BAB II

TEORI PENUNJANG

Untuk mempermudah pembahasan mengenai generalisasi model linier untuk data berdistribusi Poisson, diperlukan beberapa teori penunjang. Dalam bab ini akan dibahas teori penunjang mengenai:

2.1 Fungsi Distribusi Peluang

Definisi 2.1.1

Suatu fungsi $f(x)$ adalah suatu fungsi peluang atau distribusi peluang suatu peubah acak diskret X bila, untuk hasil x yang mungkin:

i. $f(x) \geq 0$

ii. $\sum_{x} f(x) = 1$

iii. $P(X = x) = f(x)$

Definisi 2.1.2

Suatu fungsi $f(x)$ adalah fungsi padat peluang peubah acak kontinu X, yang didefinisikan di atas himpunan semua bilangan real R, bila:

i. $f(x) \geq 0$ untuk semua $x \in R$

ii. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

iii. $P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$

(Walpole & Myres, 1986)

2.2 Ekspektasi

Definisi 2.2.1

Misalkan X adalah peubah acak yang mempunyai fungsi densitas probabilita $f(x)$, maka ekspektasi dari peubah acak X adalah:

$E(X) = \sum_{x} x\, f(x)$ untuk variabel random diskret

$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x) dx$ untuk variabel random kontinu

Sifat-sifat ekspektasi:

1. E(a)=a, bila a adalah konstanta.
2. E(aX+b)=aE(X)+b bila a, b adalah konstanta
3. $E\left(\sum k_i X_i\right) = \sum k_i E(X_i)$
4. E(XY)=E(X).E(Y) jika X dan Y saling bebas

2.3 Variansi

Definisi 2.3.1

Diberikan peubah acak X dan nilai rata-rata dari X didefinisikan dengan $\mu = E(X)$. Ekspektasi dari kuadrat deviansi antara X dan μ disebut variansi. Notasinya adalah sebagai berikut:

$$\text{var}(X) = E\left\{[X - \mu]^2\right\}$$

Sifat-sifat variansi:

1. var(a)=0, bila a konstanta
2. Var(aX+b)=a^2Var(X), bila a dan b konstanta
3. Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y), bila X dan Y saling bebas.

2.4. Distribusi Poisson

Percobaan yang menghasilkan peubah acak X yang bernilai numerik, yaitu banyaknya suskes yang terjadi dalam selang waktu tertentu atau dalam daerah tertentu, disebut percobaan poisson. Panjang selang waktu tersebut boleh berapa saja, semenit, sehari, seminggu, sebukan atau bahkan setahun. Jadi percobaan Poisson dapat menghasilkan pengamatan untuk peubah acak X yang menyatakan banyaknya hubungan telepon sejam yang diterima suatu kantor, banyaknya hari sekolah ditutup karena banjir, banyaknya pertandingan sepak bola yang terpaksa diundurkan karena hujan selama musim hujan. Daerah yang dimaksud dapat berupa sepotong garis, suatu luas, suatu isi, ataun barangkali septong benda. Dalam hal ini X mungkin menyatakan banyaknya tikus sawah per hektar, banyaknya bakteria perkultur, atau banyaknya salah tik perhalaman.

Suatu percobaan Poisson mempunyai sifat sebagai berikut:

1. Banyaknya sukses yang terjadi dalam suatu selang waktu atau daerah tertentu tidak terpengaruh oleh (bebas dari) apa yang terjadi pada selang waktu atau daerah lain yang terpilih.
2. Peluang terjadinya sukses (tunggal) dalam selang waktu yang amat pendek atau dalam daerah yang kecil sebanding dengan panjang selang waktu atau besarnya daerah dan tidak tergantung pada banyaknya sukses yang terjadi di luar selang waktu atau daerah tersebut.
3. Peluang terjadinya lebih dari satu sukses dalam selang waktu yang pendek atau daerah yang sempit tersebut dapat diabaikan.

Definisi 2.4.1

Distribusi Poisson merupakan distribusi peluang peubah acak Poisson X yang menyatakan banyaknya sukses yang terjadi dalam suatu selang waktu atau daerah tertentu, diberikan oleh:

$$P(X = x) = \frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!} \qquad x=0,1,2,\ldots$$

μ menyatakan rata-rata sukses yang terjadi dalam selang waktu atau daerah tertentu dan e=2,71828….

Mean dan varians dari distribusi Poisson $p(x;\mu)$ keduanya sama dengan μ.

(Walpole & Myres, 1986)

Fungsi Pembangkit momen dari distribusi Poisson dengan mean μ, sebagai berikut:

$$M(t) = E(e^{tx})$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{tx} e^{-\mu} \mu^x}{x!}$$

$$= e^{-\mu} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\mu e^t)^x}{x!}$$

$$= e^{-\mu} e^{\mu e^t}$$

$$= \exp\{\mu(e^t - 1)\}$$

Fungsi pembangkit momen dari distribusi Poisson adalah:

$$M(t) = \exp\{\mu(e^t - 1)\}$$

Deferensial pertama dan keduanya adalah:

$$M'(t) = \mu e^t \exp\{\mu(e^t - 1)\}$$

$$M''(t) = (\mu e^t)^2 \exp\{\mu(e^t - 1)\} + \mu e^t \exp\{\mu(e^t - 1)\}$$

Dengan mensubstitusikan nilai t=0, maka

$$M'(0) = E(X)$$

$$= \mu$$

$$M''(0) = E(X^2)$$

$$= \mu^2 + \mu$$

$$Var(X) = E(X^2) - (E[X])^2$$

$$= \mu^2 + \mu - \mu^2 \quad = \mu$$

<u>Teorema 2.4.1.1</u>

Misalkan X peubah acak binomial dengan distribusi peluang $b(x;n,p)$ bila $n \to \infty$, $p \to 0$ dan $\mu = np$ konstan sama, maka $b(x;n,p) \to p(x;\mu)$

Bukti

Misalkan X berdistribusi binomial dengan parameter n dan p dengan fungsi probabilitas sebagai berikut:

$$p(X = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{\mu}{n}\right)^k\left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{n-k}$$

untuk $n \to \infty$ diperoleh

$$p(X = k) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\mu}{n}\right)^k\left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)..(n-k+1)}{n^k}\frac{\mu^k}{k!}\left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^n\left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{-k}$$

Untuk mencari limit tersebut perlu dicari limit tiap suku sebagai berikut:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)..(n-k+1)}{n^k} = \lim_{n\to\infty}\left[1\left(1 - \frac{1}{n}\right) \; . \; . \; . \; \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\right] \quad = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left\{\left[1+\frac{1}{\left(-n/\mu\right)}\right]^{-n/\mu}\right\}^{-\mu} = e^{-\mu}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{-k} = 1$$

Jadi $p(X=k) = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\mu}{n}\right)^{k}\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{n-k}$

$$=1.\frac{\mu^{k}}{k!}.e^{-\mu}.1$$

$$=\frac{\mu^{k}}{k!}.e^{-\mu}$$

yang merupakan fungsi probabilitas Poisson dengan parameter μ.

(Walpole & Myres,1986)

2.5 Distribusi Chi-Kuadrat

Distribusi ini berperan penting dalam uji signifikansi dari koefisien-koefisien model regresi Poisson. Distribusi Chi-Kuadrat dinotasikan dengan χ^2. Suatu variabel random X dikatakan berdistribusi Chi-Kuadrat, jika mempunyai fungsi kepadatan peluang sebagai berikut:

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)2^{\frac{r}{2}}}x^{\frac{r}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}} \quad , \quad 0 < x < \infty$$

$$=0 \quad , \quad \text{lainnya}$$

Ekspektasi dan variansi dari distribusi Chi- Kuadrat adalah:

E(X)=r

$$\mathrm{Var}(X)=2r$$

Bukti

$$E(X)=\int_0^\infty x\frac{1}{2^{r/2}\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)}x^{r/2-1}e^{-x/2}dx$$

misal: $\alpha = r/2, \beta = 2$

maka $$E(X)=\int_0^\infty x\frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}dx$$

misal:

$$\frac{x}{\beta}=y$$
$$x=\beta y$$
$$dx=\beta dy$$

maka $$E(X)=\int_0^\infty \frac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}x^{(\alpha+1)-1}e^{-y}\beta dy$$

$$E(X)=\int_0^\infty \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}\frac{x^{(\alpha+1)-1}}{\beta^{(\alpha+1)-1}}e^{-y}dy$$

$$E(X)=\frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty \frac{x^{(\alpha+1)-1}}{\beta^{(\alpha+1)-1}}e^{-y}dy$$

$$E(X)=\frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty y^{(\alpha+1)-1}e^{-y}dy$$

$$E(X)=\frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}\Gamma(\alpha+1)$$

catatan:

$$\Gamma(\alpha)=[\alpha-1]\Gamma(\alpha-1)$$
$$\Gamma(\alpha+1)=[\alpha]\Gamma(\alpha)$$

$$E(X) = \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}\alpha \cdot \Gamma(\alpha)$$
$$= \beta\alpha$$

jadi $E(X) = 2 \cdot \frac{r}{2} = r$

$Var(X) = E(X - E(X))^2$

$$E(X^2) = \int_0^\infty x^2 \frac{1}{2^{r/2}\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)} x^{r/2-1} e^{-x/2} dx$$

misal : $\alpha = r/2, \beta = 2$

maka $E(X^2) = \int_0^\infty x^2 \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} dx$

Misal $\frac{x}{\beta} = y$

$x = \beta y$

$dx = \beta dy$

$$E(X^2) = \int_0^\infty \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{(\alpha+2)-1} e^{-y} \beta dy$$

$$E(X^2) = \int_0^\infty \frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)} \frac{x^{(\alpha+2)-1}}{\beta^{(\alpha+2)-1}} e^{-y} dy$$

$$E(X^2) = \frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{x^{(\alpha+2)-1}}{\beta^{(\alpha+2)-1}} e^{-y} dy$$

$$E(X^2) = \frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty y^{(\alpha+2)-1} e^{-y} dy$$

$$E(X^2) = \frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha + 2)$$

catatan:

$$\Gamma(\alpha) = [\alpha - 1]\Gamma(\alpha - 1)$$
$$\Gamma(\alpha + 1) = [\alpha]\Gamma(\alpha)$$
$$\Gamma(\alpha + 2) = [\alpha + 1]\Gamma(\alpha + 1) = [\alpha + 1][\alpha]\Gamma(\alpha)$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \frac{\beta^2}{\Gamma(\alpha)} \cdot \alpha \cdot (\alpha + 1) \cdot \Gamma(\alpha) \\ &= \beta^2\alpha^2 + \beta^2\alpha \\ &= 4 \cdot \frac{r^2}{4} + 4 \cdot \frac{r}{2} \\ &= r^2 + 2r \end{aligned}$$

Maka:

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= r^2 + 2r - r^2 \\ &= 2r \end{aligned}$$

2.6 Model Regresi Linier Berganda

Regresi berganda adalah salah satu cara yang digunakan dalam analisis data statistik. Model regresi menggambarkan hubungan antar variabel bebas (X) dengan variabel tak bebas (Y). Model tersebut adalah:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \ldots + \beta_p X_{ip} + \varepsilon_i \qquad \text{, untuk } i=1,2,\ldots,n$$

Model regresi di atas disebut model regresi linier berganda dengan p variabel bebas yaitu $X_{i1}, X_{i2}, \ldots, X_{ip}$. Parameter β_j, j=0,1,2,…,p disebut koefisien regresi. Model ini menggunakan asumsi $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$. Dalam model regresi linier, untuk mencari taksiran parameternya digunakan metode kuadrat terkecil. Metode kuadrat terkecil merupakan suatu metode yang paling luas digunakan karena dengan asumsi-asumsi tertentu metode ini mempunyai beberapa sifat statistik yang sangat menarik yang membuatnya menjadi suatu metode analisis regresi yang paling kuat dan populer.

Diberikan fungsi kuadrat sebagai berikut:

$$L = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^{\,2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^{n} \beta_j X_{ij} \right)^2$$

Fungsi L tersebut diminimumkan terhadap $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p$. Estimator kuadrat terkecil dan $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p$ harus memenuhi:

$$\left. \frac{\partial L}{\partial \beta_0} \right|_{\hat\beta_0, \hat\beta_1, \ldots, \hat\beta_p} = -2 \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \hat\beta_0 - \sum_{j=1}^{p} \beta_j X_{ij} \right) = 0$$

dan

$$\left. \frac{\partial L}{\partial \beta_j} \right|_{\hat\beta_0, \hat\beta_1, \ldots, \hat\beta_p} = -2 \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \hat\beta_0 - \sum_{j=1}^{p} \beta_j X_{ij} \right) X_{ij} = 0$$

Dari penyederhanaan persamaan di atas dapat diperoleh persamaan-persamaan kuadrat terkecil:

$$n\hat\beta_0 + \hat\beta_1 \sum_{i=1}^{n} X_{i1} + \hat\beta_2 \sum_{i=1}^{n} X_{i2} + \ldots + \hat\beta_p \sum_{i=1}^{n} X_{ip} = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

$$\hat\beta_0 \sum_{i=1}^{n} X_{i1} + \hat\beta_1 \sum_{i=1}^{n} X_{i1}^{\,2} + \hat\beta_2 \sum_{i=1}^{n} X_{i1} X_{i2} + \ldots + \hat\beta_p \sum_{i=1}^{n} X_{i1} X_{ip} = \sum_{i=1}^{n} X_{i1} Y_i$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\hat\beta_0 \sum_{i=1}^{n} X_{ip} + \hat\beta_1 \sum_{i=1}^{n} X_{ip} X_{i1} + \hat\beta_2 \sum_{i=1}^{n} X_{ip} X_{i2} + \ldots + \hat\beta_p \sum_{i=1}^{n} X_{ip}^{\,2} = \sum_{i=1}^{n} X_{ip} y_i$$

dalam persamaan tersebut, terlihat ada (p+1) persamaan normal, satu untuk setiap koefisien regresi yang tidak diketahui. Penyelesaian model ini lebih sederhana jika menggunakan bentuk matriks. Persamaan di atas dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

dimana:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1p} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{np} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

Y adalah vektor pengamatan pada variabel tak bebas berukuran n x 1, **X** adalah matriks variabel bebas berukuran n x (p+1), β adalah vektor koefisien regresi berukuran (p+1) x 1 dan ε adalah vektor random error berukuran n x 1.

Untuk mendapatkan vektor penaksir kuadrat terkecil $\hat{\beta}$ dilakukan dengan cara meminimumkan jumlah kuadrat galatnya, yaitu:

$$L = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon}$$

$$= (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$$

$$= \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} - \mathbf{Y}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$$

$$= \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - 2\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} - \mathbf{Y}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$$

karena $\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{Y}$ adalah sebuah vektor matriks skalar (1x1), dan $(\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{Y}) = \mathbf{Y}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$ adalah skalar yang sama, maka penaksir-penaksir kuadrat terkecil itu harus memenuhi:

$$\left.\frac{\partial L}{\partial \beta}\right|_{\hat{\beta}} = 2\mathbf{X}'\mathbf{Y} + 2\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = 0$$

penyederhanaanya menjadi:

$$\mathbf{X'X\hat{\beta} = X'Y}$$

dan dengan mengalikan kedua ruas dengan invers **[X'X]** diperoleh:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = [\mathbf{X'X}]^{-1}\mathbf{X'Y}$$

sehingga perkiraan model regresi tersebut adalah

$$\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$$

Dalam bentuk skalar, perkiraan model tersebut adalah

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \sum_{j=1}^{p} \hat{\beta}_j X_{ij} \qquad i=1,2,\ldots,n$$

(Hines dan Montgomery,1990)

2.7 Distribusi Keluarga Eksponensial

Misalkan Y peubah acak yang memiliki fungsi probabilitas jika diskret atau fungsi densitas probabilitas jika kontinu, yang tergantung pada sebuah parameter θ dari distribusi keluarga eksponensial yang ditulis dalam bentuk:

$$f(y;\theta) = s(y)t(\theta)\exp[a(y)b(\theta)] \qquad \ldots(2.7.1)$$

dengan a, b, s, dan t adalah fungsi-fungsi yang diketahui. Jika s(y)=exp(d(y)) dan t(θ)=exp(c(θ)), maka persamaan (2.7.1) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$f(Y;\theta) = \exp[d(y)]\exp[c(\theta)]\exp[a(y)b(\theta)]$$

$$= \exp[a(y)b(\theta) + c(\theta) + d(y)] \qquad \ldots.(2.7.2)$$

Jika a(y) = Y, distribusi dalam persamaan (2.7.2) dikatakan distribusi dalam bentuk kanonik dan b(θ) disebut parameter natural dari distribusi. Sedangkan nilai harapan dan variansi dari a(y) adalah:

$$E[a(Y)] = E(Y) = \frac{-c'(\theta)}{b'(\theta)}, \quad \text{dan}$$

$$Var[a(Y)] = Var(Y) = \frac{b''(\theta)c'(\theta) - c''(\theta)b'(\theta)}{[b'(\theta)]^3}$$

dengan $b'(\theta)$ = derivativ pertama dari $b(\theta)$ dan $b''(\theta)$=derivativ kedua dari $b(\theta)$

$c'(\theta)$= derivativ pertama dari $c(\theta)$ dan $c''(\theta)$=derivativ kedua dari $c(\theta)$

Dalam keluarga eksponensial, ada beberapa distribusi yang termasuk di dalamnya yaitu distribusi Binomial, Poisson, Normal dan Gamma.

Secara umum jika terdapat n peubah acak $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ yang saling bebas, mempunyai distribusi yang sama yaitu dalam keluarga eksponensial, maka fungsi densitas bersamanya adalah:

$$f(Y_1, \ldots, Y_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} \exp[a(Y_i)b(\theta) + c(\theta) + d(Y_i)]$$

$$= \exp\left[b(\theta)\sum_{i=1}^{n} a(Y_i) + Nc(\theta) + \sum_{i=1}^{n} d(Y_i)\right] \quad \ldots(2.7.3)$$

(Dobson, 1990)

2.8 Metode Maksimum Likelihood (MLE)

Metode maksimum likelihood merupakan metode yang baik untuk memperoleh taksiran parameter yang tidak diketahui dari populasi yaitu dengan cara memaksimumkan fungsi likelihood. Misalkan X adalah peubah acak dengan distribusi peluang f(X, β) dimana parameter $\beta = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p)$ tidak diketahui.

Misalkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ merupakan nilai yang diobservasi di dalam suatu sampel random yang besarnya n, maka fungsi likelihood tersebut adalah:

$$L(\beta;Y)=f(X_1,\beta)\cdot f(X_2,\beta)\cdot\ ...\ \cdot f(X_n,\beta)$$

$$L(\beta;Y)=\prod_{i=1}^{n} f(X_i,\beta) \qquad i=1,2,...,n$$

Estimator maksimum likelihood β adalah nilai β yang memaksimalkan fungsi likelihood $L(\beta;Y)$. Jadi $L(\beta;Y)=f(X_1,X_2,...,X_n)$ maka nilai $\hat{\beta}$ yang harus dicari harus memenuhi $f(X_1,X_2,...,X_n|\hat{\beta})=\max f(X_1,X_2,...,X_n|\beta)$.

Harga-harga β yang memaksimalkan $L(\beta;Y)$ juga akan memaksimumkan logarithma likelihood yang dinotasikan $l(\beta;Y)=\ln L(\beta;Y)$, tetapi karena fungsi logarithma likelihood monoton naik, maka digunakan turunana parsial pertama yaitu:

$$\frac{\partial L(\beta;Y)}{\partial\beta}=0$$

sehingga persamaan likelihoodnya adalah

$$\frac{\partial l(\beta;Y)}{\partial\beta}=0$$

Selanjutnya apabila hasil turunan parsial pertama dari persamaan likelihood tidak linier dalam parameter β, maka untuk mengatasinya digunakan metode iterasi numerik yaitu metode iterasi Newton Raphson, diperoleh estimator maksimum untuk β yaitu $\hat{\beta}$. Dalam metode iterasi Newton Raphson diperlukan turunan parsial kedua dari $l(\beta;Y)$. Pada persamaan di atas untuk setiap u, u=0,1,2,…,p turunan parsial kedua dari log likelihood terhadap β_j, β_u yaitu:

$$\frac{\partial^2 l(\beta;Y)}{\partial\beta_j\partial\beta_u}=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 l(\beta;Y)}{\partial\beta_0{}^2} & \frac{\partial^2 l(\beta;Y)}{\partial\beta_1\partial\beta_0} & \cdots & \frac{\partial^2 l(\beta;Y)}{\partial\beta_p\partial\beta_0}\\ \frac{\partial^2 l(\beta;Y)}{\partial\beta_0\partial\beta_1} & \frac{\partial^2 l(\beta;Y)}{\partial\beta_1{}^2} & \cdots & \frac{\partial^2 l(\beta;Y)}{\partial\beta_p\partial\beta_1}\\ . & . & . & .\\ . & . & . & .\\ . & . & . & .\\ \frac{\partial^2 l(\beta;Y)}{\partial\beta_0\partial\beta_p} & \frac{\partial^2 l(\beta;Y)}{\partial\beta_1\partial\beta_p} & \cdots & \frac{\partial^2 l(\beta;Y)}{\partial\beta_p{}^2}\end{bmatrix}$$

Prosedur Newton Raphson untuk mencari taksiran $\hat{\beta}_j$, j=0,1,2,…,p yaitu dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Pilih taksiran awal $\hat{\beta}_{jm}=0$, m=1,2,3,….
2. Pada setiap iterasi ke (m+1) hitung taksiran baru:

$$\hat{\beta}_{j(m+1)}=\hat{\beta}_{jm}-\left[\frac{\partial^2 L(\beta;Y)}{\partial\beta_j\partial\beta_u}\right]^{-1}\left[\frac{\partial L(\beta;Y)}{\partial\beta}\right]$$

3. Iterasi berlanjut hingga diperoleh $\hat{\beta}_{j(m+1)}\approx\hat{\beta}_{jm}$