BAB II
MATERI DASAR

II.1. HIMPUNAN

DEFINISI 1

Himpunan adalah pengelompokan dari obyek-obyek, misalnya benda, bilangan, simbol dan sebagainya. Obyek yang membentuk suatu himpunan disebut elemen atau anggota himpunan. Himpunan dinyatakan dengan huruf besar. Notasi $x \in A$ menyatakan x anggota himpunan A, dan $x \notin A$ menyatakan x bukan anggota himpunan A.

DEFINISI 2

Dua himpunan A dan B disebut sama jika dan hanya jika mempunyai elemen yang sama.

DEFINISI 3

A disebut sub-himpunan dari B, ditulis $A \subset B$ atau $B \supset A$, jika semua elemen A juga elemen B.

DEFINISI 4

i. Gabungan dari himpunan A dan B, ditulis $A \cup B$, didefinisikan oleh $A \cup B = \{x: x \in A \text{ atau } x \in B\}$.

ii. Irisan dari himpunan A dan B, ditulis $A \cap B$, didefinisikan oleh $A \cap B = \{x: x \in A \text{ dan } x \in B\}$.

iii. Selisih dari himpunan A dan B, ditulis $A \setminus B$, didefinisikan oleh $A \setminus B = \{x: x \in A \text{ dan } x \notin B\}$.

II.2. MATRIKS

DEFINISI 5

Matriks adalah suatu array persegi panjang dari bilangan-bilangan (riil atau kompleks) :

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matriks $A=[a_{ij}]$ adalah matriks i baris dan j kolom, a_{ij} adalah elemen-elemen matriks A baris ke-i kolom ke-j, di mana $i=1,2,\ldots,m$ dan $j=1,2,\ldots,n$.

DEFINISI 6

Transpose dari matriks $A=[a_{ij}]$ adalah $A^T= [a_{ji}]$ yaitu matriks yang diperoleh dengan menukar baris ke-i menjadi kolom ke-i.

DEFINISI 7

Matriks simetris adalah matriks yang transpose-nya adalah matriks itu sendiri.
Jadi $A=A^T$ atau $[a_{ij}] = [a_{ji}]$.

DEFINISI 8

Matriks bujur sangkar adalah suatu matriks dimana banyaknya baris sama dengan banyaknya kolom. Elemen-elemen $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ disebut diagonal utama dari matriks bujursangkar A.

DEFINISI 9

Matriks nol adalah matriks yang semua elemennya nol.

DEFINISI 10

Matriks diagonal adalah matriks bujursangkar yang semua elemen di luar diagonal utamanya sama dengan nol.

Jadi $A=[a_{ij}]$ adalah matriks diagonal jika $a_{ij}=0$ untuk $i \neq j$.

DEFINISI 11

Matriks satuan adalah matriks diagonal yang elemen-elemen diagonal utamanya sama dengan 1.

Jadi $A=[a_{ij}]$ adalah matriks satuan jika untuk $i=j$, $a_{ij}=1$ dan $a_{ij}=0$ untuk $i \neq j$.

Penjumlahan matriks hanya berlaku untuk matriks-matriks yang berukuran sama. Jika $A=[a_{ij}]$ dan $B=[b_{ij}]$ adalah matriks-matriks yang berukuran sama, maka A+B adalah suatu matriks $C=[c_{ij}]$ di mana $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, untuk setiap i dan j.

Pengurangan matriks B dari matriks A adalah menjumlahkan matriks A dengan matriks -B.

Perkalian matriks A dengan skalar α diperoleh matriks $\alpha A = [\alpha a_{ij}]$, dengan kata lain matriks αA diperoleh dengan mengalikan semua elemen matriks A dengan α.

Pada umumnya matriks tidak komutatif terhadap operasi perkalian : $AB \neq BA$. Syarat perkalian matriks adalah banyaknya kolom matriks pertama sama dengan banyaknya baris matriks kedua.

Selanjutnya, untuk memahami definisi 12 dan definisi 13 berikut, dimohon pembaca untuk memahami dulu bagian II.3.

DEFINISI 12

Matriks bujursangkar A disebut definit positip jika untuk setiap vektor $\mathbb{X} \neq 0$ berlaku $\mathbb{X}^T A\mathbb{X}>0$. Disebut semi definit positip jika untuk setiap vektor $\mathbb{X} \neq 0$ berlaku $\mathbb{X}^T A\mathbb{X}\geq 0$ dan ada sedikitnya satu vektor $\mathbb{X}$ yang tidak nol sehingga $\mathbb{X}^T A\mathbb{X}=0$.

DEFINISI 13

Matriks bujursangkar A disebut definit negatip jika untuk setiap vektor $\mathbb{X} \neq 0$ berlaku $\mathbb{X}^T A\mathbb{X}<0$. Disebut semidefinit negatip jika untuk setiap vektor $\mathbb{X} \neq 0$ berlaku $\mathbb{X}^T A\mathbb{X}\leq 0$ dan ada sedikitnya satu vektor $\mathbb{X}$ yang tidak nol sehingga $\mathbb{X}^T A\mathbb{X}=0$.

II.3. VEKTOR DAN RUANG VEKTOR

Pada bab ini, diharapkan pembaca sudah memahami pengertian vektor baik di ruang berdimensi 2 maupun di ruang berdimensi 3, dimana secara geometris vektor dinyatakan sebagai segmen garis yang berarah. Walaupun pemahaman kita secara visualisasi geometris hanya sampai pada ruang berdimensi 3, dalam kehidupan sehari-hari kita dapat memperluas hingga melebihi ruang berdimensi 3 dengan bekerja pada sifat analitis atau sifat numeris titik dan vektor, bukan pada sifat geometrisnya. Jadi pemahaman kita harus secara abstrak.

DEFINISI 14

Jika n adalah sebuah bilangan bulat positif, maka *n-tupel-terorde* adalah sebuah urutan n bilangan riil $(a^1, a^2, \ldots, a^n)$.

Bila n=2, (a^1, a^2) kita namakan pasangan-terorde, dan bila n=3, (a^1, a^2, a^3) kita namakan tripel-terorde. Pemahaman kita pada ruang berdimensi 3, tripel-terorde (a^1, a^2, a^3) secara geometris mempunyai dua tafsiran yang berbeda, yaitu dapat ditafsirkan sebagai titik (dalam kasus mana a^1, a^2, a^3 adalah koordinat) atau dapat ditafsirkan sebagai vektor (dalam kasus mana a^1, a^2, a^3 adalah komponen-komponen). Maka jelaslah bahwa n-tupel-terorde $(a^1, a^2, \ldots, a^n)$ dapat ditinjau baik sebagai "titik yang digeneralisasi" maupun sebagai "vektor yang digeneralisasi", di mana secara analitis perbedaannya tidak penting. Jadi kita bebas menggambarkan n-tupel-terorde $(a^1, a^2, \ldots, a^n)$ baik sebagai titik maupun sebagai vektor di dalam ruang berdimensi-n.

DEFINISI 15

Dua vektor $\mathbb{X}=(x^1,x^2,\ldots,x^n)$ dan $\mathbb{Y}=(y^1,y^2,\ldots,y^n)$ dikatakan sama jika setiap komponen yang bersesuaian letaknya sama.

DEFINISI 16

Penjumlahan dua buah vektor $\mathbb{X}=(x^1,x^2,\ldots,x^n)$ dan $\mathbb{Y}=(y^1,y^2,\ldots,y^n)$ adalah sebuah vektor dimana komponen-komponennya diperoleh dari penjumlahan komponen-komponen vektor $\mathbb{X}$ dan $\mathbb{Y}$ yang bersesuaian.

DEFINISI 17

Perkalian vektor $\mathbb{X}$ dengan skalar $\alpha \in R$ adalah sebuah vektor yang komponennya diperoleh dari perkalian komponen vektor $\mathbb{X}$ dengan skalar α.

Operasi penjumlahan dan perkalian skalar dalam definisi di atas dinamakan *operasi baku* .

DEFINISI 18

Vektor nol (*zero vektor*) didefinisikan sebagai vektor $\mathbb{O} = (0,0,\ldots.0)$.

DEFINISI 19

Pengurangan vektor $\mathbb{Y}=(y^1,y^2,\ldots\ldots,y^n)$ dari vektor $\mathbb{X}=(x^1,x^2,\ldots,x^n)$ didefinisikan sebagai penjumlahan vektor $\mathbb{X}$ dengan vektor $-\mathbb{Y}$.

DEFINISI 20

Ruang R^n disebut ruang vektor atas R jika untuk setiap vektor $\mathbb{X}=(x^1,x^2,\ldots,x^n)$, $\mathbb{Y}=(y^1,y^2,\ldots,y^n)$ $\in R^n$ dan untuk semua $\alpha \in R$ berlaku :

1. $\mathbb{X}\pm\mathbb{Y} = (x^1 \pm y^1, x^2 \pm y^2, \ldots, x^n + y^n) \in R^n$
2. $\alpha\mathbb{X} = (\alpha x^1, \alpha x^2, \ldots, \alpha x^n) \in R^n$

DEFINISI 21

Hasil kali dalam dari dua vektor $\mathbb{X} = (x^1,x^2,\ldots,x^n)$, $\mathbb{Y} = (y^1,y^2,\ldots,y^n) \in R^n$ didefinisikan sebagai : $\mathbb{X}.\mathbb{Y} = x^1.y^1 + x^2.y^2 + \ldots + x^n.y^n$

DEFINISI 22

Norma atau panjang dari vektor $\mathbb{X}\in R^n$ adalah :

$$\|\mathbb{X}\| = (\mathbb{X}.\mathbb{X})^{1/2}$$

$$= (x^1.x^1 + x^2.x^2 + \ldots + x^n.x^n)^{1/2}$$

$$= \left\{ \sum_{j=1}^{n} (x^j)^2 \right\}^{1/2}$$

Kita sudah lazim menyebutkan R^n dengan operasi penjumlahan/pengurangan, perkalian skalar dan hasil kali dalam yang telah kita definisikan di atas sebagai *Ruang-n Euklidis.*

Selanjutnya akan diperkenalkan penggunaan notasi matriks untuk menyatakan vektor $\mathbb{X},\mathbb{Y}\in R^n$:

$$\mathbb{X} = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} \qquad \mathbb{Y} = \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^n \end{bmatrix}$$

Hal ini dibenarkan karena operasi-operasi matriks :

$$\mathbb{X}+\mathbb{Y} = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^1 + y^1 \\ x^2 + y^2 \\ \vdots \\ x^n + y^n \end{bmatrix}$$

dan

$$\alpha\mathbb{X} = \alpha \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\ x^1 \\ \alpha\ x^2 \\ \vdots \\ \alpha\ x^n \end{bmatrix}$$

hasilnya akan sama seperti pada operasi-operasi vektor. Untuk hasil kali dalam, jika kita menggunakan notasi matriks untuk vektor, dan menghilangkan tanda kurung siku pada matriks hasil, maka dapat ditulis :

$$\mathbb{X}^T.\mathbb{Y} = [x^1, x^2, \ldots, x^n] \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^n \end{bmatrix}$$

$$= [x^1y^1 + x^2y^2 + \ldots + x^ny^n]$$

$$= [\mathbb{X}.\mathbb{Y}] = \mathbb{X}.\mathbb{Y}$$

DEFINISI 23

Persekitaran dari titik $\mathbb{X} \in R^n$, dinotasikan dengan $N(\mathbb{X},\varepsilon)$, didefinisikan sebagai :
$N(\mathbb{X},\varepsilon) = \{\mathbb{Y} \in R^n : \|\mathbb{Y}-\mathbb{X}\| < \varepsilon\}$ untuk suatu $\varepsilon > 0$.

Jadi dalam R, $N(\mathbb{X},\varepsilon)$ adalah selang terbuka dengan pusat $\mathbb{X}$ dan jari-jari ε.

Dalam R^2, $N(\mathbb{X},\varepsilon)$ adalah sebuah lingkaran terbuka dengan pusat $\mathbb{X}$ dan jari-jari ε.

Dalam R^3, $N(\mathbb{X},\varepsilon)$ adalah sebuah bola terbuka dengan pusat $\mathbb{X}$ dan jari-jari ε.

Dalam R^n penggambaran secara geometris sangat sulit. Untuk itu kita sebut saja $N(\mathbb{X},\varepsilon)$ adalah sebuah bola terbuka dengan pusat $\mathbb{X}$ dan jari-jari ε.

DEFINISI 24

Titik $\mathbb{X}$ adalah titik interior dari $A \subset R^n$ jika setiap persekitaran dari $\mathbb{X}$ termuat dalam A.
Himpunan semua titik interior dari A ditulis A^o.

Jika setiap titik dari A adalah titik interior, maka A dikatakan terbuka.

DEFINISI 25

Titik X adalah titik batas dari $A \subset R^n$ jika setiap persekitaran dari X memuat paling sedikit satu titik dari A dan satu titik di luar A.

Himpunan semua titik batas dari A disebut boundary dari A dan ditulis *bnd*(A).

Jika semua titik batas dari A terletak pada A, maka A tertutup .

DEFINISI 26

Himpunan $A \subset R^n$ disebut terbatas jika terdapat bilangan $c \in R$ sedemikian sehingga $\|X\| \le c$ untuk setiap $X \in A$.

DEFINISI 27

Suatu barisan titik $\{X_k\} = \{X_k : k \in N\} \subset R^n$ adalah range dari suatu fungsi yang domainnya bilangan asli N = {1,2,...}. Titik X_k yang merupakan bayangan dari $k \in N$ disebut suku barisan ke-k.

Jadi $\{X_k\}$ adalah barisan titik-titik $X_1, X_2, \ldots\ldots X_k$. Sub barisan dari $\{X_k\}$ dinyatakan dengan $\{X_{k_j}\}$, dimana $j = 1, 2, \ldots\ldots$

DEFINISI 28

Barisan $\{X_k\} \subset R^n$ mempunyai limit X^* jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $k(\varepsilon)$ sedemikian sehingga untuk semua $k \ge k(\varepsilon)$: $\|X_k - X^*\| < \varepsilon$.

Jika sebuah barisan mempunyai limit, digunakan notasi $\lim_{k\to\infty} X_k = X^*$ dan barisan tersebut dikatakan konvergen.

DEFINISI 29

Titik $\hat{X} \in R^n$ disebut titik limit dari barisan $\{X_k\}$ jika terdapat sub barisan $\{X_{k_j}\}$ dari $\{X_k\}$ sedemikian sehingga $\lim_{k_j\to\infty} X_{k_j} = \hat{X}$.

II.4. FUNGSI DAN DERIVATIF FUNGSI

Metode penyelesaian masalah optimasi bergantung pada kemampuannya menggunakan informasi tentang suatu fungsi pada titik tertentu untuk analisis kelakuannya secara umum. Informasi tersebut berpusat pada sifat kekontinuan dan diferensiabilitas fungsi. Berikut ini akan dibahas mengenai fungsi bernilai riil, yaitu korespondensi yang menghubungkan setiap elemen $X \in K \subseteq R^n$ dengan satu elemen $y \in R$.

DEFINISI 30

Misal $f(X)$ adalah fungsi bernilai riil yang didefinisikan untuk semua X dalam himpunan $K \subseteq R^n$, dan misal $X_0 \in K$. Jika ℓ adalah sebuah bilangan riil dengan sifat :

untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta(\varepsilon) > 0$ sedemikian sehingga jika $\|X - X_0\| \le \delta(\varepsilon)$ maka $|f(X) - \ell| < \varepsilon$,

ℓ disebut limit $f(X)$ untuk X mendekati X_0, dan ditulis $\ell = \lim_{X \to X_o} f(X)$.

DEFINISI 31

Jika pada titik $X_o \in K \subseteq R^n$:

i) $f(X_o)$ terdefinisikan.

ii) $\lim_{X \to X_o} f(X)$ ada

iii) $\lim_{X \to X_o} f(X) = f(X_o)$

maka $f(X)$ kontinu pada X_o.

Jika $f(X)$ kontinu pada setiap titik $X \in K$, maka $f(X)$ kontinu pada K, dan ditulis $f(X) \in C$ pada K.

DEFINISI 32

Infimum dari sebuah fungsi bernilai riil $f(X)$ yang didefinisikan pada himpunan $K \subseteq R^n$ adalah bilangan riil δ sedemikiansehingga $f(X) \geq \delta$ untuk semua $X \in K$ dan jika diberikan $\delta > 0$, maka $f(X) < \delta + \delta$.

Kita tulis $\inf_{X \in K} f(X) = \delta$.

DEFINISI 33

Jika terdapat $X^* \in K \subseteq R^n$ sedemikian sehingga $f(X^*) \leq f(X)$ untuk semua $X \in K$, maka $f(X^*)$ disebut nilai minimum atau global minimum dari $f(X)$.

Kita tulis $f(X^*) = \min_{X \in K} f(X)$.

DEFINISI 34

Jika terdapat $\hat{X} \in K \subseteq R^n$ sedemikian sehingga $f(\hat{X}) \leq f(X)$ untuk setiap $x \in \{x \in K : \|X - \hat{X}\| < \varepsilon,\ \varepsilon > 0\}$, maka $f(\hat{\mathbb{X}})$ disebut lokal minimum dari $f(\mathbb{X})$.

Perbedaan antara infimum dan nilai minimum sebuah fungsi dapat dijelaskan dari ilustrasi berikut.

Misal $\mathbb{X}\in R$ dan $f(\mathbb{X})=2x + 1$, dengan syarat $\mathbb{X}>0$

$\inf\limits_{\mathbb{X}>0} f(\mathbb{X})$ adalah sama dengan satu, tetapi

$\min\limits_{\mathbb{X}>0} f(\mathbb{X})$ tidak ada, karena $\mathbb{X}=0$ tidak termasuk, tidak ada titik dengan nilai fungsi =1.

Contoh lain misal :

$$f(\mathbb{X})=\begin{cases} x, & x>0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$$

Maka $\inf\limits_{x\geq 0} f(\mathbb{X})=0$, tetapi minimumnya tidak ada karena $f(\mathbb{X})$ diskontinu.

Selain sifat kekontinuan fungsi, informasi yang diperlukan yaitu sifat diferensiabilitas fungsi.

DEFINISI 35

Misal $e_j\in R^n$ adalah sebuah vektor dengan semua elemen sama dengan nol kecuali pada posisi ke j sama dengan satu; dan $f(\mathbb{X})$ adalah fungsi bernilai riil yang didefinisikan dalam himpunan $K\subseteq R^n$.

Derivatif parsiil pertama $f(\mathbb{X})$ terhadap x^j pada titik $\mathbb{X}_o$ adalah :

$$\frac{\partial f(\mathbb{X}_o)}{\partial x^j} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(\mathbb{X}_o + e_j\varepsilon) - f(\mathbb{X}_o)}{\varepsilon}$$ jika limit ini ada. Jika untuk semua $\mathbb{X}\in K\subseteq R^n$ dan semua

$j=1,2,\ldots n$, $\dfrac{\partial f(\mathbb{X}_o)}{\partial x^j}$ ada dan kontinu, maka $f(\mathbb{X})$ dikatakan kontinu diferensiabel pada K dan ditulis $f(\mathbb{X}) \in C^1$ pada K.

DEFINISI 36

Misal $f(\mathbb{X}) \in C^1$ pada K dan $\mathbb{X}_o \in K \subseteq R^n$. Jika:

$$\frac{\partial^2 f(\mathbb{X}_o)}{\partial x^j \partial x^i} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\partial f(\mathbb{X}_o + e_i \varepsilon)/\partial x^j - \partial f(\mathbb{X}_o)/\partial x^j}{\varepsilon}$$

ada, limit ini disebut derivatif parsiil kedua terhadap x^j dan x^i dari $f(\mathbb{X})$ pada titik $\mathbb{X}_o$. Jika untuk semua $\mathbb{X} \in K$, semua $j=1,2,\ldots,n$ dan semua $i=1,2,\ldots,n$ derivatif parsiil keduanya ada, maka $f(\mathbb{X})$ dikatakan kontinu diferensiabel tingkat dua pada K dan dinotasikan $f(\mathbb{X}) \in C^2$.

DEFINISI 37

Jika $f(\mathbb{X}) \in C^1$ pada $K \subseteq R^n$, maka :

$$\nabla f(\mathbb{X}_o) = \left[\frac{\partial f(\mathbb{X}_o)}{\partial x^1} \ \ldots\ldots \ \frac{\partial f(\mathbb{X}_o)}{\partial x^n} \right]$$ disebut gradien $f(\mathbb{X})$ pada titik $\mathbb{X}_o$.

DEFINISI 38

Jika $f \in C^2$ pada K, maka matriks Hessian dari $f(\mathbb{X})$ pada titik $\mathbb{X}_o$ ditulis $H(\mathbb{X}_o)$, didefinisikan sebagai :

$$
H(X_o) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f(X_o)}{\partial x^i \partial x^i} & \cdots\cdots\cdots & \dfrac{\partial^2 f(X_o)}{\partial x^i \partial x^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f(X_o)}{\partial x^n \partial x^i} & \cdots\cdots\cdots & \dfrac{\partial^2 f(X_o)}{\partial x^n \partial x^n} \end{bmatrix}
$$

II.5. TINJAUAN TENTANG METODE ITERASI

Salah satu masalah dalam penggunaan metode fungsi rintangan logaritmik adalah bagaimana mencari akar riil dari suatu persamaan taklinier berderajat satu. Misalkan persamaan tersebut adalah $F(\alpha)=0$. Ada kalanya kita dapat memperoleh akar yang cermat dari persamaan tersebut, sebagai contoh, akan kita dapatkan jika $F(\alpha)$ suatu polinom yang dapat difaktorkan. Akan tetapi secara umum, yang kita harapkan hanyalah memperoleh penyelesaian yang mendekati harga yang sebenarnya saja. Jadi "penyelesaian pendekatan" itu dapat berarti suatu titik α^* yang memenuhi $F(\alpha)=0$ "menurut pendekatan", yaitu dimana $|F(\alpha)|$ "kecil", atau suatu titik α^* yang "berdekatan" dengan penyelesaian dari $F(\alpha)=0$.

Teknik numeris untuk mendapatkan penyelesaian pendekatan itu dinamakan metode iterasi. Berbagai metode iterasi dapat digunakan untuk mendapatkan penyelesaian tersebut, dan pada skripsi ini penulis menggunakan metode iterasi Newton yang mana fungsi iterasinya berbentuk :

$$q(\alpha) = \alpha - \frac{F(\alpha)}{F'(\alpha)}$$

dengan rumus iterasi :

$$\alpha_{n+1} = q(\alpha_n) \qquad \text{atau}$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{F(\alpha_n)}{F'(\alpha_n)}$$

Kita membahas secara terinci metode iterasi Newton ini pada bab III.

II.6. KONVEKSITAS

Dalam membahas metode fungsi rintangan logaritmik, selain kekontinuan dan diferensiabilitas suatu fungsi, informasi lain yang diperlukan adalah konveksitas (kecembungan) suatu fungsi.

DEFINISI 39

Himpunan $K \subseteq R^n$ disebut himpunan konvek (cembung) jika untuk setiap dua titik $\mathbb{X}, \mathbb{Y} \in K$ maka titik-titik :

$\mathbb{Z} = \lambda\mathbb{X} + (1-\lambda)\mathbb{Y}$, $0 \le \lambda \le 1$, juga terletak pada K.

THEOREMA 1

Interseksi sejumlah berhingga himpunan konvek adalah juga konvek.

Bukti :

Misal K_i (i=1,...m) adalah koleksi himpunan konvek. Interseksinya adalah $K = \bigcap_{i=1}^{m} K_i$.

Jika K berisi satu titik, maka theorema benar. Anggap $\mathbb{X}$ dan $\mathbb{Y}$ dua titik sembarang dalam K. Maka dari definisi interseksi himpunan, kedua titik tersebut terletak dalam setiap K_i. Karena setiap K_i adalah konvek, $\lambda\mathbb{X} + (1-\lambda)\mathbb{Y}$ terletak dalam setiap K_i untuk semua $0\le\lambda\le1$, sehingga juga terletak dalam interseksinya. Jadi terbukti K konvek.

DEFINISI 40

Fungsi $f(\mathbb{X})$ disebut konvek pada himpunan konvek K jika untuk sembarang titik $\mathbb{X},\mathbb{Y}\in K$, maka : $f(\lambda\mathbb{X} + (1-\lambda)\mathbb{Y}) \le \lambda f(\mathbb{X}) + (1-\lambda)f(\mathbb{Y})$, untuk semua $0\le\lambda\le1$.

Fungsi $f(\mathbb{X})$ disebut konkaf jika $-f(\mathbb{X})$ konveks.

THEOREMA 2

Misal $K\subseteq R^n$ adalah himpunan titik-titik yang memenuhi $g(\mathbb{X})\ge0$.

Jika $g(\mathbb{X})$ konkaf, maka K konvek.

Bukti :

Ambil $\mathbb{X},\mathbb{Y}\in K$, sehingga $g(\mathbb{X})\ge0$ dan $g(\mathbb{Y})\ge0$.

Misal $\mathbb{Z} = \lambda\mathbb{X} + (1-\lambda)\mathbb{Y}$ untuk semua $0\le\lambda\le1$.

Karena g konkaf maka :

$$g(\mathbb{Z}) \ge \lambda g(\mathbb{X}) + (1-\lambda)g(\mathbb{Y})$$

Karena $g(\mathbb{X})\ge0$ dan $g(\mathbb{Y})\ge0$ maka $g(\mathbb{Z})\ge0$.

Jadi $\mathbb{Z}$ juga terletak pada K. Terbukti K konvek.

THEOREMA 3

Fungsi f adalah fungsi konvek pada himpunan konvek K jika $f(\mathbb{X}) \geq f(\mathbb{Y}) + (\mathbb{X}-\mathbb{Y})^T \nabla f(\mathbb{Y})$ untuk setiap $\mathbb{X},\mathbb{Y} \in K$.

Bukti :

Andaikan bahwa f adalah fungsi konvek.
Maka , untuk $0 \leq \lambda \leq 1$:

$$\lambda f(\mathbb{X}) + (1-\lambda) f(\mathbb{Y}) \geq f(\lambda \mathbb{X} + (1-\lambda)\mathbb{Y})$$

$$\lambda f(\mathbb{X}) - \lambda f(\mathbb{Y}) \geq f(\lambda \mathbb{X} + (1-\lambda)\mathbb{Y}) - f(\mathbb{Y})$$

$$f(\mathbb{X}) - f(\mathbb{Y}) \geq \frac{f(\lambda(\mathbb{X}-\mathbb{Y}) + \mathbb{Y}) - f(\mathbb{Y})}{\lambda}$$

Ambil limit $\lambda \to 0$, didapat :

$$f(\mathbb{X}) - f(\mathbb{Y}) \geq (\mathbb{X}-\mathbb{Y})^T \nabla f(\mathbb{Y}), \text{ atau :}$$

$$f(\mathbb{X}) \geq f(\mathbb{Y}) + (\mathbb{X}-\mathbb{Y})^T \nabla f(\mathbb{Y}).$$

THEOREMA 4

Fungsi $f(\mathbb{X})$ konvek pada himpunan konvek K jika hanya jika untuk setiap $\mathbb{X} \in K$ dan $\mathbb{Y} \in R^n$ maka :

$$\mathbb{Y}^T \nabla^2 f(\mathbb{X}) \mathbb{Y} \geq 0.$$

Bukti :

(i). Ambil $\mathbb{X} \in K$ dan $\mathbb{Y} \in R^n$.

Assumsikan bahwa t adalah suatu skalar sedemikian sehingga $\mathbb{X}+t\mathbb{Y}\in K$.

Ekspansi menurut deret Taylor :

$$f(\mathbb{X}+t\mathbb{Y}) = f(\mathbb{X}) + t\mathbb{Y}^T\nabla f(\mathbb{X}) + 1/2t^2\mathbb{Y}^T\nabla^2 f(\mathbb{X}+\lambda t\mathbb{Y})\mathbb{Y},$$

untuk suatu $\lambda(0\leq\lambda\leq1)$.

Karena $\mathbb{X}$ dan $\mathbb{X}+t\mathbb{Y}$ pada K maka menurut Theorema 3 $f(\mathbb{X}+t\mathbb{Y}) \geq f(\mathbb{X}) + t\mathbb{Y}^T\nabla f(\mathbb{X})$.

Sehingga :

$$1/2\ t^2\mathbb{Y}^T\nabla^2 f(\mathbb{X}+\lambda t\mathbb{Y})\mathbb{Y} \geq 0.$$

Dibagi dengan $1/2t^2$ dan ambil limit $t\to0$ didapat $\mathbb{Y}^T\nabla^2 f(\mathbb{X})\mathbb{Y} \geq 0$.

(ii). Sekarang, andaikan $\mathbb{Y}^T\nabla^2 f(\mathbb{X})\mathbb{Y} \geq 0$.

Ambil $\mathbb{X},\mathbb{Y}\in K$.

Expansi menurut deret Taylor :

$$f(\mathbb{Y})=f(\mathbb{X})+ (\mathbb{Y}-\mathbb{X})^T\nabla f(\mathbb{X}) + 1/2(\mathbb{Y}-\mathbb{X})^T\nabla^2 f(\mathbb{X}+\lambda\mathbb{Y})(\mathbb{Y}-\mathbb{X})$$

untuk suatu $\lambda(0\leq\lambda\leq1)$.

Karena matriks Hessian definit positif, maka apabila diambil $\lambda\to0$, didapat :

$f(\mathbb{Y}) \geq f(\mathbb{X}) + (\mathbb{Y}-\mathbb{X})^T\nabla f(\mathbb{X})$, dimana menurut Theorema 3 adalah fungsi konvek.

THEOREMA 5

Jika fungsi-fungsi $g_i(\mathbb{X})$ $i=1,\ldots,m$ konkaf pada himpunan konvek K, maka $\sum_{i=1}^{m} g_i(\mathbb{X})$ juga konkaf.

Bukti :

Ambil titik $\mathbb{X},\mathbb{Y}\in K$.

Karena g_i konkaf maka :

$g_i(\lambda \mathbb{X} + (1-\lambda)\mathbb{Y}) \geq \lambda g_i(\mathbb{X}) + (1-\lambda) g_i(\mathbb{Y})$ untuk semua $0 \leq \lambda \leq 1$.

Sehingga :

$$\sum_{i=1}^{m} g_i(\lambda \mathbb{X} + (1-\lambda)\mathbb{Y}) \geq \sum_{i=1}^{m} \left[\lambda g_i(\mathbb{X}) + (1-\lambda) g_i(\mathbb{Y}) \right]$$

$$\geq \lambda \sum_{i=1}^{m} g_i(\mathbb{X}) + (1-\lambda) \sum_{i=1}^{m} g_i(\mathbb{Y})$$

Jadi $\sum_{i=1}^{m} g_i(\mathbb{X})$ juga konkaf.

THEOREMA 6

Jika $g(\mathbb{X})$ konkaf atas himpunan konvek $K \subseteq R^n$ yang memenuhi $g(\mathbb{X}) \geq 0$, maka $\ln g(\mathbb{X})$ adalah juga fungsi konkaf.

Bukti :

Karena K konvek, maka jika $\mathbb{X}, \mathbb{Y} \in K$, $\mathbb{Z}$ juga dalam K, dimana $\mathbb{Z} = \lambda \mathbb{X} + (1-\lambda)\mathbb{Y}$, $0 \leq \lambda \leq 1$.

Jika $g(\mathbb{X})$ konkaf, maka :

$$g(\mathbb{Z}) \geq \lambda g(\mathbb{X}) + (1-\lambda) g(\mathbb{Y})$$

Untuk membuktikan $\ln g(\mathbb{X})$ konkaf, harus dibuktikan $\ln g(\mathbb{Z}) \geq \lambda \ln g(\mathbb{X}) + (1-\lambda) \ln g(\mathbb{Y})$.

Ditinjau :

$\lambda \ln g(\mathbb{X}) + (1-\lambda) \ln g(\mathbb{Y})$

$$= \ln (g(\mathbb{X}))^{\lambda} + \ln (g(\mathbb{Y}))^{1-\lambda}$$

$$= \ln \left[(g(\mathbb{X}))^{\lambda} . \ln (g(\mathbb{Y}))^{1-\lambda} \right]$$

Karena $g(\mathbb{X}) \geq 0$ dan $0 \leq \lambda \leq 1$,

$$\leq \ln \left[\lambda g(\mathbb{X}) + (1-\lambda) \ln g(\mathbb{Y}) \right]$$

$\leq \ln g(\mathbb{Z})$

Jadi $\ln g(\mathbb{X})$ konkaf.

THEOREMA 7

Jika $f(\mathbb{X})$ fungsi konvek pada $K \subseteq R^n$ maka lokal minimum dari $f(\mathbb{X})$ adalah juga merupakan global minimum.

Bukti :

Jika $\hat{\mathbb{X}}$ lokal minimum dari $f(\mathbb{X})$ maka

$$f(\mathbb{X}) \geq f(\hat{\mathbb{X}})$$

untuk semua $\mathbb{X}$ dalam persekitaran dari $\hat{\mathbb{X}}$.

Ambil titik $\mathbb{Z} \in K$.

Maka $(1-\lambda)\hat{\mathbb{X}} + \lambda\mathbb{Z}$ terletak pada persekitaran dari $\hat{\mathbb{X}}$ untuk λ yang kecil, $0 \leq \lambda \leq 1$.

Sehingga :

$$f((1-\lambda)\hat{\mathbb{X}} + \lambda\mathbb{Z}) \geq f(\hat{\mathbb{X}}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Dan karena f adalah fungsi konvek, maka :

$$(1-\lambda)f\hat{\mathbb{X}} + \lambda f(\mathbb{Z}) \geq f((1-\lambda)\hat{\mathbb{X}} + \lambda\mathbb{Z}) \quad \ldots\ldots(2)$$

Dari dua persamaan di atas didapat :

$$f(\mathbb{Z}) \geq f(\hat{\mathbb{X}})$$

Jadi $\hat{\mathbb{X}}$ adalah global minimum.