BAB II

KONSEP DASAR

2.1. Rancangan faktorial dengan Dua Taraf

Banyak percobaan (eksperimen), terutama dalam bidang industri memerlukan rancangan faktorial yang meliputi beberapa faktor (variabel) dengan penekanan pada penentuan pengaruh faktor utama dan pengaruh interaksi atau kombinasi dari beberapa faktor terhadap hasil percobaan (*respon*). Salah satu bentuk rancangan faktorial yang sering digunakan dalam penelitian adalah rancangan faktorial dengan k faktor dan masing-masing faktor hanya memiliki 2 taraf, kemudian untuk setiap perulangan lengkap dari rancangan ini terdapat 2^k kombinasi perlakuan, sehingga rancangan ini disebut sebagai rancangan faktorial 2^k .(Montgomery, 1991).

Rancangan faktorial penuh 2^k memerlukan semua kombinasi dari dua taraf untuk masing-masing k faktor. Jika suatu faktor kuantitatif, tarafnya dapat berupa taraf rendah dan taraf tinggi dari faktor tersebut. Biasanya taraf rendah dinyatakan dengan tanda negatif (-) dan taraf tinggi dinyatakan dengan tanda positif (+). Jika faktornya kualitatif maka tarafnya berkaitan dengan dua tipe dari faktor yang diamati atau dapat juga berupa ada dan tidak adanya faktor tersebut. Dua taraf untuk faktor kualitatif dapat juga dinyatakan dengan tanda positif dan negatif, tidak masalah taraf yang mana yang diberi label positif atau negatif sepanjang pelabelan tersebut konsisten.

Rancangan faktorial 2^k yang paling sederhana adalah rancangan 2^2 dengan dua faktor, misalkan faktor A dan B masing-masing memiliki dua taraf. Taraf ini selanjutnya akan dibedakan menjadi taraf rendah (*low level*) yang diberi notasi "-" dan taraf tinggi (*high level*) yang diberi notasi "+". Efek atau pengaruh dari suatu faktor dinyatakan dengan huruf kapital, jadi "A" menyatakan efek dari faktor A, "B" menyatakan efek dari faktor B, dan "AB" menyatakan efek interaksi AB.

Secara umum, amatan dinyatakan dengan serangkaian huruf kecil (*lower case letter*). Keberadaan suatu huruf menyatakan faktor yang bersangkutan berada pada taraf tinggi pada amatan tersebut, sedangkan ketidakberadaan suatu huruf menyatakan bahwa faktor yang bersangkutan berada pada taraf rendah pada amatan tersebut. Jika semua faktor berada pada taraf rendah maka digunakan notasi (1). Misalnya amatan a menyatakan faktor A berada pada taraf tinggi dan faktor lainnya berada pada taraf rendah. Rancangan ini dapat digambarkan secara geometri. Sebuah amatan dinyatakan sebagai suatu titik yang koordinatnya adalah taraf ±1 untuk amatan itu. Sebagai contoh, rancangan faktorial 2^3 akan dinyatakan dalam delapan titik sudut kubus dalam sebuah sistem koordinat dimensi tiga.

Efek-efek yang akan diestimasi dalam rancangan faktorial 2^k meliputi k efek utama, $\binom{k}{2}$ efek interaksi dua faktor, $\binom{k}{3}$ efek interaksi tiga faktor sampai dengan satu efek interaksi k faktor dan rata-rata keseluruhan dari observasi. Jadi sebuah rancangan faktorial 2^k akan berisi 2^k-1 efek dan sebuah rata-rata seluruh observasi.

Untuk mengestimasi suatu efek atau menghitung jumlahan kuadrat dari suatu efek dapat dilakukan dengan menggunakan tabel tanda positif dan negatif (*table of plus and minus sign*) seperti yang digambarkan untuk rancangan 2^3 berikut ini :

Tabel 2.1 Tanda positif dan negatif untuk rancangan 2^3

No. Amatan	Kombinasi Perlakuan	Efek Faktor							
		I	A	B	AB	C	AC	BC	ABC
1	(1)	+	-	-	+	-	+	+	-
2	a	+	+	-	-	-	-	+	+
3	b	+	-	+	-	-	+	-	+
4	ab	+	+	+	+	-	-	-	-
5	c	+	-	-	+	+	-	-	+
6	ac	+	+	-	-	+	+	-	-
7	bc	+	-	+	-	+	-	+	-
8	abc	+	+	+	+	+	+	+	+

Elemen dalam kolom efek utama dari suatu faktor menunjukkan tanda positif (+) untuk taraf tinggi dan tanda negatif (-) untuk taraf rendah. Kombinasi perlakuan pada tabel diatas disusun dengan urutan standar (*standard order*). Elemen-elemen untuk kolom faktor pertama (faktor A) akan berupa tanda positif dan negatif yang saling bergantian. Elemen untuk faktor kedua (faktor B) sepasang tanda positif dan negatif akan bergantian, demikian seterusnya dan untuk elemen faktor terakhir (faktor k) akan berisi 2^{k-1} tanda negatif diikuti dengan 2^{k-1} tanda positif. Jika tanda positif dan negatif untuk efek utama sudah diperoleh maka tanda untuk kolom lainnya yaitu interksi dua faktor dan seterusnya diperoleh dengan mengalikan tanda positif dan negatif pada kolom efek utama. Contohnya, tanda pada kolom AB diperoleh dengan mengalikan tanda pada kolom A dan B dan tanda pada kolom ABC diperoleh dengan mengalikan tanda pada kolom AB dan C atau kolom AC dan B atau kolom A dan BC. Untuk rancangan 2^k tabel tanda positif dan negatif akan terdiri dari 2^k kolom efek faktor dan 2^k baris.

Tabel 2.1 memiliki beberapa sifat yaitu :

1. Kecuali untuk kolom identitas I, setiap kolom memiliki jumlah tanda positif dan negatif yang sama.
2. Jumlahan dari perkalian tanda dalam dua kolom sembarang adalah nol, hal ini menunjukkan bahwa kolom-kolom pada tabel tersebut saling orthogonal.
3. Perkalian sembarang kolom dengan kolom I tidak akan merubah hasil pada kolom bersangkutan, hal ini menunjukkan bahwa I adalah kolom dengan elemen identitas.
4. Perkalian dua kolom sembarang akan menghasilkan sebuah kolom dalam tabel yang sama, contohnya $A \times B = AB$ dan $AB \times ABC = A^2B^2C = IIC = C$

Jumlah dari perkalian tanda dalam kolom suatu efek dengan kombinasi perlakuan yang bersesuaian akan menghasilkan suatu kombinasi linear yang disebut kontras. Kontras untuk efek AB...K dapat juga diperoleh dengan metode lainnya yaitu :

$$\text{Kontras}_{\text{AB...K}} = (a \pm 1)(b \pm 1)...(k \pm 1) \qquad (2.1)$$

Tanda *plus* dan *minus* (±) dalam kurung akan dipilih *minus* jika faktor yang bersangkutan termasuk dalam kontras efek yang akan dihitung dan sebaliknya, sebagai contoh akan dihitung nilai kontras dari faktor A, maka :

$$\text{Kontras}_{\text{A}} = (\text{a} - 1)(\text{b} + 1)...(\text{k} + 1)$$

Sementara angka "1" pada hasil akhir penyelesaian persamaan 2.1 diatas menunjukkan kombinasi perlakuan (1). Selanjutnya estimasi efek dan jumlahan kuadrat (*sum of square*) dapat dihitung sebagai berikut :

$$\text{ABC...K} = \frac{1}{\text{n}2^{\text{k-1}}}(Kontras_{ABC...K}) \tag{2.2}$$

dan

$$\text{SS}_{\text{AB...K}} = \frac{1}{n2^k}(Kontras_{AB...K})^2 \tag{2.3}$$

dengan n adalah jumlah ulangan (*replicates*).

2.2. Model Linier

Model statistik linear yang digunakan untuk rancangan faktorial 2^k ditulis:

$$y_{ij...lm} = \mu + \tau_i + \beta_j + ... + \gamma_l + (\tau\beta)_{ij} + ... + (\tau\gamma)_{il} + ... + (\tau\beta...\gamma)_{ij...l} + \varepsilon_{ij...lm} \tag{2.4}$$

dengan i = 1,2 ; j = 1,2 ;....; l = 1,2

m = 1,2,...,n ulangan pada setiap amatan

μ = rata-rata keseluruhan

τ_i = efek taraf ke-i dari faktor A

⋮

$(\tau\beta)_{ij}$ = efek interaksi antara faktor A dan B

⋮

$(\tau\beta...\gamma)_{ij...l}$ = efek interaksi antara faktor A, B,....,K

$\varepsilon_{ij...lm}$ = komponen error random

faktor A,B,...,K diasumsikan tetap, komponen error random diasumsikan berdistribusi normal dan independen dengan mean nol dan variansi σ^2 atau ditulis $\varepsilon_{ij...lm} \sim NID(0,\sigma^2)$. Efek perlakuan didefinisikan sebagai deviasi dari rata-rata keseluruhan sehingga

$$\sum_{i=1}^{2}\tau_i = 0\,;\sum_{j=1}^{2}\beta_j = 0\,;\sum_{i=1}^{2}(\tau\beta)_{ij} = \sum_{j=1}^{2}(\tau\beta)_{ij} = 0$$

$$\text{dan}\sum_{i=1}^{2}(\tau\beta...\gamma)_{ij...l} = \sum_{j=1}^{2}(\tau\beta...\gamma)_{ij...l} = ... = \sum_{l=1}^{2}(\tau\beta...\gamma)_{ij...l} = 0$$

Misalkan model linear untuk rancangan faktorial 2^3 ditulis :

$$y_{ijkl} = \mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_k + (\tau\beta)_{ij} + (\tau\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\tau\beta\gamma)_{ijk} + \varepsilon_{ijkl} \tag{2.5}$$

dengan i = 1,2 ; j = 1,2 ; k = 1,2 ; l = 1,2,...,n

μ = rata-rata keseluruhan

τ_i = efek taraf ke-i faktor A

β_j = efek taraf ke-j faktor B

γ_k = efek taraf ke-k faktor C

$(\tau\beta)_{ij}$ = efek interaksi antara A dan B

$(\tau\gamma)_{ik}$ = efek interaksi antara A dan C

$(\beta\gamma)_{jk}$ = efek interaksi antara B dan C

$(\tau\beta\gamma)_{ijk}$ = efek interaksi antara A, B, dan C

$\varepsilon_{ijkl} \sim NID(0, \sigma^2)$

$$\sum_{i=1}^{2} \tau_i = 0; \sum_{j=1}^{2} \beta_j = 0; \sum_{k=1}^{2} \gamma_k = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{2} (\tau\beta)_{ij} = \sum_{j=1}^{2} (\tau\beta)_{ij} = \sum_{i=1}^{2} (\tau\gamma)_{ik} = \sum_{k=1}^{2} (\tau\gamma)_{ik} = \sum_{j=1}^{2} (\beta\gamma)_{jk} = \sum_{k=1}^{2} (\beta\gamma)_{jk} = 0$$

$$\text{dan} \sum_{i=1}^{2} (\tau\beta\gamma)_{ijk} = \sum_{j=1}^{2} (\tau\beta\gamma)_{ijk} = \sum_{k=1}^{2} (\tau\beta\gamma)_{ijk} = 0$$

Biasanya akan diuji hipotesis bahwa tidak ada signifikansi efek faktor A, faktor B, faktor C, interaksi dua-faktor dan interaksi tiga-faktor. Hipotesis-hipotesis tersebut dinyatakan dalam bentuk :

a. Hipotesis mengenai efek utama

H_0 : $\tau_i = 0$ untuk semua i
H_1 : paling sedikit terdapat satu $\tau_i \neq 0$
H_0 : $\beta_j = 0$ untuk semua j
H_1 : paling sedikit terdapat satu $\beta_j \neq 0$
H_0 : $\gamma_k = 0$ untuk semua k
H_1 : paling sedikit terdapat satu $\gamma_k \neq 0$

b. Hipotesis mengenai efek interaksi

$H_0 : (\tau\beta)_{ij} = 0$ untuk semua i, j
H_1 : paling sedikit terdapat satu $(\tau\beta)_{ij} \neq 0$
$H_0 : (\tau\gamma)_{ik} = 0$ untuk semua i, k
H_1 : paling sedikit terdapat satu $(\tau\gamma)_{ik} \neq 0$
$H_0 : (\beta\gamma)_{jk} = 0$ untuk semua j, k
H_1 : paling sedikit terdapat satu $(\beta\gamma)_{jk} \neq 0$
$H_0 : (\tau\beta\gamma)_{ijk} = 0$ untuk semua i, j, k
H_1 : paling sedikit terdapat satu $(\tau\beta\gamma)_{ijk} \neq 0$

Hipotesis-hipotesis tersebut akan diuji dengan menggunakan analisis variansi tiga-faktor. Notasi-notasi yang digunakan dinyatakan sebagai berikut :

$y_{i...} = \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{n} y_{ijkl}$ adalah total observasi pada taraf ke - i faktor A

$y_{.j..} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{n} y_{ijkl}$ adalah total observasi pada taraf ke - j faktor B

$y_{..k.} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{l=1}^{n} y_{ijkl}$ adalah total observasi pada taraf ke - k faktor C

$y_{ij..} = \sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{n} y_{ijkl}$ adalah total observasi pada taraf i dan j dari interaksi AB

$y_{i.k.} = \sum_{j=1}^{2}\sum_{l=1}^{n} y_{ijkl}$ adalah total observasi pada taraf i dan k dari interaksi AC

$y_{.jk.} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{l=1}^{n} y_{ijkl}$ adalah total observasi pada taraf j dan k dari interaksi BC

$y_{ijk.} = \sum_{l=1}^{n} y_{ijkl}$ adalah total observasi pada taraf i, j, dan k dari interaksi ABC

$y_{....} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{n} y_{ijkl}$ adalah total observasi keseluruhan

Rata-rata yang berkaitan dengan total observasi diatas adalah :

$$\bar{y}_{i...} = \frac{y_{i...}}{4n} \qquad \bar{y}_{i.k.} = \frac{y_{i.k.}}{2n}$$

$$\bar{y}_{.j..} = \frac{y_{.j..}}{4n} \qquad \bar{y}_{.jk.} = \frac{y_{.jk.}}{2n}$$

$$\bar{y}_{..k.} = \frac{y_{..k.}}{4n} \qquad \bar{y}_{ijk.} = \frac{y_{ijk.}}{n}$$

$$\bar{y}_{ij..} = \frac{y_{ij..}}{2n} \qquad \bar{y}_{....} = \frac{y_{....}}{8n}$$

Jumlah kuadrat total yang sebenarnya ditulis sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{n}(y_{ijkl} - \bar{y}_{....})^2 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{n}[&(\bar{y}_{i...} - \bar{y}_{....}) + (\bar{y}_{.j..} - \bar{y}_{....}) + (\bar{y}_{..k.} - \bar{y}_{....}) \\
&+ (\bar{y}_{ij..} - \bar{y}_{i...} - \bar{y}_{.j..} + \bar{y}_{....}) + (\bar{y}_{i.k.} - \bar{y}_{i...} - \bar{y}_{.k..} + \bar{y}_{....}) \\
&+ (\bar{y}_{.jk.} - \bar{y}_{.j..} - \bar{y}_{..k.} + \bar{y}_{....}) \\
&+ (\bar{y}_{ijk.} - \bar{y}_{ij..} - \bar{y}_{i.k.} - \bar{y}_{.jk.} + \bar{y}_{i...} + \bar{y}_{.j..} + \bar{y}_{..k.} - \bar{y}_{....}) \\
&+ (y_{ijkl} - \bar{y}_{ijk.})]^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= \; & 4n\sum_{i=1}^{2}(\bar{y}_{i...} - \bar{y}_{....})^2 + 4n\sum_{j=1}^{2}(\bar{y}_{.j..} - \bar{y}_{....})^2 + 4n\sum_{k=1}^{2}(\bar{y}_{..k.} - \bar{y}_{....}) + \\
& 2n\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}(\bar{y}_{ij..} - \bar{y}_{i...} - \bar{y}_{.j..} + \bar{y}_{....})^2 + 2n\sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}(\bar{y}_{i.k.} - \bar{y}_{i...} - \bar{y}_{..k.} + \bar{y}_{....})^2 + \\
& 2n\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}(\bar{y}_{.jk.} - \bar{y}_{.j..} - \bar{y}_{..k.} + \bar{y}_{....})^2 + \\
& n\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}(\bar{y}_{ijk.} - \bar{y}_{ij..} - \bar{y}_{i.k.} - \bar{y}_{.jk.} + \bar{y}_{i...} + \bar{y}_{.j..} + \bar{y}_{..k.} - \bar{y}_{....})^2 + \\
& \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{n}(y_{ijkl} - \bar{y}_{ijk.})^2
\end{aligned} \qquad (2.6)$$

Tampak bahwa jumlah kuadrat total dapat dibagi kedalam jumlah kuadrat yang berkaitan dengan faktor A, faktor B, faktor C, jumlah kuadrat yang berkaitan dengan interaksi dua-faktor yaitu AB, AC, BC, dan jumlah kuadrat yang berkaitan dengan interaksi tiga-faktor ABC serta jumlah kuadrat yang berkaitan dengan error. Sehingga persamaan (2.6) dapat dinyatakan dalam bentuk :

$$SS_T = SS_A + SS_B + SS_C + SS_{AB} + SS_{AC} + SS_{BC} + SS_{ABC} + SS_E$$

Rata-rata kuadrat diperoleh dengan membagi jumlah kuadrat dengan derajat bebasnya. Nilai harapan untuk rata-rata kuadrat error diperoleh

$$E(MS_E) = E\left(\frac{SS_E}{8(n-1)}\right) = \frac{1}{8(n-1)} E\left[\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{n}(y_{ijkl} - \bar{y}_{ijk.})^2\right]$$

$$= \frac{1}{8(n-1)} E\left[\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{n}(y_{ijkl}^2 - 2y_{ijkl}\bar{y}_{ijk.} + \bar{y}_{ijk.}^2)\right]$$

$$= \frac{1}{8(n-1)} E\left[\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{n} y_{ijkl}^2 - 2\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{n} y_{ijkl}\bar{y}_{ijk.} + n\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\bar{y}_{ijk.}^2\right]$$

$$= \frac{1}{8(n-1)} E\left[\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{n} y_{ijkl}^2 - 2n\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\bar{y}_{ijk.}^2 + n\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\bar{y}_{ijk.}^2\right]$$

$$= \frac{1}{8(n-1)} E\left[\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{n} y_{ijkl}^2 - n\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\bar{y}_{ijk.}^2\right]$$

$$= \frac{1}{8(n-1)} E\left[\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{n}(\mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_k + (\tau\beta)_{ij} + (\tau\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\tau\beta\gamma)_{ijk} + \varepsilon_{ijkl})^2\right.$$

$$\left. - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\left(\sum_{l=1}^{n}(\mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_k + (\tau\beta)_{ij} + (\tau\gamma)_{ik} + (\beta\gamma)_{jk} + (\tau\beta\gamma)_{ijk} + \varepsilon_{ijkl})\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{8(n-1)} E\left[\left(8n\mu^2 + 2\mu\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{n}\varepsilon_{ijkl} + 4n\sum_{i=1}^{2}\tau_i^2 + 4n\sum_{j=1}^{2}\beta_j^2 + 4n\sum_{k=1}^{2}\gamma_k\right.\right.$$

$$+ 2n\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}(\tau\beta)_{ij}^2 + 2n\sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}(\tau\gamma)_{ik}^2 + 2n\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}(\beta\gamma)_{jk}^2 + n\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}(\tau\beta\gamma)_{ijk}^2$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{n}\varepsilon_{ijkl}^2\right) - \left(8n\mu^2 + 2\mu\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{n}\varepsilon_{ijkl} + 4n\sum_{i=1}^{2}\tau_i^2 + 4n\sum_{j=1}^{2}\beta_j^2\right.$$

$$+ 4n\sum_{k=1}^{2}\gamma_k + 2n\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}(\tau\beta)_{ij}^2 + 2n\sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}(\tau\gamma)_{ik}^2 + 2n\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}(\beta\gamma)_{jk}^2$$

$$\left.\left. + n\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}(\tau\beta\gamma)_{ijk}^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{n}\varepsilon_{ijkl}^2\right)\right]$$

$$E(MS_E) = \frac{1}{8(n-1)}\left[8n\sigma^2 - 8\sigma^2\right] = \frac{1}{8(n-1)}.8(n-1)\sigma^2 = \sigma^2 \qquad (2.7)$$

Nilai harapan untuk rata-rata kuadrat efek lainnya diperoleh dengan membuat tabel ekspektasi rata-rata kuadrat untuk model tetap tiga arah.

Tabel 2.2. Ekspektasi Rata-rata Kuadrat untuk Model Tetap Tiga Arah

Faktor	**F**	**F**	**F**	**R**	**Ekspektasi Rata-rata Kuadrat E(MS..)**
	a	**b**	**c**	**n**	
	i	**j**	**k**	**l**	
τ_i	0	b	c	n	$\sigma^2 + bcn\dfrac{\sum \tau_i^2}{a-1}$
β_j	a	0	c	n	$\sigma^2 + acn\dfrac{\sum \beta_j^2}{b-1}$
γ_k	a	b	0	n	$\sigma^2 + abn\dfrac{\sum \gamma_k^2}{c-1}$
$(\tau\beta)_{ij}$	0	0	c	n	$\sigma^2 + cn\dfrac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\tau\beta)_{ij}^2}{(a-1)(b-1)}$
$(\tau\gamma)_{ik}$	0	b	0	n	$\sigma^2 + bn\dfrac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{k=1}^{c}(\tau\gamma)_{ik}^2}{(a-1)(c-1)}$
$(\beta\gamma)_{jk}$	a	0	0	n	$\sigma^2 + an\dfrac{\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}(\beta\gamma)_{jk}^2}{(b-1)(c-1)}$
$(\tau\beta\gamma)_{ijk}$	0	0	0	n	$\sigma^2 + n\dfrac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}(\tau\beta\gamma)_{ijk}^2}{(a-1)(b-1)(c-1)}$
$\varepsilon_{(ijk)l}$	1	1	1	1	σ^2

Sehingga dengan taraf a, b, c = 2 maka didapat :

$$MS_A = \sigma^2 + 4n\sum_{i=1}^{2}\tau_i^2$$

$$MS_B = \sigma^2 + 4n\sum_{j=1}^{2}\beta_j^2$$

$$MS_C = \sigma^2 + 4n\sum_{k=1}^{2}\gamma_k^2$$

$$MS_{AB} = \sigma^2 + 2n\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}(\tau\beta)_{ij}^2$$

$$MS_{AC} = \sigma^2 + 2n\sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}(\tau\gamma)_{ik}^2$$

$$MS_{BC} = \sigma^2 + 2n\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}(\beta\gamma)_{jk}^2$$

$$MS_{ABC} = \sigma^2 + n\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}(\tau\beta\gamma)_{ijk}^2$$

Jika hipotesis nol salah, maka nilai ekspektasi kuadrat rata-rata dari faktor adalah lebih besar dari σ^2. Oleh karena itu untuk menguji signifikansi efek utama dan interaksi, rata-rata kuadrat yang berkaitan dengan efek utama dan interaksi dibagi dengan rata-rata kuadrat error. Perbandingan ini akan memenuhi distribusi F dengan derajat bebas pembilangnya adalah derajat bebas yang berkaitan dengan jumlah kuadrat efek dan derajat bebas penyebutnya adalah derajat bebas jumlah kuadrat error (SS_E).

Hal ini dapat dijelaskan dengan menggunakan asumsi awal yaitu ε_{ijkl} berdistribusi normal dan independen dengan mean nol dan variansi σ^2, y_{ijkl} berdistribusi normal dan independen dengan mean $(\mu+\tau_i+\beta_j+\gamma_k+(\tau\beta)_{ij}+(\tau\gamma)_{ik}+(\beta\gamma)_{jk}+(\tau\beta\gamma)_{ijk})$ yang dimisalkan dengan μ_a dan variansi σ^2, maka SS_T adalah jumlah kuadrat dalam distribusi normal. Selanjutnya SS_T/σ^2 akan berdistribusi chi-square (χ^2) dengan derajat bebas (8n-1).

Bukti :

$$\mathrm{SS_T} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{n}(y_{ijkl}-\bar{y}_{....})^2$$

$$=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{n}(y_{ijkl}-\mu_a+\mu_a-\bar{y}_{....})^2$$

$$=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{n}(y_{ijkl}-\mu_a)^2-8n(\bar{y}_{....}-\mu_a)^2$$

$$\frac{SS_T}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{n}(y_{ijkl} - \mu_a)^2}{\sigma^2} - \frac{8n(\bar{y}_{....} - \mu_a)^2}{\sigma^2}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

berdistribusi $\chi^2_{(8n)}$ berdistribusi $\chi^2_{(1)}$

jadi dengan demikian SS_T / σ^2 berdistribusi $\chi^2_{(8n-1)}$.

SS_E / σ^2 akan berdistribusi chi-square (χ^2) dengan derajat bebas 8(n-1).

Bukti :

$$\mathrm{SS_E} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{n}(y_{ijkl} - \bar{y}_{ijk.})^2$$

$$= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{n}(y_{ijkl} - \mu_a)^2 - \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}(\bar{y}_{ijk.} - \mu_a)^2$$

$$\frac{SS_E}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{n}(y_{ijkl} - \mu_a)^2}{\sigma^2} - \frac{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}(\bar{y}_{ijk.} - \mu_a)^2}{\sigma^2}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

berdistribusi $\chi^2_{(8n)}$ berdistribusi $\chi^2_{(8)}$

jadi dengan demikian SS_E / σ^2 berdistribusi $\chi^2_{(8(n-1))}$.

Jumlah kuadrat efek utama dan interaksi yang dibagi dengan σ^2 masing-masing akan berdistribusi chi-square. Sehingga perbandingan dua variabel random yang masing-masing berdistribusi chi-square akan menghasilkan sebuah variabel random yang berditribusi F, yaitu :

Jika $V_1 \sim \chi^2_{(v1)}$ dan $V_2 \sim \chi^2_{(v2)}$ independen, maka variabel random

$$X = \frac{V_1 / v_1}{V_2 / v_2} \sim F_{(v1,v2)}$$

dengan demikian statistik uji yang digunakan untuk menguji signifikansi efek adalah :

$$F_0 = \frac{MS_{efek}}{MS_E} \qquad \text{H}_0 \text{ akan ditolak jika } F_0 > F_{\alpha,\, db(\text{efek}),\, 8(n-1)}$$

Prosedur uji hipotesis ini dirangkum dalam tabel analisis variansi berikut :

Tabel 2.3. Analisis variansi untuk rancangan faktorial 2^3

Sumber Variasi	Jumlah Kuadrat	db	Rata-rata Kuadrat	F_0
efek utama				
A	SS_A	1	$MS_A = SS_A$	MS_A / MS_E
B	SS_B	1	$MS_B = SS_B$	MS_B / MS_E
C	SSc	1	$MS_C = SS_C$	MS_C / MS_E
interaksi dua faktor				
AB	SS_{AB}	1	$MS_{AB} = SS_{AB}$	MS_{AB} / MS_E
AC	SS_{AC}	1	$MS_{AC} = SS_{AC}$	MS_{AC} / MS_E
BC	SS_{BC}	1	$MS_{BC} = SS_{BC}$	MS_{BC} / MS_E
interaksi tiga – faktor				
ABC	SS_{ABC}	1	$MS_{ABC} = SS_{ABC}$	MS_{ABC} / MS_E
Error	SS_E	$8(n-1)$	$MS_E = SS_E / 8(n-1)$	
Total	SS_T	$8n-1$		

Formula yang digunakan untuk menghitung jumlah kuadrat total adalah :

$$SS_T = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{n} y_{ijkl}^2 - \frac{y_{....}^2}{8n}$$

jumlah kuadrat untuk efek utama adalah

$$SS_A = \sum_{i=1}^{2} \frac{y_{i...}^2}{4n} - \frac{y_{....}^2}{8n}$$

$$SS_B = \sum_{j=1}^{2} \frac{y_{.j..}^2}{4n} - \frac{y_{....}^2}{8n}$$

$$SS_C = \sum_{k=1}^{2} \frac{y_{..k.}^2}{4n} - \frac{y_{....}^2}{8n}$$

jumlah kuadrat untuk efek interaksi adalah

$$SS_{AB} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \frac{y_{ij..}^2}{2n} - \sum_{i=1}^{2} \frac{y_{i...}^2}{4n} - \sum_{j=1}^{2} \frac{y_{.j..}^2}{4n} + \frac{y_{....}^2}{8n}$$

$$SS_{AC} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} \frac{y_{i.k.}^2}{2n} - \sum_{i=1}^{2} \frac{y_{i...}^2}{4n} - \sum_{k=1}^{2} \frac{y_{..k.}^2}{4n} + \frac{y_{....}^2}{8n}$$

$$SS_{BC} = \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} \frac{y_{.jk.}^2}{2n} - \sum_{j=1}^{2} \frac{y_{.j..}^2}{4n} - \sum_{k=1}^{2} \frac{y_{..k.}^2}{4n} + \frac{y_{....}^2}{8n}$$

$$SS_{ABC} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} \frac{y_{ijk.}^2}{n} - \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \frac{y_{ij..}^2}{2n} - \sum_{i=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} \frac{y_{i.k.}^2}{2n} - \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} \frac{y_{.jk.}^2}{2n}$$
$$+ \sum_{i=1}^{2} \frac{y_{i...}^2}{4n} + \sum_{j=1}^{2} \frac{y_{.j..}^2}{4n} + \sum_{k=1}^{2} \frac{y_{..k.}^2}{4n} - \frac{y_{....}^2}{8n} \tag{2.8}$$

SS_E dihitung melalui selisih antara jumlah kuadrat total, efek utama dan efek interaksi yaitu :

$$SS_E = SS_T - SS_A - SS_B - SS_C - SS_{AB} - SS_{AC} - SS_{BC} - SS_{ABC} \tag{2.9}$$

2.3. Menentukan Signifikansi Efek

Untuk menentukan signifikansi efek digunakan analisis variansi. Montgomery (1991) telah merangkum analisis variansi untuk rancangan 2^k yang dinyatakan dalam tabel berikut :

Tabel 2.4. Analisis variansi untuk rancangan 2^k

Sumber Variasi	Jumlah Kuadrat	Derajat bebas
k efek utama		
A	SS_A	1
B	SS_B	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
K	SS_K	1
$\binom{k}{2}$ interaksi dua faktor		
AB	SS_{AB}	1
AC	SS_{AC}	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
JK	SS_{JK}	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\binom{k}{k}$ interaksi k faktor		
$ABC..K$	$SS_{ABC...K}$	1
Error	SS_E	$2^k(n-1)$
Total	SS_T	$n2^k - 1$

Selain analisis variansi, metode lain yang digunakan untuk menentukan signifikansi suatu efek yaitu membandingkan standar error dari efek dengan besarnya efek suatu faktor atau interaksi ,yaitu :

$$(A,B,...,K / AB,...,ABC...K) : \text{estimasi efek} \pm t_{\alpha/2}.s.e.(efek) \tag{2.10}$$

interval diatas mendekati interval konfidensi (1-α)x100%. Faktor atau interaksi yang signifikan dapat dilihat dari interval tersebut, yaitu dengan melihat interval efek faktor atau interaksi yang tidak mengandung nol. Standar error estimasi suatu efek dapat dihitung melalui

$$s.e.(efek) = \sqrt{V(efek)} = \sqrt{\frac{4\sigma^2}{N}} \qquad \text{N = total amatan} \tag{2.11}$$

Estimasi σ^2 dapat dihitung melalui beberapa cara yaitu :

1. Jika rancangan faktorial 2^k memiliki n ulangan pada setiap amatan, maka

$$V(efek) = V\left(\frac{kontras}{n2^{k-1}}\right) = \frac{1}{n^2(2^{k-1})^2} V(kontras)$$

karena $V(kontras) = V(\sum_{i=1}^{2^k} c_i Y_{i.}) = n2^k \sigma^2$, c_i = koefisien kontras

maka

$$V(efek) = \frac{1}{n^2(2^{k-1})^2} n2^k \sigma^2 = \frac{1}{n2^{k-2}} \sigma^2 = \frac{4}{N} \sigma^2 \qquad ; N = n2^k$$

σ^2 diestimasi dengan $S^2 (\hat{\sigma}^2 = S^2)$ yang dalam tabel analisis variansi dinyatakan dengan nilai rata-rata kuadrat error (MS_E). Diketahui estimasi variansi dari amatan ke-*i* adalah :

$$S_i^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 \qquad i = 1,2,\ldots,2^k$$

estimasi variansi untuk 2^k amatan adalah

$$S^2 = \frac{1}{2^k (n-1)} \sum_{i=1}^{2^k} \sum_{j=1}^{n} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 \tag{2.12}$$

2. Jika rancangan faktorial 2^k hanya memiliki satu ulangan (*unreplicated factorial*) maka

$$V(efek) = V\left(\frac{kontras}{2^{k-1}}\right) = \frac{1}{(2^{k-1})^2} V(kontras)$$

dengan $V(kontras) = V(\sum_{i=1}^{2^k} c_i Y_i) = 2^k \sigma^2$, maka

$$V(efek) = \frac{1}{(2^{k-1})^2} 2^k \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{2^{k-2}} = \frac{4\sigma^2}{N} \qquad ; N = 2^k$$

σ^2 diestimasi dengan menggabungkan jumlahan kuadrat dari interaksi order tiga dan yang lebih tinggi lalu dibagi dengan jumlah derajat bebasnya, atau ditulis :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{SS_{3\_faktor} + SS_{4\_faktor} + \ldots + SS_{k\_faktor}}{1+1+\ldots+1}$$

$$= \frac{SS_{3\_faktor} + SS_{4\_faktor} + \ldots + SS_{k\_faktor}}{2^k - \binom{k}{1} - \binom{k}{2} - 1} \qquad (2.13)$$

SS_{k_faktor} = Jumlah kuadrat (*Sum of Square*) untuk interaksi k faktor.

2.4. Algoritma Yates

Algoritma Yates merupakan salah satu teknik untuk menentukan estimasi efek dan jumlah kuadrat pada rancangan faktorial 2^k. Algoritma ini dikenalkan oleh Yates (1937).

Sebagai contoh dapat dilihat pada perhitungan estimasi efek dan jumlah kuadrat (Tabel 2.6 hal.28), dimana kombinasi perlakuan ditulis kebawah dalam urutan standar (*standard order*) dalam suatu tabel yang terdiri dari beberapa kolom, dan kolom "*response*" berisi observasi (total semua observasi) pada kombinasi perlakuan yang bersesuaian. Setengah pertama dari kolom (1) diperoleh dengan menjumlahkan pasangan angka yang berdekatan pada kolom observasi, misal nilai 30 pada kolom (1) diperoleh dari 12+18 pada kolom observasi. Setengah kedua dari kolom (1) diperoleh dengan mengurangkan bilangan yang dibawah dengan bilangan yang diatas pada setiap pasangan bilangan dari kolom observasi, misal nilai 6 pada kolom (1) diperoleh dari 18-12 pada kolom observasi. Kolom (2) diperoleh dari kolom (1) dengan cara yang sama, selanjutnya kolom (3) diperoleh dari kolom (2) dan seterusnya sampai kolom (4).

Secara umum, untuk sebuah rancangan faktorial 2^k, *k* kolom yaitu kolom (1),(2),....,(*k*) akan dibentuk melalui penjumlahan dan pengurangan pasangan bilangan yang bersesuaian. Hasil pada kolom (*k*) merupakan kontras dari efek. Untuk memperoleh estimasi efek, bilangan atau elemen dalam kolom (*k*) harus dibagi dengan $n2^{k-1}$, kecuali untuk elemen pertama dibagi dengan $n2^k$ karena estimasi pertama ini merupakan rata-rata keseluruhan dari semua observasi. Jumlah kuadrat (*sum of square*) untuk efek diperoleh dengan mengkuadratkan elemen-elemen dalam kolom (*k*) dan dibagi dengan $n2^k$, kecuali untuk elemen pertama prosedur ini tidak dilakukan.

Perhitungan yang dilakukan diatas dapat diperiksa ketelitiannya dengan cara menghitung total jumlah kuadrat dalam setiap kolom. Pertama dihitung total jumlah kuadrat kolom "observasi", selanjutnya total jumlah kuadrat dalam kolom (1) adalah dua kali total jumlah kuadrat kolom "observasi", total jumlah kuadrat dalam kolom (2) adalah 2^2 kali total jumlah kuadrat kolom "observasi". Jadi total jumlah kuadrat dalam kolom (m) adalah $2^m \sum y^2$ dengan $\sum y^2$ adalah total jumlah kuadrat elemen dalam kolom "observasi", dengan y adalah nilai observasi.

2.5. Uji Lanjut dengan Metode Duncan

Uji Duncan didasarkan pada sekumpulan nilai beda nyata yang ukurannya semakin besar tergantung pada jarak diantara pangkat-pangkat dari dua nilai tengah yang dibandingkan.

Uji Duncan dapat digunakan untuk menguji perbedaan diantara semua pasangan perlakuan yang mungkin tanpa memperhatikan jumlah perlakuan yang ada dari percobaan tersebut serta masih dapat mempertahankan tingkat nyata yang ditetapkan. Langkah-langkah perhitungan uji ini adalah :

1. Susunlah nilai tengah perlakuan dalam urutan menaik.
2. Hitunglah galat baku dari nilai tengah perlakuan, sebagai berikut :
   a. Untuk percobaan dengan perlakuan-perlakuan yang mempunyai ulangan sama, yaitu r, maka :

   $$s_{\bar{Y}} = (s^2 / r)^{1/2} = (KTG / r)^{1/2}$$

   dimana s^2 adalah nilai kuadrat tengah galat dan r adalah jumlah ulangan.

   b. Jika perlakuan tidak mempunyai ulangan sama, maka nilai r diganti dengan $r_h = \dfrac{a}{\sum_{i=1}^{a} 1/r_i}$, $a =$ jumlah perlakuan.
3. Hitunglah daerah signifikan terkecil sebagai berikut :

   $$R_p = r_\alpha(p, f) S_{\bar{Y}}$$

   $r_\alpha(p, f)$ ditentukan dari tabel daerah signifikan Duncan untuk p = 2,3,... a, dengan α adalah tingkat signifikan dan f adalah derajat bebas .
4. Uji selisih dua mean mulai dari :
   i. (Mean terbesar – mean terkecil) dibandingkan dengan R_a.
   ii. (mean terbesar - mean terkecil kedua) dibandingkan dengan R_{a-1}, dan seterusnya.
   iii. (mean terbesar kedua – mean terkecil) dibandingkan dengan R_{a-1}.

iv. (mean terbesar kedua – mean terkecil kedua) dibandingkan dengan R_{a-2}, dan seterusnya.(semua ada $\frac{a(a-1)}{2}$ pasangan mean).

v. Jika selisih dua mean > R_p, maka pasangan mean tersebut berbeda secara signifikan.

2.6. Rancangan Faktorial 2^k dengan Satu Ulangan (*Single Replicate*)

Model statistik linear yang digunakan seperti halnya untuk rancangan faktorial 2^k, dengan ini untuk ulangan tunggal *(single replicate)*, dapat ditulis sebagai berikut :

$$y_{ij...l} = \mu + \tau_i + \beta_j + ... + \gamma_l + (\tau\beta)_{ij} + ... + (\tau\gamma)_{il} + ... + (\tau\beta...\gamma)_{ij...l} + \varepsilon_{ij...l} \qquad (2.14)$$

dengan i = 1,2 ; j = 1,2 ;....; l = 1,2

i, j,..., l = taraf faktor untuk masing-masing faktor yang dicobakan

μ = rata-rata keseluruhan

τ_i = efek taraf ke-i dari faktor A

⋮

$(\tau\beta)_{ij}$ = efek interaksi antara faktor A dan B

⋮

$(\tau\beta...\gamma)_{ij...l}$ = efek interaksi antara faktor A, B,....,K

$\varepsilon_{ij...l}$ = komponen error random

Semakin banyak jumlah faktor yang diamati dalam rancangan faktorial, maka jumlah efek yang akan diestimasi dalam rancangan juga semakin besar. Dalam banyak praktek, seringnya efek interaksi tiga-faktor dan interaksi order yang lebih tinggi biasanya dapat diabaikan. Menurut Montgomery (1991) dalam hal ini berlaku prinsip pengurangan efek (*sparsity of effects principle*) yaitu suatu sistem biasanya didominasi oleh efek utama (*main effects*) dan interaksi order rendah (*low-order interactions*). Oleh karena itu, jika jumlah faktor dalam rancangan cukup besar, misalnya $k \geq 4$, biasanya dalam praktek hanya ada satu ulangan (*single replicate*) pada rancangan 2^k tersebut. Berarti estimasi error tidak bisa dihitung langsung dari ulangan seperti yang biasa dilakukan. Salah satu pendekatan yang dilakukan adalah menggabungkan rata-rata kuadrat (*mean squares*) dari interaksi order yang lebih tinggi untuk mengestimasi error.

$$SS_E = SS_{3\_faktor} + SS_{4\_faktor} + \ldots + SS_{k\_faktor}$$

Masalah yang timbul dalam penaksiran efek pada rancangan faktorial dengan satu ulangan adalah ada kalanya interaksi order yang lebih tinggi benar-benar terjadi dan untuk itu perlu dilakukan seleksi terhadap interaksi order yang lebih tinggi, interaksi yang mana yang benar-benar terjadi atau dapat diabaikan. Karenanya menggunakan rata-rata kuadrat error yang diperoleh dari gabungan semua interaksi order yang lebih tinggi tidak dapat langsung dilakukan bila hal ini terjadi.

Metode analisis yang diperkenalkan Daniel (1959) merupakan suatu cara untuk mengatasi masalah ini, yaitu membentuk pp-normal atau plot setengah-normal (*half-normal plot*) dari estimasi efek. Metode ini juga merupakan salah satu cara untuk menentukan signifikansi efek dalam rancangan 2^k. Efek yang tidak signifikan dan diabaikan akan berdistribusi normal dan akan jatuh sepanjang garis lurus pada pp-normal, sedangkan efek yang tidak berada pada garis lurus dalam pp-normal merupakan efek yang signifikan.

Sebagai gambaran akan diberikan sebuah contoh rancangan faktorial 2^4 dari data penelitian perusahaan beton (Montgomery,1991) dengan empat faktor yang diteliti, yang masing-masing mempunyai dua taraf faktor, yaitu A = Waktu, B = Konsentrasi, C = Tekanan, dan D = Suhu, yang akan diselesaikan dengan metode ANOVA dan Algoritma Yate's. Keseluruhan data didistribusikan sebagai berikut :

Tabel. 2.5. Faktor dan masing-masing taraf faktor yang diteliti

Faktor	**Taraf Faktor**	
	Rendah (-)	**Tinggi (+)**
A (jam)	2,5	3
B (%)	14	18
C (Psi)	60	80
D (^{0}C)	225	250

Tabel 2.6. Data rancangan faktorial 2^4 dengan satu ulangan

A_0	B_0	C_0	D_0	12
			D_1	10
		C_1	D_0	17
			D_1	19
	B_1	C_0	D_0	13
			D_1	13
		C_1	D_0	20
			D_1	17
A_1	B_0	C_0	D_0	18
			D_1	25
		C_1	D_0	15
			D_1	21
	B_1	C_0	D_0	16
			D_1	24
		C_1	D_0	15
			D_1	23

1. Metode perhitungan dengan ANOVA

Tabel 2.7. Tanda positif dan negatif untuk rancangan 2^4

No. Amatan	Kombinasi Perlakuan	Efek																
		I	A	B	AB	C	AC	BC	ABC	D	AD	BD	ABD	CD	ACD	BCD	ABCD	Y
1	(1)	+	-	-	+	-	+	+	-	-	+	+	-	+	-	-	+	12
2	a	+	+	-	-	-	-	+	+	-	-	+	+	+	+	-	-	18
3	b	+	-	+	-	-	+	-	+	-	+	-	+	+	-	+	-	13
4	ab	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	16
5	c	+	-	-	+	+	-	-	+	-	+	+	-	-	+	+	-	17
6	ac	+	+	-	-	+	+	-	-	-	-	+	+	-	-	+	+	15
7	bc	+	-	+	-	+	-	+	-	-	+	-	+	-	+	-	+	20
8	abc	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	15
9	d	+	-	-	+	-	+	-	-	+	-	+	+	-	+	-	-	10
10	ad	+	+	-	-	-	-	+	+	+	+	-	-	-	-	+	+	25
11	bd	+	-	+	-	-	+	+	+	+	-	+	-	-	+	+	+	13
12	abd	+	+	+	+	-	-	-	-	+	+	+	+	-	-	-	-	24
13	cd	+	-	-	+	+	-	+	+	+	-	-	+	+	-	+	+	19
14	acd	+	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	21
15	bcd	+	-	+	-	+	-	-	-	+	-	+	-	+	-	-	-	17
16	abcd	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	23

Melalui tabel diatas maka dapat dihitung kontras dari masing-masing kombinasi efek, sehingga estimasi efek :

$$\ell_{\text{ABC...K}} = \frac{1}{2^{\text{k-1}}}(Kontras_{ABC...K})$$

$$\ell_A = \frac{1}{8}[-12+18-13+16-17+15-20+15-10+25-13+24-19+21-17+23] = \frac{36}{8} = 4{,}5$$

$$\ell_B = \frac{1}{8}[-12-18+13+16-17-15+20+15-10-25+13+24-19-21+17+23] = \frac{4}{8} = 0{,}5$$

$$\ell_{AB} = \frac{1}{8}[12-18-13+16+17-15-20+15+10-25-13+24+19-21-17+23] = \frac{-6}{8} = -0{,}75$$

$$\ell_C = \frac{1}{8}[-12-18-13-16+17+15+20+15-10-25-13-24+19+21+17+23] = \frac{16}{8} = 2$$

$$\ell_{AC} = \frac{1}{8}[12-18+13-16-17+15+20+15-10-25+13-24-19+21-17+23] = \frac{-34}{8} = -4{,}25$$

$$\ell_{BC} = \frac{1}{8}[12+18-13-16-17-15+20+15+10+25-13-24-19-21+17+23] = \frac{2}{8} = 0{,}25$$

$$\ell_{ABC} = \frac{1}{8}[-12+18+13-16+17-15-20+15-10+25+13-24+19-21-17+23] = \frac{8}{8} = 1$$

$$\ell_D = \frac{1}{8}[-12-18-13-16-17-15-20-15+10+25+13+24+19+21+17+23] = \frac{26}{8} = 3{,}25$$

$$\ell_{AD} = \frac{1}{8}[12-18+13-16+17-15+20-15-10+25-13+24-19+21-17+23] = \frac{32}{8} = 4$$

$$\ell_{BD} = \frac{1}{8}[12+18-13-16+17+15-20-15-10-25+13+24-19-21+17+23] = \frac{0}{8} = 0$$

$$\ell_{ABD} = \frac{1}{8}[-12+18+13-16-17+15+20-15+10-25-13+24+19-21-17+23] = \frac{6}{8} = 0{,}75$$

$$\ell_{CD} = \frac{1}{8}[12+18+13+16-17-15-20-15-10-25-13-24+19+21+17+23] = \frac{0}{8} = 0$$

$$\ell_{ACD} = \frac{1}{8}[-12+18-13+16+17-15+20-15+10-25+13-24-19+21-17+23] = \frac{-2}{8} = -0{,}25$$

$$\ell_{BCD} = \frac{1}{8}[-12-18+13+16+17+15-20-15+10+25-13-24-19-21+17+23] = \frac{-6}{8} = -0{,}75$$

$$\ell_{ABCD} = \frac{1}{8}[12-18-13+16-17+15+20-15-10+25+13-24+19-21-17+23] = \frac{8}{8} = 1$$

dengan kontras tersebut dapat pula dihitung kuadrat jumlah dari masing-masing kombinasi efek sebagai berikut :

$$\text{SS}_{\text{AB..K}} = \frac{(\text{Kontras}_{\text{AB..K}})^2}{2^{\text{k}}}$$

$$SS_A = \frac{(36)^2}{16} = 81$$

$$SS_B = \frac{(4)^2}{16} = 1$$

$$SS_{AB} = \frac{(-6)^2}{16} = 2{,}25$$

$$SS_C = \frac{(16)^2}{16} = 16$$

$$SS_{AC} = \frac{(-34)^2}{16} = 72{,}25$$

$$SS_{BC} = \frac{(2)^2}{16} = 0{,}25$$

$$SS_{ABC} = \frac{(8)^2}{16} = 4$$

$$SS_D = \frac{(26)^2}{16} = 42{,}25$$

$$SS_{AD} = \frac{(32)^2}{16} = 64$$

$$SS_{BD} = \frac{(0)^2}{16} = 0$$

$$SS_{ABD} = \frac{(6)^2}{16} = 2{,}25$$

$$SS_{CD} = \frac{(0)^2}{16} = 0$$

$$SS_{ACD} = \frac{(-2)^2}{16} = 0{,}25$$

$$SS_{BCD} = \frac{(-6)^2}{16} = 2{,}25$$

$$SS_{ABCD} = \frac{(8)^2}{16} = 4$$

Estimasi error dihitung melalui pendekatan yaitu menggabungkan rata-rata kuadrat (*mean square*) dari interaksi order tiga atau lebih yang dapat diabaikan.

$$SS_E = SS_{ABC} + SS_{ACD} + SS_{ABD} + SS_{BCD} + SS_{ABCD}$$
$$= 4 + 0{,}25 + 2{,}25 + 2{,}25 + 4 = 12{,}75$$

$$SS_T = SS_A + SS_B + SS_C + SS_D + SS_{AB} + SS_{AC} + SS_{AD} + SS_{BC} + SS_{BD} + SS_{CD} + SS_E$$
$$= 81 + 1 + 16 + 42{,}25 + 2{,}25 + 72{,}25 + 64 + 0{,}25 + 0 + 0 + 12{,}75 = 291{,}75$$

3. Metode perhitungan dengan Algoritma Yate's

Tabel 2.8. Algoritma Yate's

Kombinasi Perlakuan	Y	(1)	(2)	(3)	(4)	Efek	Estimasi efek (4) : 2^3	Jumlah Kuadrat $(4)^2 : 2^4$
(1)	12	30	59	126	278	**I**	-	-
a	18	29	67	152	36	**A**	4.5	81
b	13	32	72	2	4	**B**	0.5	1
ab	16	35	80	34	-6	**AB**	-0.75	2.25
c	17	35	9	2	16	**C**	2	16
ac	15	37	-7	2	-34	**AC**	-4.25	72.25
bc	20	40	26	-6	2	**BC**	0.25	0.25
abc	15	40	8	0	8	**ABC**	1	4

d	10	6	-1	8	26	**D**	3.25	42.25
ad	25	3	3	8	32	**AD**	4	64
bd	13	-2	2	-16	0	**BD**	0	0
abd	24	-5	0	-18	6	**ABD**	0.75	2.25
cd	19	15	-3	4	0	**CD**	0	0
acd	21	11	-3	-2	-2	**ACD**	-0.25	0.25
bcd	17	2	-4	0	-6	**BCD**	-0.75	2.25
abcd	23	6	4	8	8	**ABCD**	1	4

Tabel 2.9. Analisis Variansi

S. Variansi	Jumlah Kuadrat	db	Rata-rata Jumlah Kuadrat	F_0
A	81	1	81	31.76
B	1	1	1	0.39
C	16	1	16	6.27
D	42.25	1	42.25	16.57
AB	2.25	1	2.25	0.88
AC	72.25	1	72.25	28.33
AD	64	1	64	25.098
BC	0.25	1	0.25	0.098
BD	0	1	0	0
CD	0	1	0	0
Error	12.75	5	2.55	
Total	291.75	15		

Dengan $F_{0.05;1;5}$ = 6.61, maka jika dibandingkan dengan F_0 diatas akan menghasilkan efek tertentu dengan nilai $F_0 > F_{0.05;1;5}$ atau dengan kata lain efek yang signifikan adalah A (waktu), C (tekanan), D (suhu), AC (interaksi antara waktu dan tekanan), dan AD (interaksi antara waktu dan suhu). Dengan hasil ini maka untuk interaksi efek AC dan AD akan dilakukan uji lanjut dengan metode Duncan, sedangkan untuk efek utama yang signifikan akan dilakukan pemilihan taraf yang dapat memberikan pengaruh positif pada respon.

$$\overline{A}_0 = \frac{12+10+17+19+13+13+20+17}{8} = 15.125$$

$$\overline{A}_1 = \frac{18+25+15+21+16+24+15+23}{8} = 19.625$$

$$\overline{C}_0 = \frac{12+10+13+13+18+25+16+24}{8} = 16.375$$

$$\overline{C}_1 = \frac{17+19+20+17+15+21+15+23}{8} = 18.375$$

$$\overline{D}_0 = \frac{12+17+13+20+18+15+16+15}{8} = 15.75$$

$$\overline{D}_1 = \frac{10+19+13+17+25+21+24+23}{8} = 19$$

Jadi dari rata-rata diatas maka hasil proses yang maksimum diperoleh atau dipilih dari faktor A (waktu) yang berada pada taraf tinggi, faktor C (tekanan) pada taraf rendah, dan faktor D (suhu) pada taraf tinggi.

➢ Uji Lanjut (dengan Metode Duncan) untuk interaksi faktor AC dan AD

I. Untuk interaksi faktor AC

1. $\overline{y}_{A_0C_0} = 12 ; \overline{y}_{A_0C_1} = 18{,}25 ; \overline{y}_{A_1C_0} = 20{,}75 ; \overline{y}_{A_1C_1} = 18{,}5$

2. Standar Error

$$S_{\overline{Y}} = \sqrt{\frac{MSE}{r}} = \sqrt{\frac{2{,}55}{4}} = 0{,}798$$

3. $\alpha = 0{,}05$; p = 2,3,4 ; db = 5, maka $r_\alpha(p,f)$:

$r_{0.05}(2,5) = 3.64$ $\quad$ $r_{0.05}(3,5) = 3.74$ $\quad$ $r_{0.05}(4,5) = 3.79$

$$R_p = r_\alpha(p,f).S_{\overline{Y}} \text{ sehingga } \begin{aligned} R_2 &= 3{,}64.0{,}798 = 2{,}905 \\ R_3 &= 3{,}74.0{,}798 = 2{,}985 \\ R_4 &= 3{,}79.0{,}798 = 3{,}024 \end{aligned}$$

selanjutnya akan diuji selisih dua mean dari kombinasi perlakuan tersebut.

$A_1C_0 - A_0C_0 = 20{,}75 - 12 = 8{,}75 \quad > R_4 = 3{,}024$
$A_1C_0 - A_0C_1 = 20{,}75 - 18{,}25 = 2{,}5 < R_3 = 2{,}985$
$A_1C_0 - A_1C_1 = 20{,}75 - 18{,}5 = 2{,}25 < R_2 = 2{,}905$
$A_1C_1 - A_0C_0 = 18{,}5 - 12 = 6{,}5 \quad > R_3 = 2{,}985$
$A_1C_1 - A_0C_1 = 18{,}5 - 18{,}25 = 0{,}25 < R_2 = 2{,}905$
$A_0C_1 - A_0C_0 = 18{,}25 - 12 = 6{,}25 \quad > R_2 = 2{,}905$

atau dapat digambarkan bahwa :

A_0C_0 **$\underline{A_0C_1 \quad A_1C_1 \quad A_1C_0}$**

Sehingga dengan hasil tersebut dapat disimpulkan bahwa interaksi efek A_0C_0 (A waktu pada taraf rendah, C tekanan pada taraf rendah) memberikan perlakuan yang berbeda secara signifikan dengan interaksi efek yang lainnya.

II. Untuk interaksi faktor AD

1. $\overline{y}_{A_0D_0} = 15{,}5 ; \overline{y}_{A_0D_1} = 14{,}75 ; \overline{y}_{A_1D_0} = 16 ; \overline{y}_{A_1D_1} = 23{,}25$

2. Standar Error

$$S_{\overline{Y}} = \sqrt{\frac{MSE}{r}} = \sqrt{\frac{2{,}55}{4}} = 0{,}798$$

3. $\alpha = 0{,}05$; p = 2,3,4 ; db = 5, maka $r_\alpha(p,f)$:

$r_{0.05}(2{,}5) = 3.64 \qquad r_{0.05}(3{,}5) = 3.74 \qquad r_{0.05}(4{,}5) = 3.79$

$$R_p = r_\alpha(p,f).S_{\overline{Y}} \text{ sehingga } \begin{aligned} R_2 &= 3{,}64.0{,}798 = 2{,}905 \\ R_3 &= 3{,}74.0{,}798 = 2{,}985 \\ R_4 &= 3{,}79.0{,}798 = 3{,}024 \end{aligned}$$

selanjutnya akan diuji selisih dua mean dari kombinasi perlakuan tersebut.

$A_1D_1 - A_0D_1 = 23{,}25 - 14{,}75 = 8{,}5 > R_4 = 3{,}024$
$A_1D_1 - A_0D_0 = 23{,}25 - 15{,}5 = 7{,}75 > R_3 = 2{,}985$
$A_1D_1 - A_1D_0 = 23{,}25 - 16 = 7{,}25 \quad > R_2 = 2{,}905$
$A_1D_0 - A_0D_1 = 16 - 14{,}75 = 1{,}25 \quad < R_3 = 2{,}985$
$A_1D_0 - A_0D_0 = 16 - 15{,}5 = 0{,}5 \quad < R_2 = 2{,}905$
$A_0D_0 - A_0D_1 = 15{,}5 - 14{,}75 = 0{,}75 < R_2 = 2{,}905$

atau dapat digambarkan bahwa :

A_0D_1	**A_0D_0**	**A_1D_0**	**A_1D_1**

Sehingga dengan hasil tersebut dapat disimpulkan bahwa interaksi efek A_1D_1 (A waktu pada taraf tinggi, D suhu pada taraf tinggi) memberikan perlakuan yang berbeda secara signifikan dengan interaksi efek yang lainnya.

2.7. Blok dan Pembauran (*Confounding*)

Dalam praktek sering tidak memungkinkan untuk melakukan satu perulangan lengkap dari rancangan faktorial 2^k dalam satu kondisi yang konstan atau homogen, misalnya tidak memungkinkan untuk melakukan percobaan (eksperimen) dalam satu hari, satu laboratorium atau menggunakan material dari satu tumpukan atau tempat yang sama.

Pembauran (*confounding*) adalah suatu teknik rancangan untuk menyusun satu percobaan faktorial lengkap dalam blok-blok, dengan ukuran blok lebih kecil dari jumlah kombinasi perlakuan dari satu ulangan lengkap. Teknik ini menyebabkan informasi tentang efek tertentu (biasanya interaksi order yang lebih tinggi) menjadi tidak dapat dibedakan atau berbaur dengan blok. Oleh karena itu, dengan rancangan ini estimasi interaksi order yang lebih tinggi tidak dapat dipisahkan dari efek blok.

Untuk membentuk suatu rancangan faktorial 2^k yang dibaurkan dalam 2^p blok ($p < k$), setiap blok berisi 2^{k-p} haruslah dipilih p efek yang saling bebas (independen) yang akan dibaurkan dengan blok. Selanjutnya dibentuk blok-blok yang setiap blok hanya berisi sebagian dari kombinasi perlakuan dari faktor-faktor yang disusun dalam rancangan 2^k. Ada beberapa cara yang dapat dilakukan dalam menyusun blok-blok atau menentukan kombinasi perlakuan yang menempati blok-blok yang sama, yaitu :

1. Menggunakan tabel tanda positif dan negatif

   Setelah memilih p efek yang akan dibaurkan dalam blok, dibentuk kombinasi tanda positif dan negatif dari efek-efek tersebut yang banyaknya adalah 2^p. Setiap kombinasi tanda positif atau negatif merupakan satu blok.

   Selanjutnya setiap amatan dari efek-efek yang akan dibaurkan yang memiliki tanda positif atau negatif yang sesuai dengan tanda positif dan negatif dari kombinasi yang telah disusun dimasukkan dalam blok yang sama. Untuk rancangan faktorial 2^k yang dibaurkan dalam dua blok, maka kombinasi perlakuan dari efek yang akan dibaurkan yang memiliki tanda positif dimasukkan dalam satu blok, dan kombinsai perlakuan dengan tanda negatif dalam blok yang lainnya.

2. Menggunakan fungsi kontras penentu (*defining contras*)

   Setelah memilih p efek yang akan dibaurkan dalam blok, dibentuk suatu fungsi yang disebut kontras penentu (*defining contras*) L_1, L_2,..., L_p yang berkaitan dengan efek yang akan dibaurkan. Bentuk kontras penentu tersebut sebagai berikut :

$$L_i = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_k x_k = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j \qquad , i = 1, 2, \ldots, p \;\; (L_i = \text{mod}2) \qquad (2.15)$$

dengan x_j adalah taraf faktor ke-j dari suatu kombinsai perlakuan tertentu dan α_j adalah eksponen dari faktor ke-j dalam efek yang akan dibaurkan. Untuk rancangan 2^k, $\alpha_j = 0$ (faktor tidak muncul dalam efek yang akan dibaurkan) atau $\alpha_j = 1$ (faktor muncul dalam efek yang akan dibaurkan) dan $x_j = 0$ (taraf rendah) atau $x_j = 1$ (taraf tinggi).

Misalnya rancangan faktorial 2^3 dengan ABC dibaurkan dalam blok, maka fungsi kontras penentu berbentuk :

$$L = x_1 + x_2 + x_3$$

x_1 menyatakan faktor A, x_2 menyatakan faktor B, dan x_3 menyatakan faktor C, serta $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$. Kombinasi perlakuan yang menghasilkan nilai L yang sama diletakkan dalam blok yang sama.

Setelah diperoleh efek yang akan dibaurkan dalam blok dan kombinasi perlakuan telah dimasukkan kedalam blok-blok yang berbeda, selanjutnya terdapat $2^p - p - 1$ efek lain yang akan dibaurkan dengan blok, yang disebut interaksi yang digeneralisasi (*generalized interactions*) dari p efek independen yang telah dipilih sebelumnya.

Interaksi yang telah digeneralisasi ini diperoleh dari hasil kali antara p efek pertama yang telah dipilih sebelumnya. Perlu diingat perkalian efek dengan dirinya sendiri akan menghasilkan satu elemen identitas I. Seperti yang telah diketahui bahwa efek-efek yang akan dibaurkan dengan blok biasanya merupakan efek yang tidak terlalu penting dalam percobaan, sehingga dalam pemilihan p efek yang akan dibaurkan harus hati-hati agar informasi yang diinginkan dari suatu efek tidak hilang atau dengan kata lain efek yang penting tidak berbaur dengan blok.

Lebih jelasnya, pemilihan p efek yang digunakan untuk membangun blok sangat penting karena struktur pembauran dari rancangan secara langsung tergantung pada efek yang dipilih tersebut. Oleh karena itu (Montgomery, 1991) menyajikan sebuah tabel yang berisi bagaimana memilih p efek yang diperlukan dalam penyusunan blok, tabel tersebut dapat dilihat pada lampiran 2.

Analisis variansi dapat dilakukan sebagai analisis statistik pada rancangan ini. Jumlah kuadrat untuk semua efek dihitung seperti tidak terjadi blok. Sedangkan jumlah kuadrat blok diperoleh dengan menjumlahkan jumlah kuadrat semua efek yang dibaurkan dengan blok.