac{1}{2} a_k \; e^{-i\theta} + \frac{b_k}{2i} e^{i\theta} - \frac{b_k}{2i} e^{-i\theta} \right]$$

$$= \frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\sim} \left[e^{i\theta} \left(\frac{a_k}{2} + \frac{b_k}{2i} \right) + e^{-i\theta} \left(\frac{a_k}{2} - \frac{b_k}{2i} \right) \right]$$

$$= \frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\sim} \left[e^{i\theta} \left(\frac{a_k i + b_k}{2i} \right) + e^{-i\theta} \left(\frac{a_k i - b_k}{2i} \right) \right] \cdot \frac{i}{i}$$

$$= \frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\sim} \left[e^{i\theta} \left(\frac{-a_k + ib_k}{-2} \right) + e^{-i\theta} \left(\frac{-a_k - ib_k}{-2} \right) \right]$$

$$= \frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\sim} \left[e^{i\theta} \left(\frac{a_k - ib_k}{2} \right) + e^{-i\theta} \left(\frac{a_k + ib_k}{2} \right) \right]$$

$$= \frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\sim} \left[e^{\frac{i2\pi kt}{P}} \left(\frac{a_k - ib_k}{2} \right) + e^{\frac{-i2\pi kt}{P}} \left(\frac{a_k + ib_k}{2} \right) \right]$$

$$\text{..................(2.16)}$$

Untuk menyederhanakan persamaan (2.16) subtitusi $k = -k$ pada persamaan (2.12) dan persamaan (2.13) sehingga menjadi :

$$a_{-k} = \frac{2}{P} \int_0^P x(t) \cos \left(- \frac{2\pi kt}{P} \right) dt$$

$$a_{-k} = \frac{2}{P} \int_0^P x(t) \cos \frac{2\pi kt}{P}\, dt$$

$$= a_k \qquad \text{..................(2.17)}$$

$$b_{-k} = \frac{2}{P} \int_0^P x(t) \sin \left(- \frac{2\pi kt}{P}\right) dt$$

$$= - \frac{2}{P} \int_0^P x(t) \sin \left(\frac{2\pi kt}{P} \right) dt$$

$$= - b_k \qquad \text{.................(2.18)}$$

Dengan dasar persamaan (2.17) dan persamaan (2.18) maka:

$$\sum_{k=1}^{\sim} a_k\, e^{-\frac{i2\pi kt}{P}} = \sum_{k=-1}^{-\sim} a_k\, e^{\frac{i2\pi kt}{P}} \qquad \text{............(2.19)}$$

$$\sum_{k=1}^{\sim} i\, b_k\, e^{-\frac{i2\pi kt}{P}} = - \sum_{k=-1}^{-\sim} i\, b_k\, e^{\frac{i2\pi kt}{P}} \qquad \text{............(2.20)}$$

Subtitusi persamaan (2.19) dan persamaan (2.20) pada persamaan (2.16) sehingga menjadi :

$$x(t) = \frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\sim} e^{\frac{i2\pi kt}{P}} \left[\frac{a_k - ib_k}{2} \right] + \sum_{k=-1}^{-\sim} e^{\frac{i2\pi kt}{P}} \left[\frac{a_k - ib_k}{2} \right]$$

$$\text{............(2.21)}$$

Dengan mengambil $X(k) = 1/2 \;(a_k - i\, b_k)$ ....(2.22)

dimana X(k) = koefisien deret Fourier komplek, maka persamaan (2.21) dapat ditulis :

$$x(t) = \frac{a_o}{2} + \sum_{k=1}^{\sim} X(k)\, e^{\frac{i2\pi kt}{P}} + \sum_{k=-1}^{-\sim} X(k)\, e^{\frac{i2\pi kt}{P}} \qquad \text{.........(2.23)}$$

Subtitusi persamaan (2.12) dan persamaan (2.13) untuk k = 0 pada persamaan (2.22) maka :

$$X(0) = \frac{1}{2} (a_o - b_o)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{2}{P} \int_o^P x(t) \cos 0 \, dt - i \frac{2}{P} \int_o^P x(t) \sin 0 \, dt \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{2}{P} \int_o^P x(t) \, dt - i \frac{2}{P} \int_o^P x(t) \, 0 \, dt \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{2}{P} \int_o^P x(t) \, dt - 0 \right]$$

$$= \frac{1}{P} \int_o^P x(t) \, dt$$

$$= \frac{a_o}{2} \qquad \text{..................(2.24)}$$

Persamaan (2.24) disubtitusi pada persamaan (2.23) , akan diperoleh :

$$x(t) = X(0) + \sum_{k=1}^{\sim} X(k) \, e^{\frac{i2\pi kt}{P}} + \sum_{k=-1}^{-\sim} X(k) \, e^{\frac{i2\pi kt}{P}}$$

$$= \sum_{k=-\sim}^{\sim} X(k) \, e^{\frac{i2\pi kt}{P}} \qquad \text{..................(2.25)}$$

Persamaan (2.25) adalah **deret Fourier Komplek** .

Koefisien X(k) diperoleh dengan mensubtitusi koefisien a_k persamaan (2.6) dan b_k persamaan (2.7) ke persamaan (2.22) sehingga diperoleh :

$$X(k) = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{P} \int_o^P x(t) \cos \frac{2\pi kt}{P} \, dt - i \frac{2}{P} \int_o^P x(t) \sin \frac{2\pi kt}{P} \, dt \right]$$

$$= \frac{1}{P} \int_o^P x(t) \cos \frac{2\pi kt}{P} \, dt - \frac{i}{P} \int_o^P x(t) \sin \frac{2\pi kt}{P} \, dt$$

$$\text{...............(2.26)}$$

Subtitusi persamaan (2.14) dan persamaan (2.15) pada persamaan (2.26) maka :

$$X(k) = \frac{1}{P}\int_0^P x(t)\left[\frac{e^{\frac{i2\pi kt}{P}} + e^{-\frac{i2\pi kt}{P}}}{2}\right] dt \; -$$

$$\frac{i}{P}\int_0^P x(t)\left[\frac{e^{\frac{i2\pi kt}{P}} - e^{-\frac{i2\pi kt}{P}}}{2i}\right] dt$$

$$= \frac{1}{P}\int_0^P x(t)\left[\frac{e^{\frac{i2\pi kt}{P}} + e^{-\frac{i2\pi kt}{P}}}{2}\right] dt \; -$$

$$\frac{1}{P}\int_0^P x(t)\left[\frac{e^{\frac{i2\pi kt}{P}} - e^{-\frac{i2\pi kt}{P}}}{2}\right] dt$$

$$= \frac{1}{P}\int_0^P x(t)\,\frac{e^{\frac{i2\pi kt}{P}}}{2}\, dt + \frac{1}{P}\int_0^P x(t)\,\frac{e^{-\frac{i2\pi kt}{P}}}{2}\, dt \; -$$

$$\frac{1}{P}\int_0^P x(t)\,\frac{e^{\frac{i2\pi kt}{P}}}{2}\, dt + \frac{1}{P}\int_0^P x(t)\,\frac{e^{-\frac{i2\pi kt}{P}}}{2}\, dt$$

$$= 0 + \frac{2}{P}\int_0^P x(t)\,\frac{e^{-\frac{i2\pi kt}{P}}}{2}\, dt$$

$$X(k) = \frac{1}{P}\int_0^P x(t)\, e^{-\frac{i2\pi kt}{P}}\, dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\ 2.27\ )$$

Persamaan (2.27) adalah **Koefisien Deret Fourier Komplek.**

2.2 Transformasi Fourier Kontinu

Pada bagian sebelumnya telah dibahas deret Fourier yang merupakan fungsi yang bersifat periodik. Sedang pada kenyataan sehari - hari ada gejala tak periodik , yang dianggap periodik dengan periode tak berhingga diuraikan menjadi Transformasi Fourier Kontinu . Jadi pada hakekatnya Transformasi Fourier Kontinu adalah deret Fourier dengan periode tak berhingga . Transformasi Fourier Kontinu selanjutnya dikembangkan lagi menjadi Transformasi Fourier Diskret (dibahas pada bab III) .

2.2.1 Pengertian

Teorema 2.1

Suatu fungsi waktu x(t) dapat dinyatakan sebagai Transformasi Fourier Kontinu , jika :

$$X(f) = \int_{-\sim}^{\sim} x(t) \; e^{-i2\pi ft} \, dt \qquad \text{.............(2.28)}$$

dimana :

X(f) = fungsi kawasan frekuensi

f = frekuensi

t = variabel waktu

x(t) = fungsi kawasan waktu

Bukti :

Pandang koefisien deret Fourier kompleks pada persamaan (2.27) pertukaran batas limit o dan P menjadi $-\frac{P}{2}$ dan $\frac{P}{2}$, tidak memberi effek bagi harga integral karena integrasi dilakukan pada fungsi periodik . Dengan demikian maka :

$$X(k) = \frac{1}{P} \int_{-P/2}^{P/2} x(t) \; e^{-\frac{i2\pi kt}{P}} \, dt \qquad \text{........(2.29)}$$

Gandakan kedua ruas pada persamaan (2.29) dengan P, sehingga menjadi :

$$_P X(k) = \int_{-P/2}^{P/2} x(t) \, e^{-\frac{i2\pi kt}{P}} \, dt \quad \text{........(2.30)}$$

Transformasi Fourier Kontinu adalah deret Fourier dengan periode tak berhingga, jadi $P = \infty$. Dengan $\frac{k}{P}$ adalah frekuensi sinusoida sehingga P menjadi lebih besar, ini mengakibatkan jarak $\frac{k}{P}$ dan $\frac{k+1}{P}$ menjadi kecil, sehingga didefinisikan :

$$f = \lim_{P \to \infty} \frac{k}{P} \quad \text{......................(2.31)}$$

Pendekatan frekuensi dengan variable kontinu didefinisikan juga untuk $P = \infty$, pada ruas kiri persamaan (2.30) sehingga :

$$X(f) = \lim_{P \to \infty} {}_P X(k) \quad \text{....................(2.32)}$$

Selanjutnya dengan mengkombinasi persamaan (2.31) dan persamaan (2.32) diperoleh :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \, e^{-i2\pi ft} \, dt \quad \text{.............(2.33)}$$

Persamaan (2.33) adalah **Transformasi Fourier Kontinu.**

Secara umum Transformasi Fourier Kontinu adalah besaran kompleks yaitu :

$$X(f) = R(f) + i \, I(f) = | \, X(f) \, | \, e^{i\Theta(f)} \quad \text{.......(2.34)}$$

dimana :

$R(\,f\,)$ = Bagian real Transformasi Fourier Kontinu .

$I(\,f\,)$ = Bagian imaginer Transformasi Fourier Kontinu .

$|X(f)|$ = Amplitudo atau Spektrum Fourier $x(t)$ dan

$$| X(f) | = \sqrt{R^2(f) + I^2(f)}$$

$\theta(f)$ = Sudut fase Transformasi Fourier Kontinu

$$\theta(f) = \tan^{-1} \left(\frac{I(f)}{R(f)} \right)$$

Bukti persamaan (2.34) akan diberikan pada teorema 2.9

2.2.2 Invers Transformasi Fourier Kontinu

Teorema 2.2

Invers Transformasi Fourier Kontinu dari persamaan (2.28) adalah :

$$x(t) = \int_{-\sim}^{\sim} X(f) \; e^{i2\pi ft} \; df \quad ....(2.35)$$

Bukti :

Invers Tranformasi Fourier diturunkan dari deret Fourier Komplek pada persamaan (2.25) yaitu :

$$x(t) = \sum_{k=-\sim}^{\sim} X(k) \; e^{\frac{i2\pi kt}{P}} \quad ....(2.36)$$

Gandakan kedua ruas persamaan (2.36) dengan P , maka :

$$P \; x(t) = \sum_{k=-\sim}^{\sim} X(k) \; e^{\frac{i2\pi kt}{P}} \; P$$

$$x(t) = \sum_{k=-\sim}^{\sim} P \; X(k) \; e^{\frac{i2\pi kt}{P}} \; \frac{1}{P} \quad ....(2.37)$$

Pandang P sebagai pendekatan tak berhingga , dengan mengambil pemisahan antara frekuensi yang berdekatan yaitu $\frac{k}{P}$ dan $\frac{k+1}{P}$ yang didefinisikan sebagai df maka :

$$df = \lim_{P \to \sim} \left[\frac{k+1}{P} - \frac{k}{P} \right]$$

$$= \lim_{P \to \sim} \left[\frac{1}{P} \right] \quad ....(2.38)$$

Persamaan (2.38) menjadi integrasi garis spektral kontinu sehingga df menjadi kecil . Dengan menggunakan persamaan (2.32) dan (2.38) maka :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \; e^{i2\pi ft} \; df \qquad \text{............(2.39)}$$

Persamaan (2.39) adalah Invers Transformasi Fourier Kontinu.

Pasangan Transformasi Fourier Kontinu adalah relasi antara Transformasi Fourier Kontinu dengan inversnya (fungsi x(t) dan fungsi X(f)) yang dinyatakan sebagai :

$$x(t) \longleftrightarrow X(f)$$

Pasangan Transformasi Fourier Kontinu sampai dewasa ini belum mempunyai definisi yang disepakati bersama. Untuk lebih jelasnya , pandang pasangan Transformasi Fourier Kontinu yang didefinisikan sebagai :

$$X(\omega) = a_1 \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \; e^{-i\omega t} \; dt, \; \omega = 2\pi f \qquad \text{....(2.40)}$$

$$x(t) = a_2 \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \; e^{i\omega t} \; d\omega \qquad \text{....(2.41)}$$

Dimana pengambilan harga koefisien a_1 dan a_2 akan berubah menurut kebutuhan, tergantung pada pemakainya . misalnya $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2\pi}$ atau $a_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $a_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ atau $a_1 = \frac{1}{2\pi}$, $a_2 = 1$.

Dengan syarat harus memenuhi $a_1 . a_2 = \frac{1}{2\pi}$, namun bagi pemakai yang berbeda akan menguraikan perkalian a_1 dan a_2 menjadi faktor perkalian yang berbeda pula.

Untuk menyelesaikan persoalan ini, perlu mendefinisikan bentuk hubungan antara Transformasi Laplace dan Transformasi Fourier Kontinu , serta mendefinisikan hubungan yang diharapkan antara totalitas energi yang dihitung dalam kawasan waktu dan totalitas energi yang dihitung dalam kawasan frekuensi.

Bila mempersyaratkan energi yang dihitung pada t sama dengan energi yang dihitung pada ω maka $a_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ Tetapi bila mempersyaratkan Transformasi Fourier dijabarkan dari Transformasi Laplace maka dari definisi Transformasi Laplace, yaitu :

$$L\left[x(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\ e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\ e^{-(\sigma + i2\pi f)t} dt \quad \ldots(2.42)$$

bila bagian riil s ditetapkan s = 0 , maka langsung diperoleh Transformasi Fourier Kontinu .

Dengan membandingkan persamaan (2.40) dan persamaan (2.42) yang mempersyaratkan $a_1 = 1$ dan $a_2 = \frac{1}{2\pi}$, hal itu kontradiksi dengan langkah didepannya . Untuk mengatasi kontradiksi tersebut, jalan keluar yang tepat adalah mendefinisikan pasangan Transformasi Fourier Kontinu sebagai berikut :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\ e^{-i2\pi f t}\ dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(\ 2.43\ )$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\ e^{i2\pi f t}\ df \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(\ 2.44\ )$$

2.2.3 Sifat-sifat Transformasi Fourier Kontinu

a. Kelinearan

Teorema 2.3

Jika $x(t)$ dan $y(t)$ mempunyai Transformasi Fourier Kontinu $X(f)$ dan $Y(f)$ maka :

$$x(t) + y(t) \longleftrightarrow X(f) + Y(f)$$

Bukti :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[x(t) + y(t) \right] e^{-i2\pi ft}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-i2\pi ft}\, dt + \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\, e^{-i2\pi ft}\, dt$$

$$= X(f) + Y(f)$$

Jadi $x(t) + y(t) \longleftrightarrow X(f) + Y(f)$

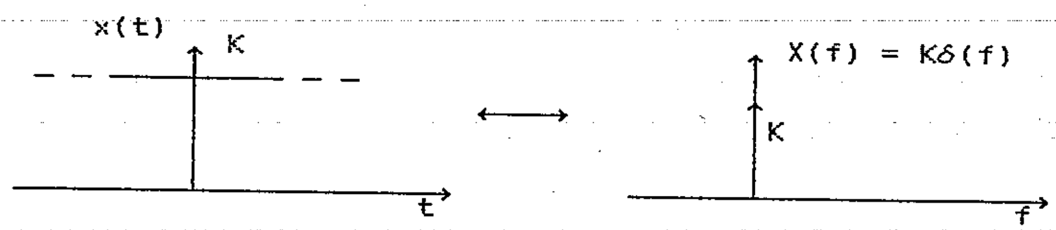
Contoh 2.4

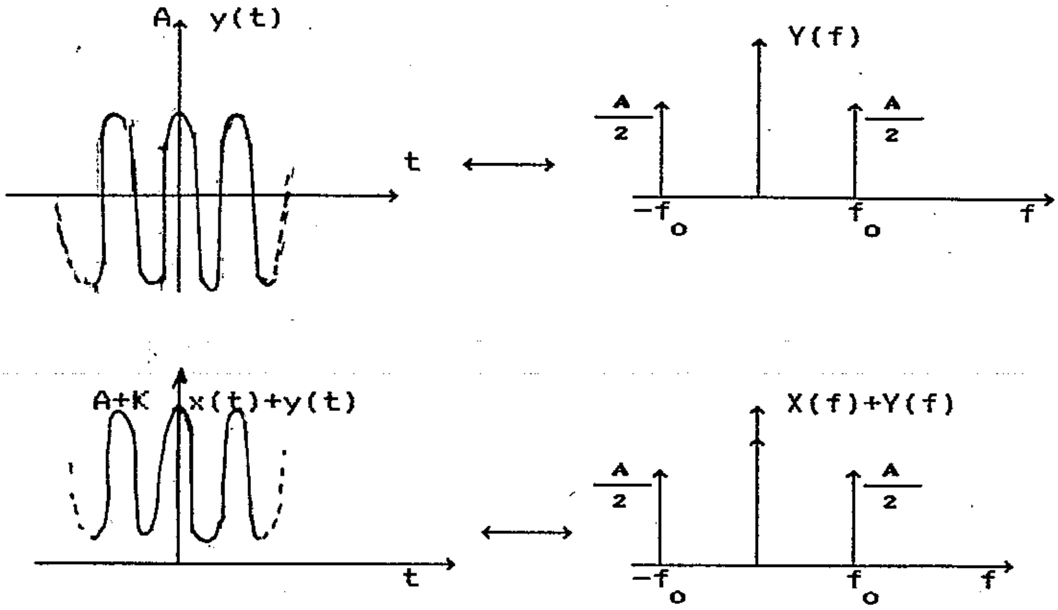
$$x(t) = K \longleftrightarrow X(f) = K\,\delta(f)$$

$$y(t) = A\cos(2\pi f_o t) \longleftrightarrow Y(f) = \frac{A}{2}\,\delta(f-f_o) + \frac{A}{2}\,\delta(f+f_o)$$

dengan sifat kelinearan , maka :

$$x(t) + y(t) = K + A\cos(2\pi f_o t) \longleftrightarrow X(f)+Y(f) = K\delta(f) + \frac{A}{2}\,\delta(f-f_o) + \frac{A}{2}\,\delta(f+f_o)$$





Gambar 2.1 Sifat Kelinearan

b. Sifat Simetris

Teorema 2.4

Jika $x(t) \longleftrightarrow X(f)$ maka $X(t) \longleftrightarrow x(-f)$

Bukti :

Jika $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\, e^{i2\pi ft}\, df$ maka

$$x(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\, e^{-i2\pi ft}\, df$$

Dengan saling menukar parameter t dengan f maka

$$x(-f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t)\, e^{-i2\pi ft}\, dt$$

$$= \mathcal{F}\left[\, X(t)\, \right]$$

Jadi $X(t) \longleftrightarrow x(-f)$

c. Pergeseran Waktu

Teorema 2.5

Jika $x(t) \longleftrightarrow X(f)$ maka $x(t - t_o) \longleftrightarrow X(f)e^{-i2\pi f t_o}$

Bukti :

Transformasi Fourier $x(t-t_o)$ didefinisikan oleh :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_o)\, e^{-i2\pi f t}\, dt$$

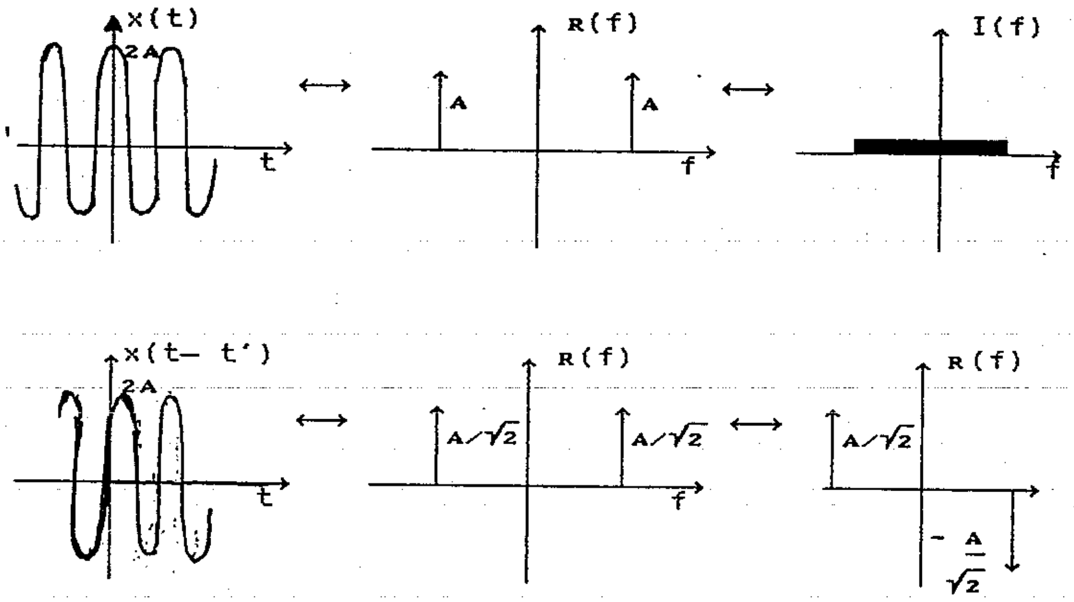
dengan mensubstitusi $a = t - t_o$ maka $da=dt$ dan $t= t_o + a$

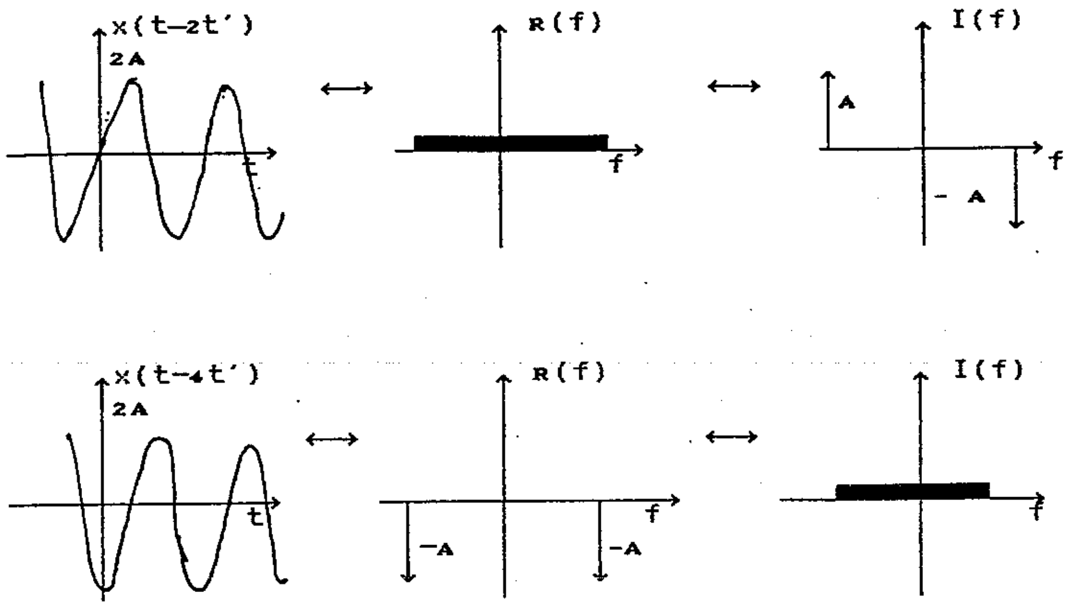
sehingga :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(a)\, e^{-i2\pi f(t_o+a)}\, da = e^{-i2\pi f t_o} \int_{-\infty}^{\infty} x(a)\, e^{-i2\pi f a}\, da$$

$$= e^{-i2\pi f t_o}\, X(f)$$

Jadi $x(t - t_o) \longleftrightarrow X(f)\, e^{-i2\pi f t_o}$





Gambar 2.2 Sifat Pergeseran waktu

d. Pergeseran Frekuensi

Teorema 2.6

Jika $X(f) \longleftrightarrow x(t)$ maka $x(t)\, e^{i2\pi t f_o} \longleftrightarrow X(f - f_o)$

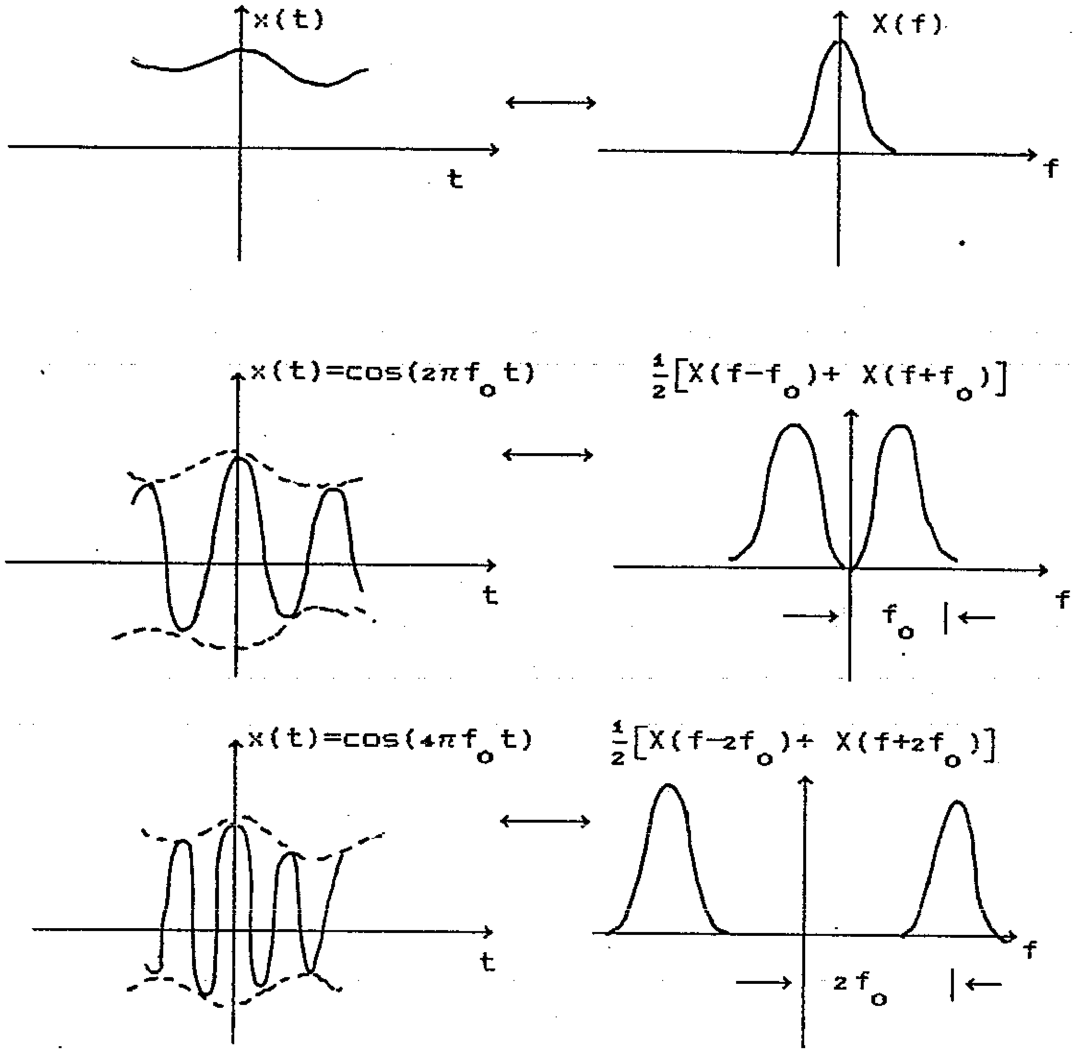
Bukti :

Dengan mensubstitusi $s=f - f_o$ maka $ds = dt$ dan $f = f_o + s$ ke persamaan (2.44), sehingga diperoleh :

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(f-f_o)\, e^{i2\pi f t}\, df = \int_{-\infty}^{\infty} X(s)\, e^{i2\pi t(s+f_o)}\, ds$$

$$= e^{i2\pi t f_o} \int_{-\infty}^{\infty} X(s)\, e^{i2\pi t s}\, ds$$

$$= e^{i2\pi t f_o}\, x(t)$$



Gambar 2.3 Sifat pergeseran frekuensi

e. Fungsi Genap

Teorema 2.7

Jika $x_e(t)$ adalah fungsi genap berarti $x_e(t) = x_e(-t)$ maka hasil transformasinya juga fungsi genap dan real.

$$x_e(t) \longleftrightarrow R_e(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x_e(t)\cos(2\pi ft)\,dt$$

Bukti :

Pasangan ini diperoleh dengan menjabarkan persamaan (2.44) , dengan cara menguraikan x(t) menjadi $x_e(t)$:

$$X(f) = \int_{-\sim}^{\sim} x_e(t)\, e^{-i2\pi ft}\, dt$$

$$= \int_{-\sim}^{\sim} x_e(t) \cos(2\pi ft)\, dt - i \int_{-\sim}^{\sim} x_e(t) \sin(2\pi ft)\, dt$$

$$= \int_{-\sim}^{\sim} x_e(t) \cos(2\pi ft)\, dt = R_e(f)$$

Bagian imaginer adalah nol karena suku yang diintegralkan adalah fungsi ganjil . Karena Cos $(2\pi ft)$ adalah fungsi genap , sehingga berlaku :

$x_e(t)\cos(2\pi ft) = x_e(t)\cos(2\pi f(-t))$ dan $x_e(f) = x_e(-f)$, sehingga fungsi frekuensi merupakan fungsi genap .

Invers dari $X(f)$ adalah :

$$x(t) = \int_{-\sim}^{\sim} X_e(f)\, e^{i2\pi ft}\, df$$

$$= \int_{-\sim}^{\sim} X_e(f) \cos(2\pi ft)\, df - i \int_{-\sim}^{\sim} X_e(f) \sin(2\pi ft)\, df$$

$$= \int_{-\sim}^{\sim} x_e(t) \cos(2\pi ft)\, dt = x_e(t)$$

$x_e(t)$ merupakan fungsi genap , jadi pada pasangan Transformasi Fourier Kontinu berlaku :

$$x_e(t) \longleftrightarrow R_e(f) = \int_{-\sim}^{\sim} x_e(t) \cos(2\pi ft)\, dt$$

f. Fungsi Ganjil

Teorema 2.8

Jika $x_o(t)$ adalah fungsi ganjil berarti $x_o(t) = -x_o(-t)$ maka hasil transformasinya juga fungsi ganjil dan imaginer .

$$x_o(t) \longleftrightarrow i\, I_o(f) = i \int_{-\infty}^{\infty} x_o(t)\, \sin(2\pi ft)\, dt$$

Bukti :

Pasangan ini diperoleh dengan menjabarkan persamaan (2.44) , dengan cara menguraikan $x(t)$ menjadi $x_o(t)$:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x_o(t)\, e^{-i2\pi ft}\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_o(t) \cos (2\pi ft)\, dt \; - i \int_{-\infty}^{\infty} x_o(t) \sin(2\pi ft)\, dt$$

$$= - i \int_{-\infty}^{\infty} x_o(t) \sin(2\pi ft)\, dt$$

$$= i\, I_o(f)$$

Integral bagian riil adalah nol karena suku yang diintegralkan adalah fungsi genap . Karena $\sin(2\pi ft)$ adalah fungsi ganjil sehingga berlaku :

$x_o(t)\sin(2\pi ft) = -x_o(t) \sin(2\pi f(-t))$ dan $X_o(f) = -X_o(-f)$.

Oleh karena itu fungsi kawasan frekuensi merupakan fungsi ganjil . Invers dari $X(f)$ adalah :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X_o(f)\, e^{i2\pi ft}\, df = i \int_{-\infty}^{\infty} I_o(f)\, e^{i2\pi ft}\, df$$

$$= i\int_{-\infty}^{\infty} I_o(f) \cos (2\pi ft)\, df + i^2\int_{-\infty}^{\infty} I_o(f) \sin(2\pi ft)\, df$$

$$= - \int_{-\infty}^{\infty} I_o(f) \sin (2\pi ft)\, df = x_o(t)$$

$x_o(t)$ merupakan fungsi ganjil , jadi pada pasangan Transformasi Fourier Kontinu berlaku :

$$x_o(t) \longleftrightarrow i\, I_o(f) = i \int_{-\infty}^{\infty} x_o(t) \sin(2\pi ft)\, dt$$

g. Fungsi Waktu Komplek

Teorema 2.9

Jika $x(t) = x_r(t) + i x_i(t)$, dimana $x_r(t)$ adalah bagian riil dan $x_i(t)$ adalah bagian imaginer maka Transformasi Fourier Kontinu menjadi :

$$X(f) = R(f) + i\, I(f)$$

Bukti :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \Big[x_r(t) + x_i(t) \Big] e^{-i2\pi ft} \, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \Big[x_r(t) \cos(2\pi ft) + x_i(t) \sin(2\pi ft) \Big] dt \; -$$

$$i \int_{-\infty}^{\infty} \Big[x_r(t) \sin(2\pi ft) - x_i(t) \cos(2\pi ft) \Big] dt$$

Ambil $R(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \Big[x_r(t) \cos(2\pi ft) + x_i(t) \sin(2\pi ft) \Big] dt$

$$I(f) = - i \int_{-\infty}^{\infty} \Big[x_r(t) \sin(2\pi ft) - x_i(t) \cos(2\pi ft) \Big] dt$$

Sehingga :

$$X(f) = R(f) + i\, I(f)$$

h. Konvolusi Waktu

Teorema 2.10

Jika $x(t) \longleftrightarrow X(f)$ dan $h(t) \longleftrightarrow H(f)$ adalah pasangan Transformasi Fourier Kontinu maka :

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t - \tau)\, d\tau \longleftrightarrow Y(f) = X(f) H(f)$$

Bukti :

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi ft} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\ h(t-\tau)\ d\tau \right] dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\ e^{-i2\pi ft}\ dt \right] d\tau$$

Misal $a = t - \tau$, maka $da = dt$ dan $t = a + \tau$. Jadi

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(a)\ e^{-i2\pi f(a+\tau)}\ da \right] d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\ e^{-i2\pi fa}\ d\tau \int_{-\infty}^{\infty} h(a)\ e^{-i2\pi f\tau}\ da$$

$$= X(f)\ H(f)$$

i. Konvolusi Frekuensi

Teorema 2.11

Jika $x(t) \longleftrightarrow X(f)$ dan $h(t) \longleftrightarrow H(f)$ adalah pasangan Transformasi Fourier Kontinu maka :

$$x(t)\ h(t) \longleftrightarrow X(f) * H(f)$$

Bukti :

$$X(f) * H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi ft} \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\ H(f-\tau)\ df \Big]\ d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \int_{-\infty}^{\infty} H(f-\tau)\ e^{i2\pi ft}\ df\ d\tau$$

Misal $a = f - \tau$, maka $da = df$ dan $f = a + \tau$. Jadi

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} H(a)\ e^{i2\pi f(a+\tau)}\ da\ d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} X(\tau)\ e^{i2\pi fa}\ d\tau \int_{-\infty}^{\infty} H(a)\ e^{i2\pi f\tau}\ da$$

$$= x(t)h(t)$$

Contoh 2.5

Pandang suatu fungsi kawasan waktu :

$$x(t) = e^{-\alpha t} \quad \text{untuk } t \geq 0$$

$$= 0 \quad \text{untuk } t < 0$$

Hitunglah Transformasi Fourier Kontinu persamaan diatas

Penyelesaian :

Subtitusi x(t) pada persamaan (2.43) , sehingga diperoleh :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-i2\pi ft} dt$$

$$= 0 + \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t}\, e^{-i2\pi ft}\, dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-(\alpha + i2\pi f)t}\, dt$$

$$= -\frac{1}{\alpha + i2\pi f}\, e^{-(\alpha + i2\pi f)\, t} \Big|_{0}^{\infty}$$

$$= -\frac{1}{\alpha + i2\pi f}\, (e^{-\infty} + e^{0})$$

$$= \frac{1}{\alpha + i2\pi f}$$

$$= \frac{1}{\alpha + i2\pi f} \quad \frac{\alpha - i2\pi f}{\alpha - i2\pi f}$$

$$= \frac{\alpha - i2\pi f}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}$$

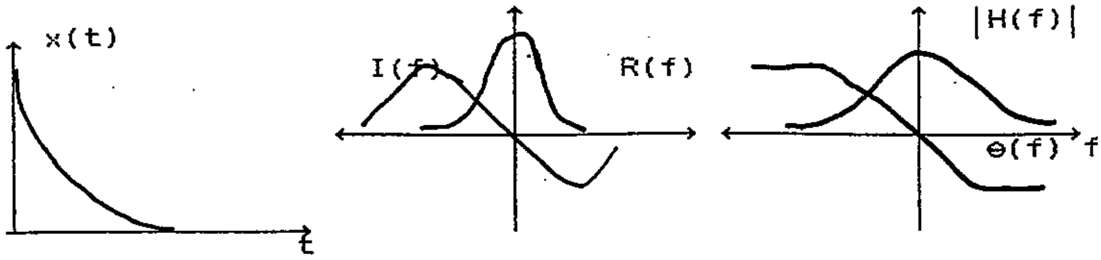
Persamaan diatas dibawa kebentuk persamaan (2.34) , sehingga :

$$X(f) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} - i\, \frac{2\pi f}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 \quad (2\pi f)^2}} \quad \tan^{-1} (- 2\pi f / \alpha)$$

$$R(f) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} , \quad I(f) = \frac{2\pi f}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}$$

$$| X(f) | = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + (2\pi f)^2}} , \quad \theta(f) = \tan^{-1}(-2\pi f/\alpha)$$



Gambar 2.5

(a) Fungsi kawasan waktu $x(t) = e^{-\alpha t}$

(b) Bagian real dan imaginer Transformasi Fourier Kontinu.

(b) Amplitudo dan fase Transformasi Fourier Kontinu .

Contoh 2.6

Hitunglah Invers Transformasi Fourier Kontinu

$$X(f) = \frac{1}{\alpha + i2\pi f} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} - i\,\frac{2\pi f}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}$$

Penyelesaian :

Dengan menggunakan persamaan (2.44) diperoleh :

$$x(t) = \int_{-\sim}^{\sim} \left[\frac{\alpha}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} - i\,\frac{2\pi f}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} \right] e^{i2\pi ft}\, df \qquad ..(2.45)$$

Dengan menggunakan identitas Euler yaitu :

$$2\cos(2\pi ft) = e^{i2\pi ft} + e^{-i2\pi ft} \qquad ....(2.46)$$

Sedang dari :

$$2i\,\sin(2\pi ft) = e^{i2\pi ft} - e^{-i2\pi ft}$$

$$e^{-i2\pi ft} = e^{i2\pi ft} - 2i\,\sin 2\pi ft \qquad ....(2.47)$$

Subtitusi persamaan (2.46) ke persamaan (2.47) diperoleh :

$$2\cos 2\pi ft = e^{i2\pi ft} + e^{i2\pi ft} - 2i\,\sin 2\pi ft$$

$$\cos 2\pi ft = e^{i2\pi ft} - i \sin 2\pi ft$$

$$e^{i2\pi ft} = \cos(2\pi ft) + i \sin(2\pi ft) \qquad ....(2.48)$$

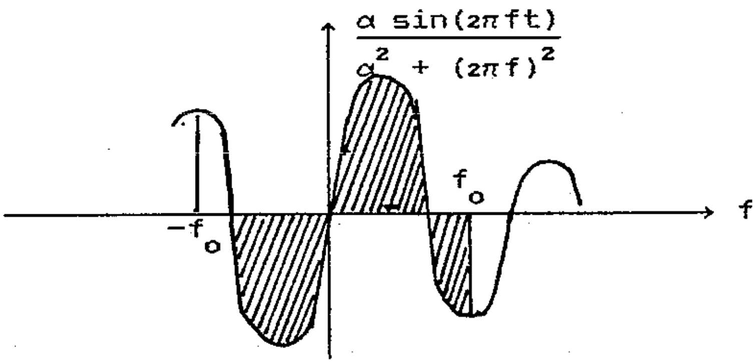
Subtitusi persamaan (2.48) ke persamaan (2.45) maka :

$$x(t) = \int_{-\sim}^{\sim} \left[\frac{\alpha}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} - i \frac{2\pi f}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} \right] \left[\cos 2\pi ft + i \sin 2\pi ft \right] df$$

$$x(t) = \int_{-\sim}^{\sim} \left[\frac{\alpha \cos(2\pi ft)}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} + \frac{2\pi f \sin(2\pi ft)}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} \right] df +$$

$$i \int_{-\sim}^{\sim} \left[\frac{\alpha \sin(2\pi ft)}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} + \frac{2\pi f \cos(2\pi ft)}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} \right] df \quad ...(2.49)$$

Integral pada bagian imaginer adalah fungsi ganjil persamaan (2.2) maka $x(t) = - x(-t)$.



Daerah pada fungsi dari $- f_o \longrightarrow f_o$ adalah nol, karena limit f_o mendekati tak berhingga , integral tak berhingga fungsi ganjil adalah nol . Maka :

$$x(t) = \int_{-\sim}^{\sim} \left[\frac{\alpha \cos(2\pi ft)}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} + \frac{2\pi f \sin(2\pi ft)}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} \right] df \quad ....(2.50)$$

$$\text{Ambil } A = \int_{-\sim}^{\sim} \frac{\alpha \cos(2\pi ft)}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} df \qquad ....(2.51)$$

$$B = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\pi f \sin(2\pi ft)}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} \, df \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\ 2.52\ )$$

Persamaan (2.51) diselesaikan dengan menggunakan TransformasiFourier Cosinus :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(2\pi ft) \ dt \ , \ x(t) = e^{-\alpha t}$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t} \cos(2\pi ft) \ dt$$

$$= 2 \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha t} \cos(2\pi ft) \ dt$$

$$X(f) = 2 \int_{0}^{\infty} \cos(2\pi ft) \ d(- \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t})$$

$$\frac{X(f)}{2} = - \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} \cos(2\pi ft) \Big|_{0}^{\infty} - \frac{2\pi f}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t} \sin(2\pi ft) \ dt$$

$$= \frac{1}{\alpha} + \frac{2\pi f}{\alpha^2} e^{-\alpha t} \sin\ (2\pi ft) \Big|_{0}^{\infty} - \frac{(2\pi f)^2}{\alpha^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t} \sin(2\pi ft) dt$$

$$(1 + \frac{(2\pi f)^2}{\alpha^2}) \ X(f) = 2 \ \frac{1}{\alpha}$$

$$X(f) = 2 \ \frac{\alpha}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}$$

Kemudian X(f) disubtitusikan pada Invers Transformasi Fourier Cosinus , yaitu :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \cos(2\pi ft) \ df$$

$$= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} \cos(2\pi ft) \ df$$

$$\text{Jadi } A = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha \cos(2\pi ft)}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} \ df = \frac{x(t)}{2} = \frac{e^{-\alpha t}}{2}$$

Persamaan (2.52) diselesaikan secara analog dengan penyelesaian persamaan (2.51) dan diperoleh B = $\frac{e^{-\alpha t}}{2}$.

Jadi persamaan (2.50) menjadi :

$$\begin{aligned} x(t) &= A + B \\ &= \frac{e^{-\alpha t}}{2} + \frac{e^{-\alpha t}}{2} \\ &= e^{-\alpha t} \end{aligned}$$

x(t) merupakan fungsi kawasan waktu , sedang fungsi kawasan frekuensinya adalah :

$$X(f) = \frac{1}{\alpha + i(2\pi f)}$$

Jadi pasangan transformasinya adalah :

$$e^{-\alpha t} (t > 0) \longleftrightarrow \frac{1}{\alpha + i(2\pi f)} \qquad \text{..........(2.53)}$$

2.3 Fungsi impuls

Fungsi impuls $\delta(t)$ adalah suatu alat matematika yang sangat penting didalam analisa Fourier kontinu dan diskret, kegunaannya adalah menyederhanakan banyak sekali hasil yang didapat dari penjabaran (derivation) agar tidak memerlukan lagi argumen yang rumit dan berkepanjangan .

2.3.1 Definisi Fungsi impuls

Fungsi impuls (fungsi δ) didefinisikan sebagai berikut :

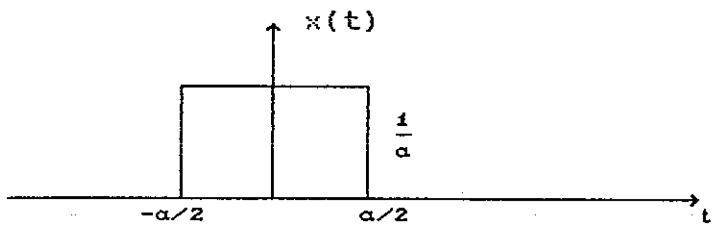
$$\delta(t - t_o) = 0 \text{ , untuk } t \neq t_o$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_o) \, dt = 1 \qquad \text{......................(2.54)}$$

Berarti bahwa untuk $t \neq t_o$ fungsi impuls merupakan garis lurus yang berimpit dengan sumbu t . Sedang jika

$t = t_o$ fungsi impuls menjadi besar tak berhingga tetapi didefinisikan bahwa luas daerah yang dibatasi oleh fungsi impuls dan sumbu t mempunyai luasan satu satuan luas . Dengan kata lain integrasi fungsi tersebut terhadap sebarang daerah pada sumbu t , asal memuat t_o hasilnya adalah satu satuan luas .

Jelas sangat sukar untuk menghubungkan impuls dengan sinyal yang bersifat fisis . Tetapi dapat menggambarkan impuls sebagai gelombang pulsa yang amplitudonya sangat besar dan waktu berlangsungnya sangat kecil menuju nol , sedemikian rupa sehingga area itu merupakan satu satuan luas .



Gambar 2.6 Gambaran fungsi δ

2.3.2 Sifat - sifat fungsi impuls

Fungsi impuls merupakan fungsi khusus yang mempunyai harga pada selang waktu sedemikian sempitnya pada titik t_o sehingga dapat menghasilkan distribusi frekuensi yang luas sekali . Beberapa sifat yang sering dipergunakan bagi fungsi impuls antara lain :

a. Pergeseran

Fungsi δ ($t - t_o$) didefinisikan oleh :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_o) \phi (t) dt = \phi (t_o) \quad ......(2.55)$$

Bukti :

Fungsi impuls berharga nol kecuali waktu $t = t_o$, sehingga integrasi dapat dieliminasi menjadi :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta (t - t_o) \phi(t) dt = \int_{t_o - \varepsilon}^{t_o + \varepsilon} \delta (t - t_o) \phi(t) dt \quad ....(2.56)$$

dimana $-\infty < t_o < \infty$ dan ε bilangan sebarang yang sangat kecil .

Jika $\phi(t)$ kontinu pada $t = t_o$ harga range menjadi kecil mendekati nol . Dengan mengambil ε sangat kecil mendekati nol maka integrasi $\phi(t)$ menjadi konstan pada $\phi(t_o)$ sehingga dapat ditulis :

$$\int_{t_o - \varepsilon}^{t_o + \varepsilon} \delta(t - t_o) \phi(t) dt \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \phi(t_o) \int_{t_o - \varepsilon}^{t_o + \varepsilon} \delta(t - t_o) dt \quad ....(2.57)$$

Tetapi karena integral pada ruas kanan adalah fungsi impuls dengan luasan satu satuan , maka diperoleh :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_o) \phi (t) dt = \phi (t_o) \quad ......(2.58)$$

b. Konvolusi

Konvolusi 2 fungsi impuls $\delta_1(t)$ dan $\delta_2(t)$ didefinisikan sebagai berikut :

$$\int_{-\sim}^{\sim} \left[\int_{-\sim}^{\sim} \delta_1(t)\ \delta_2(\ t - \tau\ ) \right] \phi(\ t\ )\ dt\ d\tau$$

$$= \int_{-\sim}^{\sim} \delta_1(t) \left[\int_{-\sim}^{\sim} \delta_2(\ t - \tau\ )\ \phi(\ t\ )\ dt \right] d\tau$$

...........(2.59)

Akibatnya :

$$\delta_1(t-t_1) * \delta_2(\ t - t_2) = \delta(t - (\ t_1 + t_2\ ))$$

...........(2.60)

Bukti :

Transformasi Fourier pada fungsi impuls $\delta(t)$ besarnya adalah :

$$X(f) = \int_{-\sim}^{\sim} \delta(t)\ e^{-i2\pi ft}\ dt = 1 \qquad \text{.............(2.61)}$$

Jadi diperoleh pasangan $\delta(t) \longleftrightarrow 1$. Dengan menggunakan teorema pergeseran waktu (th. 2.5) transformasi impuls tergeser $\delta(t - t_o)$ menjadi :

$$\delta(t-t_o) \longleftrightarrow e^{-i2\pi ft_o}\ X(f) \qquad \text{.............(2.62)}$$

Karena $X(f) = 1$ menurut persamaan (2.61) maka diperoleh :

$$\delta(t-t_o) \longleftrightarrow e^{-i2\pi ft_o} \qquad \text{.............(2.63)}$$

Dengan dasar tersebut maka ambil 2 fungsi impuls $\delta_1(t)$ dan $\delta_2(t)$. Jadi Transformasi impuls tergeser sejauh t_1 dan t_2 adalah :

$$\delta_1(t-t_1) \longleftrightarrow e^{-i2\pi ft_1} \qquad \text{.............(2.64)}$$

$$\delta_2(t-t_2) \longleftrightarrow e^{-i2\pi f t_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.65)$$

Dari persamaan (2.64) dan persamaan (2.65) konvolusi kedua fungsi impuls tersebut , menjadi :

$$\delta_1(t-t_1) * \delta_2(t-t_2) = e^{-i2\pi f t_1} e^{-i2\pi f t_2}$$

$$= e^{-i2\pi f (t_1 + t_2)}$$

$$= \delta(t - (t_1 + t_2)) \quad \ldots\ldots (2.66)$$