BAB II

KONSEP DASAR

2.1. Pengendalian Proses

Menurut *Engineers Statistic Handbook* (2000) proses kontrol adalah perubahan secara aktif dari suatu proses yang berdasarkan pada hasil proses monitoring. Bila peralatan proses monitoring telah mendeteksi adanya situasi yang tidak terkontrol, operator produksi harus melakukan penyesuaian untuk dapat mengembalikan proses kedalam keadaan terkontrol. Dua macam penyesuaian yang dapat dilakukan adalah :

1. Perencanaan tindakan penyesuaian (*Out of control action plans-OCAPS*)

   Tindakan penyesuaian akan dilakukan apabila telah dideteksi keadaan yang tidak terkontrol. *Flowchart* yang spesifik dan prosedur yang sesuai dibutuhkan untuk tiap-tiap proses yang berbeda dalam pengambilan keputusan tindakan penyesuaian.

2. *Advanced process control loops*, Pengendalian proses yang dilakukan dengan melakukan perubahan secara otomatis pada proses yang di program untuk mengoreksi pengukuran yang tidak terkontrol

2.2. Analisis Runtun Waktu

2.2.1. Fungsi Autokovarian dan Fungsi Autokorelasi

Untuk proses stasioner *{Z_t}* diasumsikan mean $E(Z_t)$ = μ dan variansi Var(Z_t) = $E(Z_t-\mu)^2=\sigma^2$ berupa konstanta, dan covarian Cov(Z_t,Z_s) berupa fungsi dari perbedaan $|t-s|$. Oleh karena itu, dalam kasus ini dapat dituliskan kovarian diantara Z_t dan Z_{t+k} adalah

$$\gamma_k = Cov(Z_t, Z_{t+k}) = E(Z_t - \mu)(Z_{t+k} - \mu), \tag{2-1}$$

dan korelasi antara Z_t dan Z_{t+k} adalah

$$\rho_k = \frac{Cov(Z_t, Z_{t+k})}{\sqrt{Var(Z_t)}\sqrt{Var(Z_{t+k})}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}, \tag{2-2}$$

dimana diketahui bahwa $Var(Z_t) = Var(Z_{t+k})$. Untuk setiap k, γ_k disebut sebagai fungsi Autokovarian dan ρ_k disebut sebagai fungsi Autokorelasi (ACF) dalam analisis runtun waktu dimana γ_k dan ρ_k mewakili kovarian dan korelasi antara Z_t dan Z_{t+k} dari proses yang sama dan hanya dipisahkan dengan *lag k*.

Untuk proses yang stasionar fungsi autokovarian γ_k dan fungsi autokorelasi ρ_k mempunyai syarat sebagai berikut:

1. $\gamma_0 = Var(Z_t); \rho_0 = 1$
2. $|\gamma_k| \le \gamma_0; |\rho_k| \le 1$
3. $\gamma_k = \gamma_{-k}\, dan \rho_k = \rho_{-k}$, untuk semua k.

$\gamma_k\ dan\ \rho_k$ adalah fungsi yang sama dan simetrik untuk $k = 0$. Hal ini dapat ditunjukan bahwa perbedaan waktu antara $Z_t\, dan Z_{t+k}\ dan\ Z_t\, dan Z_{t-k}$ adalah sama. Oleh karena itu, fungsi autokorelasi sering diplotkan untuk lag non negatif.

Syarat penting yang lain dari fungsi autokovarian γ_k dan fungsi autokorelasi ρ_k adalah semi definit positif dalam artian bahwa

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\,\alpha_j\gamma_{|t_i-t_j|}\geq 0 \tag{2-3}$$

dan

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\alpha_j\rho_{|t_i-t_j|}\geq 0 \tag{2-4}$$

untuk suatu himpunan sebarang dari titik waktu $t_1, t_2, \ldots, t_n$ dan beberapa bilangan riil $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, dengan mendefenisikan variabel random $X=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i Z_{t_i}$, dengan (2-3) didapat

$$0\leq Var(X)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\alpha_j Cov(Z_{t_i}, Z_{t_j})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\alpha_j\gamma_{|t_i-t_j|}. \tag{2-5}$$

2.2.2. Fungsi Autokorelasi Parsial (FAKP)

Sebagai tambahan dari autokorelasi antara Z_t dan Z_{t+k}, ingin dibuktikan bahwa korelasi antara Z_t dan Z_{t+k} setelah ketergantungan mutual linier dependen pada variabel-variabel $Z_{t+1}, Z_{t+2}, \ldots, Z_{t+k-1}$ dihilangkan dan korelasinya dapat ditunjukan sebagai berikut:

$$Corr(Z_t, Z_{t+k}|Z_{t+1}, Z_{t+2}, \ldots, Z_{t+k-1}) \tag{2-6}$$

dan biasanya berhubungan dengan fungsi autokorelasi parsial dalam analisis runtun waktu.

Untuk sebuah proses stasioner $\{Z_t\}$ dan tanpa menghilangkan asumsi umum dapat ditentukan bahwa $E(Z_t)=0$. Misal dependen linier dari $Z_{t+1}, Z_{t+2}, \ldots, Z_{t+k-1}$ didefenisikan sebagai estimasi linier terbaik menurut rata-rata kuadrat Z_{t+k} dari fungsi linier $Z_{t+1}, Z_{t+2}, \ldots, Z_{t+k-1}$. Oleh karena itu, jika $\hat{Z}_{t+k}$ adalah estimasi linier terbaik dari Z_{t+k}, maka

$$\hat{Z}_{t+k} = \alpha_1 Z_{t+k-1} + \alpha_2 Z_{t+k-2} + \cdots + \alpha_{k-1} Z_{t+1} \tag{2-7}$$

dengan $\alpha_i \, (1 \le i \le k-1)$ adalah kuadrat rata-rata koefisien regresi linier yang didapat dengan meminimasi persamaan

$$E(Z_{t+k} - \hat{Z}_{t+k})^2 = E(Z_{t+k} - \alpha_1 Z_{t+k-1} - \cdots - \alpha_{k-1} Z_{t+1})^2 . \tag{2-8}$$

metode *minimization* dengan deferensiasi akan didapatkan sistem linier dari persamaan

$$\gamma_i = \alpha_1 \gamma_{i-1} + \alpha_2 \gamma_{i-2} + \cdots + \alpha_{k-1} \gamma_{i-k+1}, \text{ dengan } 1 \le i \le k-1 \tag{2-9}$$

sehingga,

$$\rho_i = \alpha_1 \rho_{i-1} + \alpha_2 \rho_{i-2} + \cdots + \alpha_{k-1} \rho_{i-k+1}, \text{ dengan } 1 \le i \le k-1. \tag{2-10}$$

Dalam bentuk matrik, sistem persamaan (2-10) menjadi

$$\begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-2} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \rho_{k-4} & \cdots & \rho_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{k-1} \end{bmatrix} \tag{2-11}$$

sehingga sama juga untuk,

$$\hat{Z}_t = \beta_1 Z_{t+1} + \beta_2 Z_{t+2} + \cdots + \beta_{k-1} Z_{t+k-1}, \tag{2-12}$$

dengan $\beta_i \, (1 \le i \le k-1)$ adalah kuadrat rata-rata koefisien regresi linier yang didapat dengan meminimasi persamaan

$$E(Z_{t+k} - \hat{Z}_{t+k})^2 = E(Z_{t+k} - \beta_1 Z_{t+k-1} - \cdots - \beta_{k-1} Z_{t+1})^2 \tag{2-13}$$

sehingga,

$$\begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-2} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \rho_{k-4} & \cdots & \rho_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{k-1} \end{bmatrix} \tag{2-14}$$

dari penjelasan di atas dapat disimpulkan bahwa $\alpha_i = \beta_i \, (1 \le i \le k-1)$.

Dengan mengikuti bahwa autokorelasi parsial antara Z_t dan Z_{t+k} akan sama dengan autokorelasi antara $(Z_t - \hat{Z}_t)$ dan $(Z_{t+k} - \hat{Z}_{t+k})$ maka,

$$P_k = \frac{Cov[(Z_t - \hat{Z}_t),(Z_{t+k} - \hat{Z}_{t+k})]}{\sqrt{Var(Z_t - \hat{Z}_t)}\sqrt{Var(Z_{t+k} - \hat{Z}_{t+k})}}. \tag{2-15}$$

ρ_k : autokorelasi parsial antara Z_t dan Z_{t+k}

kemudian,

$$\begin{aligned} Var(Z_{t+k} - \hat{Z}_{t+k}) &= E[(Z_{t+k} - \alpha_1 Z_{t+k-1} - \cdots - \alpha_{k-1} Z_{t+1})^2] \\ &= E[Z_{t+k}(Z_{t+k} - \alpha_1 Z_{t+k-1} - \cdots - \alpha_{k-1} Z_{t+1})] \\ &\quad - \alpha_1 E[Z_{t+k-1}(Z_{t+k} - \alpha_1 Z_{t+k-1} - \cdots - \alpha_{k-1} Z_{t+k})] - \\ &\quad \cdots - \alpha_{k-1} E[Z_{t+1}(Z_{t+k} - \alpha_1 Z_{t+k-1} - \cdots - \alpha_{k-1} Z_{t+1})] \\ &= E[Z_{t+k}(Z_{t+k} - \alpha_1 Z_{t+k-1} - \cdots - \alpha_{k-1} Z_{t+1})] \end{aligned}$$

dengan menyesuaikan persamaan (2-9) untuk $i = 0$, maka akan diperoleh bahwa

$$Var(Z_{t+k} - \hat{Z}_{t+k}) = Var(Z_t - \hat{Z}_t) = \gamma_0 - \alpha_1 \gamma_1 - \cdots - \alpha_{k-1} \gamma_{k-1}. \tag{2-16}$$

Selanjutnya dengan $\alpha_i = \beta_i \, (1 \le i \le k-1)$ didapat

$$\begin{aligned} &Cov[(Z_t - \hat{Z}_t),(Z_{t+k} - \hat{Z}_{t+k})] \\ &= E[(Z_t - \alpha_1 Z_{t+1} - \cdots - \alpha_{k-1} Z_{t+k-1})(Z_{t+k} - \alpha_1 Z_{t+k-1} - \cdots - \alpha_{k-1} Z_{t+1})] \\ &= E[(Z_t - \alpha_1 Z_{t+1} - \cdots - \alpha_{k-1} Z_{t+k-1}) Z_{t+k}] \end{aligned}$$

$$= \gamma_k - \alpha_1 \gamma_{k-1} - \cdots - \alpha_{k-1}\gamma_1 . \tag{2-17}$$

Sehingga,

$$P_k = \frac{\gamma_k - \alpha_1\gamma_{k-1} - \cdots - \alpha_{k-1}\gamma_1}{\gamma_0 - \alpha_1\gamma_1 - \cdots - \alpha_{k-1}\gamma_{k-1}} = \frac{\rho_k - \alpha_1\rho_{k-1} - \cdots - \alpha_{k-1}\rho_1}{1 - \alpha_1\rho_1 - \cdots - \alpha_{k-1}\rho_{k-1}} . \tag{2-18}$$

Persamaan (2-11) dapat diselesaikan dengan aturan Cramer's, yaitu sebagai berikut :

$$\alpha_i = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{i-2} & \rho_1 & \rho_i & \cdots & \rho_{k-2} \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{i-3} & \rho_2 & \rho_{i-1} & \cdots & \rho_{k-3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & \rho_{k-i} & \rho_{k-1} & \rho_{k-i-2} & \cdots & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{i-2} & \rho_1 & \rho_i & \cdots & \rho_{k-2} \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{i-3} & \rho_2 & \rho_{i-2} & \cdots & \rho_{k-3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & \rho_{k-i} & \rho_{k-i-1} & \rho_{k-i-2} & \cdots & 1 \end{vmatrix}} \tag{2-19}$$

Matrik pembilang adalah matrik yang simetris dengan matriks penyebut kecuali untuk kolom ke-i diganti dengan $(\rho_1, \rho_2, \ldots\ldots, \rho_{k-1}$. Substitusi α_1 pada persamaan (2-19) dengan persamaan (2-18) dan mengalikan pembilang dan penyebut dan pembilang dengan determinan

$$\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-2} \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{k-3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & 1 \end{vmatrix},$$

maka hasil P_k adalah sebagai berikut:

$$P_k = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-2} & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-3} & \rho_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & \rho_1 & \rho_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-2} & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-3} & \rho_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-2} & \cdots & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} \tag{2-20}$$

2.2.3. Proses White Noise

Proses *{a_t}* disebut sebagai proses white noise jika *{a_t}* adalah deret dari variabel random yang tidak saling berhubungan dan berdistribusi normal dengan rata-rata $E(a_t) = \mu_a$, biasanya diasumsikan $E(a_t) = 0$ dan variansi $Var(a_t) = \sigma_a^2$ serta kovarian $Cov(a_t, a_{t+k}) = \gamma_k = 0$ untuk semua $k \neq 0$. Dengan defenisi tersebut, dapat ditunjukkan bahwa suatu proses white noise *{a_t}* adalah stasioner dengan fungsi autokovarian

$$\gamma_k = \begin{cases} \sigma_a^2 & k \neq 0 \\ 0 & k = 0 \end{cases}$$

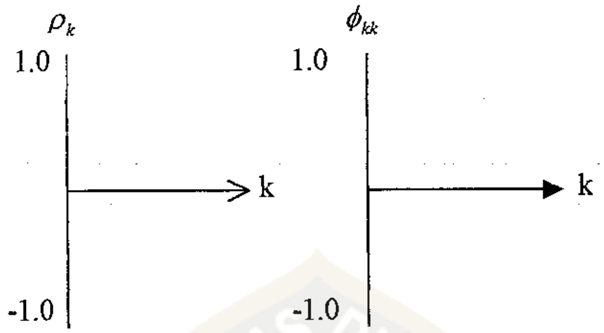
dan fungsi autokorelasi adalah sebagai berikut:

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

serta fungsi autokorelasi parsial adalah sebagai berikut :

$$\phi_{kk} = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

Fungsi autokorelasi (ACF) dan fungsi autokorelasi parsial (PACF) dari proses white noise dapat ditunjukan pada gambar dibawah



Gambar 2.1 ACF dan PACF untuk proses white noise: $Z_t = \mu + a_t$

2.3. *Exponentially Weighted Moving Average* (EWMA)

Exponentially weighted moving average (EWMA) adalah statistik yang digunakan untuk memonitor proses dimana data proses terdahulu akan memberikan bobot pada data sekarang. Bobot data proses terdahulu nilainya akan bertambah kecil sesuai dengan bertambahnya periode observasi. Jika data proses memiliki trend dan atau siklus, maka EWMA dari data proses juga akan mempunyai trend dan atau siklus yang sama seperti pada data observasi. Selain itu EWMA juga dapat digunakan untuk mengetahui prakiraan nilai data proses pada periode berikutnya, sehingga EWMA dapat digunakan untuk mengambil keputusan berkenaan dengan penyesuaian untuk mencegah keluaran suatu proses terlalu jauh dari sasaran.

Persamaan untuk menghitung EWMA adalah:

$$EWMA_t = EWMA_{t-1} + \lambda(X_t - EWMA_{t-1}) \qquad (3.5)$$

atau

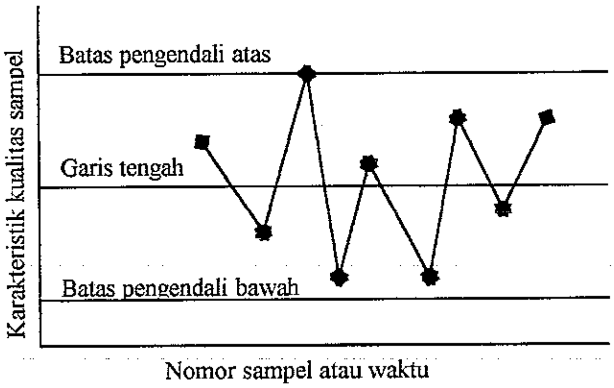
$$EWMA = \lambda X_t + (1-\lambda)EWMA_{t-1} \qquad \text{untuk } t = 1,2,.....,n \qquad (3.6)$$

Dalam persamaan ini $EWMA_0$ adalah nilai target atau rata-rata data sebelumnya, X_t adalah data observasi pada periode t, n adalah banyaknya observasi dan λ adalah konstanta penghalusan yaitu antara 0 dan 1 $(0 < \lambda \leq 1)$. Jika λ mendekati 1, maka EWMA akan memberikan bobot lebih besar kepada data sekarang, sementara jika λ mendekati 0, maka pengamatan sekarang akan diberikan sedikit bobot.

2.4. Grafik Pengendali

Bentuk dasar grafik pengendali ditunjukkan pada gambar 2.2. yang merupakan peragaan grafik suatu karakteristik kualitas yang telah diukur atau dihitung dari sampel terhadap nomor sampel atau waktu. Grafik itu memuat garis tengah yang merupakan nilai rata-rata karakteristik kualitas yang berkaitan dengan keadaan terkontrol (yakni,hanya sebab-sebab tak tersangka yang ada). Dua garis mendatar ditunjukkan dalam grafik yang dinamakan batas pengendali atas (BPA) dan batas pengendali bawah (BPB). Batas-batas pengendali ini dipilih sedemikian hingga apabila proses terkendali, hampir semua titik-titik sampel akan jatuh di antara kedua garis itu. Selama titik-titik terletak di dalam batas-batas pengendali, proses dianggap dalam keadaan terkendali dan tidak perlu dilakukan tindakan apapun. Tetapi bila terdapat titik yang terletak diluar batas pengendali diinterpretasikan sebagai fakta bahwa proses tak terkendali dan diperlukan tindakan penyelidikan dan perbaikan untuk mendapatkan dan menyingkirkan sebab atau sebab-sebab tersangka yang menyebabkan tingkah laku itu. Merupakan kebiasaan untuk menghubungkan titik-titik sampel di dalam grafik dengan segmen garis lurus, sehingga mudah untuk melihat bagaimana barisan-barisan titik itu tersusun menurut waktu.

Meskipun semua titik-titik terletak di dalam batas pengendali, apabila titik-titik itu bertingkah secara sistematik atau tak random maka ini merupakan petunjukan bahwa proses tak terkendali. Misalnya apabila 18 dari 20 titik terakhir terletak diantara garis tengah tetapi dibawah batas pengendali atas dan hanya dua dari titik-titik ini terletak di bawah garis tengah tetapi di atas batas pengendali bawah, kita akan sangat curiga bahwa ada sesuatu yang salah. Apabila proses itu terkendali, semua titik-titik yang digambar harus mempunyai pola yang pada dasarnya random. Metode melihat urutan atau pola tak random dapat ditetapkan pada grafik pengendali sebagai penolong dalam menyelidiki keadaan tak terkendali. Biasanya ada alasan mengapa pola tak random tertentu tampak dalam grafik pengendali dan apabila ini diperoleh dan dihilangkan, penampilan proses dapat ditingkatkan.



Gambar 2.2. Suatu grafik pengendali