

## BAB II MATERI PENUNJANG

### 2.1. DETERMINAN

#### Definisi 2.1.1

Matriks merupakan kumpulan bilangan-bilangan yang disusun secara empat persegi panjang dan diatur dalam baris dan kolom.

Pemberian nama pada matriks ditulis dengan huruf besar. Skalar-skalar pada matriks  $A = (a_{ij})$  disebut elemen-elemen matriks, ditulis  $a_{ij}$  yaitu elemen matriks  $A$  baris ke- $i$  kolom ke- $j$ . Ukuran matriks yang disebut sebagai ordo matriks menyatakan banyaknya baris dan banyaknya kolom.

#### Definisi 2.1.2

Matriks bujur sangkar berordo  $(n \times n)$  disebut matriks identitas  $I(n \times n)$ , jika semua elemennya nol kecuali elemen-elemen pada baris ke- $i$  kolom ke- $i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) adalah 1.

#### Definisi 2.1.3

Inversi dari suatu permutasi adalah terdapatnya bilangan yang lebih besar mendahului bilangan yang lebih kecil, atau  $j_i > j_k$  untuk  $i < k$ .

#### Definisi 2.1.4

Jika jumlah inversi dari suatu permutasi adalah genap, maka disebut permutasi genap dan bila jumlah inversinya ganjil maka disebut permutasi ganjil.

#### Contoh 2.1.1

Pada permutasi (2,3,4,5,1) terdapat 4 inversi, yaitu : 2 mendahului 1, 3 mendahului 1, 4 mendahului 1 dan 5 mendahului 1. Karena jumlah inversinya genap, maka permutasi (2,3,4,5,1) disebut permutasi genap.

#### Definisi 2.1.5

Determinan dari matriks bujur sangkar  $A$  berordo  $n$  adalah jumlah dari semua  $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$  hasil kali bertanda dari elemen-elemen matriks tersebut dengan kata lain

$$\det A = |A| = \sum_{\sigma} (j_1, j_2, \dots, j_n) a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \dots \cdot a_{nj_n}$$

dengan :

$$j_1, j_2, \dots, j_n = \text{permutasi}$$

$$\sigma (j_1, j_2, \dots, j_n) = + ; \text{ bila permutasi genap}$$

$$= - ; \text{ bila permutasi ganjil}$$

$$a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \dots \cdot a_{nj_n} = \text{perkalian elemen-elemen}$$

matriks

Contoh : 2.1.2

Diberikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

terdapat  $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$  permutasi

Permutasi	Banyak inversi	Permutasi	Banyak inversi
1, 2, 3	0	3, 2, 1	3
2, 3, 1	2	1, 3, 2	1
3, 1, 2	2	2, 1, 3	1

$$\begin{aligned} \text{Determinan } A = |A| &= \sum (j_1 \cdot j_2 \cdot j_3) \cdot a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot a_{3j_3} \\ &= (1 \cdot 2 \cdot 0) + (0 \cdot 0 \cdot 3) + (3 \cdot 2 \cdot 1) - (3 \cdot 2 \cdot 3) \\ &\quad - (1 \cdot 0 \cdot 1) - (0 \cdot 2 \cdot 0) \\ &= -12 \end{aligned}$$

Sifat-sifat determinan

1.  $\det A = \det A^T$  ;  $A^T$  adalah matriks transpose dari A
2. Tanda determinan berubah jika 2 baris/kolom ditukar tempatnya.
3. Matriks yang mempunyai baris / kolom nol mempunyai determinan nol.

## 2.2. KOFAKTOR

### Definisi 2.2.1

$A = [a_{ij}]$  adalah matriks bujursangkar berordo  $(n \times n)$   
 Minor dari elemen  $a_{ij}$  ditulis  $|M_{ij}|$ ,  $M_{ij}$  adalah sub  
 matriks dari  $A$  yang berordo  $(n-1) \times (n-1)$  yang  
 diperoleh dengan menghilangkan elemen-elemen baris  
 ke- $i$  dan elemen-elemen kolom ke- $j$  pada matriks  $A$ .

### Contoh 2.2.1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \text{ maka } M_{13} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Minor dari elemen } a_{13} &= |M_{13}| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (2 \cdot 1) - (2 \cdot 3) \\ &= -4 \end{aligned}$$

### Definisi 2.2.2

$A = [a_{ij}]$  adalah matriks bujursangkar berordo  $(n \times n)$   
 Kofaktor dari elemen  $a_{ij}$  ditulis sebagai  $\Delta_{ij}$ ,  
 dimana  $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$

### Contoh 2.2.2

$$\begin{aligned} \text{Kofaktor dari elemen } a_{13} \text{ dari matriks pada contoh} \\ \text{2.2.1 di atas adalah : } \Delta_{13} &= (-1)^{1+3} |M_{13}| \\ &= (-1)^4 \cdot -4 \\ &= -4 \end{aligned}$$

## Teorema 2.2.1

Determinan suatu matriks  $A$  dapat diperoleh dengan menjumlahkan perkalian elemen-elemen dari sebarang baris/kolom dengan kofaktor-kofaktornya.

Dapat ditulis sebagai :

$$|A| = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot \Delta_{ij} = a_{i1} \cdot \Delta_{i1} + a_{i2} \cdot \Delta_{i2} + \dots + a_{in} \cdot \Delta_{in}$$

merupakan ekspansi baris ke- $i$  dengan  $i$  sebarang.

Dapat pula ditulis sebagai :

$$|A| = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot \Delta_{ij} = a_{1j} \cdot \Delta_{1j} + a_{2j} \cdot \Delta_{2j} + \dots + a_{nj} \cdot \Delta_{nj}$$

merupakan ekspansi kolom ke- $j$  dengan  $j$  sebarang.

Bukti :

Misalkan  $|A| = a_{i1} \cdot \Delta_{i1}^* + a_{i2} \cdot \Delta_{i2}^* + \dots + a_{in} \cdot \Delta_{in}^*$ ,

dimana  $\Delta_{ij}^*$  adalah jumlah hasil kali elemen-elemen, tidak termasuk elemen pada baris ke- $i$ .

Tinggal dibuktikan bahwa  $\Delta_{ij}^* = \Delta_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$ ,

dimana  $M_{ij}$  adalah submatrik dari  $A$  dengan menghilangkan baris ke- $i$  dan kolom ke- $j$  dari  $A$ .

Maka :

$$\begin{aligned} a_{nn} \cdot \Delta_{nn}^* &= a_{nn} \sum \sigma(j_1, j_2, \dots, j_{n-1}) a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \dots a_{n-1j_{n-1}} \\ &= a_{nn} |M_{nn}| \end{aligned}$$

Jadi  $\Delta_{nn}^* = |M_{nn}| = (-1)^{n+n} |M_{nn}|$ , sekarang pandang baris ke- $i$  dan kolom ke- $j$  sebarang. Kita tukarkan berturut-turut baris ke- $i$  sampai pada baris ke- $n$ , maka ada  $(n-1)$  kali pertukaran.

Juga kita pertukarkan berturut-turut kolom ke- $j$  sampai pada kolom ke- $n$ , maka ada  $(n-j)$  kali pertukaran.

Sehingga dari sifat-sifat determinan, tanda  $\Delta_{ij}^*$  akan bertukar  $(n-1)+(n-j)$  kali, sedangkan harga  $|M_{ij}|$  tetap.

$$\begin{aligned} \text{Jadi } \Delta_{ij}^* &= (-1)^{2n-i-j} |M_{ij}| \\ &= (-1)^{-(i+j)} |M_{ij}| \\ &= (-1)^{(i+j)} |M_{ij}| \\ &= \Delta_{ij} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Jadi } |A| &= a_{i1} \Delta_{i1} + a_{i2} \Delta_{i2} + \dots + a_{in} \Delta_{in} \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij} \Delta_{ij} \text{ (terbukti)} \end{aligned}$$

(Bukti untuk ekspansi kolom analog)

Contoh 2.2.3

$$\text{Hitung determinan } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{dengan ekspansi baris ke-2}$$

$$|A| = a_{21} \Delta_{21} + a_{22} \Delta_{22} + \dots + a_{2n} \Delta_{2n}$$

$$\Delta_{21} = (-1)^{2+1} |M_{21}| = -1 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3$$

$$\Delta_{22} = (-1)^{2+2} |M_{22}| = -1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -9$$

$$\Delta_{23} = (-1)^{2+3} |M_{23}| = -1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\begin{aligned} \text{Sehingga } |A| &= 2 \cdot 3 + 2(-9) + 0(-1) \\ &= 6 - 18 \\ &= -12 \end{aligned}$$

### 2.3. SISTEM PERSAMAAN LINIER

Pandang sistem persamaan linier dengan  $m$ -persamaan dan  $n$ -variabel :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

$a_{ij}$  dimana  $i = 1, 2, \dots, m$  dan  $j = 1, 2, \dots, n$  adalah koefisien-koefisien dari sistem persamaan linier.

$b_i$  adalah konstanta sistem persamaan linier.

Sistem persamaan linier dimana  $b_i = 0$  disebut sistem persamaan linier homogen. Sedang apabila  $b_i \neq 0$  disebut sistem persamaan linier non homogen.

Sistem persamaan linier di atas jika disajikan dalam bentuk matriks dapat ditulis sebagai :  $AX = B$ , dengan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ merupakan matriks koefisien dari sistem persamaan di atas}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ vektor kolom yang merupakan variabel-variabel dari sistem persamaan di atas}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \text{ vektor kolom yang merupakan konstanta dari sistem persamaan di atas}$$

Suatu sistem persamaan linier non homogen  $AX = B$  disebut sebagai sistem persamaan linier non homogen ordo  $n$ , apabila matriks  $A$  berordo  $(n \times n)$ . Jadi jumlah variabel sama dengan jumlah persamaan liniernya. Solusi dari sistem persamaan linier non homogen  $AX = B$  ordo  $n$  dengan aturan Cramer berbentuk :

$$x_k = \frac{D_k}{|A|}, \quad |A| \neq 0 \quad \text{dimana,}$$

$$x_k = \text{solusi sistem persamaan linier non homogen ordo } n \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$



$|A|$  = Determinan matriks A

$D_k$  = Determinan matriks koefisien A dengan mengganti kolom ke-k dengan vektor kolom B

**Teorema 2.3.1.**

Suatu persamaan linier non homogen ordo  $n$ ,  $AX = B$  akan mempunyai

$$D_j = \sum_{i=1}^n b_i \Delta_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

dimana :  $b_i$  = konstanta persamaan ke -  $i$

$\Delta_{ij}$  = kofaktor elemen baris ke- $i$  kolom ke- $j$  dari matriks A

Bukti :

$$D_j = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(j-1)} & b_1 & a_{1(j+1)} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(j-1)} & b_2 & a_{2(j+1)} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(j-1)} & b_n & a_{n(j+1)} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Menurut teorema 2.2.1, determinan suatu matriks merupakan jumlah perkalian elem-elemen dari sebarang baris/kolom dengan kofaktor-kofaktornya.

Matriks di atas kita ekspansikan menurut kolom ke- $j$ , karena kolom ke- $j$  telah diganti dengan vektor kolom B, maka :

$$D_j = b_1 \Delta_{1j} + a_2 \Delta_{2j} + a_3 \Delta_{3j} + \dots + b_n \Delta_{nj},$$

$$= \sum_{i=1}^n b_i \Delta_{ij}$$

Dengan demikian aturan Cramer dapat dinyatakan :

$$x_j = \frac{\sum_{i=1}^n b_i \Delta_{ij}}{|A|} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

dengan :

$x_j$  = solusi sistem persamaan linier non homogen  
ordo  $n$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ )

$b_i$  = elemen ke- $i$  vektor kolom  $B$ ,  
( $i = 1, 2, \dots, n$ )

$\Delta_{ij}$  = kofaktor elemen baris ke- $i$  kolom ke- $j$   
dari matriks  $A$

$|A|$  = Determinan matriks koefisien  $A$ .

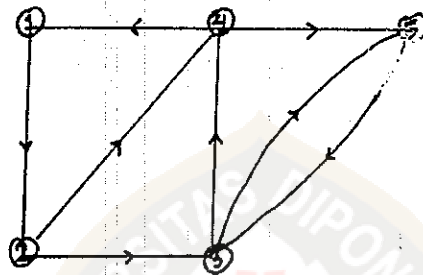
## 2.4. GRAPH BERARAH

### Definisi 2.4.1

Suatu graph berarah (DIRECTED GRAPH/DIGRAPH) dinotasikan  $G_d(V, E)$  dimana  $V$  adalah himpunan node-node dan  $E$  adalah himpunan edge-edge berarah dalam bentuk pasangan  $(i, j)$  dengan  $i$  dan  $j$  elemen  $V$ .  $(i, j)$  disebut edge berarah dari  $i$  ke  $j$  dalam  $G_d$ , dengan node  $i$  sebagai initial node dan node  $j$  sebagai terminal node.

## Contoh : 2.4.1

Suatu graph berarah  $G_d(V,E)$  dengan  
 $V = \{1,2,3,4,5\}$  dan  $E = \{(1,2), (2,3), (2,4), (4,1),$   
 $(4,5), (3,4), (3,5), (5,3)\}$

Gb 2.4.1 digraph  $G_d(V,E)$ 

## Definisi 2.4.2

Directed edge-Sequence (Barisan edge berarah) dengan panjang  $k-1$  dalam digraph  $G_d$  adalah suatu barisan edge dengan bentuk :  $(i_1, i_2), (i_2, i_3), (i_3, i_4), \dots, (i_{k-1}, i_k)$ ,  $k \geq 2$ . Node dan edge berarah dalam barisan edge berarah boleh berulang.

## Contoh : 2.4.2

Pada gambar 2.4.1 barisan :  $(1,2), (2,3), (3,5),$   
 $(5,3), (3,4), (4,1)$   
 adalah barisan edge berarah dengan panjang 6.

## Definisi 2.4.3

Directed Path (Path berarah) dari suatu digraph  $G_d$  adalah suatu barisan edge berarah dengan edge

berarahnya tidak boleh berulang dan node awal tidak sama dengan node akhir atau  $i_1 \neq i_k$  dan semua node-nodenya berlainan.

#### Contoh 2.4.3

$(1,2), (2,3), (3,5)$  adalah directed path dengan panjang 3 dalam digraph  $G_d$  pada gambar 2.4.1.

#### Definisi 2.4.4

Directed Circuit (sirkuit berarah) dari suatu digraph  $G_d$  adalah suatu directed-path dengan node awal sama dengan node akhir ( $i_1 = i_k$ ), dan node-node yang lain tidak boleh sama. Sirkuit berarah yang panjangnya satu disebut self-loop.

#### Contoh 2.4.4

$(1,2), (2,3), (3,4), (4,1)$  adalah sirkuit terarah dari digraph  $G_d$  pada gambar 2.4.1.

#### Definisi 2.4.5

Derajat masuk (Indegree) yaitu banyaknya edge yang mempunyai node  $i$  sebagai terminal node dinotasikan  $d^-(i)$ . Derajat keluar (outdegree) yaitu banyaknya edge yang mempunyai node  $i$  sebagai initial node, dinotasikan  $d^+(i)$ .

## Contoh 2.4.5

Pandang digraph  $G_d$  gambar 2.4.1

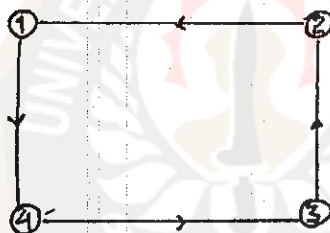
$$d^-(1) = d^-(2) = 1 ; d^-(4) = d^-(3) = d^-(5) = 2$$

$$d^+(1) = 1 ; d^+(2) = d^+(4) = d^+(3) = 2 ; d^+(5) = 1$$

## Definisi 2.4.6

Regular Digraph adalah suatu digraph  $G_d$  dengan derajat keluar sama dengan derajat masuk untuk semua  $i$  dalam  $G_d$

## Contoh : 2.4.6



Gb 2.4.2 Regular digraph  $G_d$

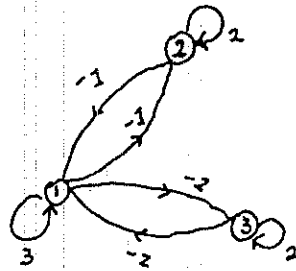
## Definisi : 2.4.7

MATRIKS BOBOT dari suatu digraph  $G_d$  dengan  $n$  node dan tidak memiliki edge paralel adalah matriks  $A = [a_{ij}]$   $A$  bersesuaian dengan node  $i$  dengan  $i = 1, 2, \dots, n$ ; dalam  $G_d$ , dan elemen-elemen matriks  $A$  adalah :

$$a_{ij} = \begin{cases} w_{ij}, & \text{jika terdapat edge berarah dari} \\ & \text{node } i \text{ ke node } j \text{ dengan bobot} \\ & w_{ij}; (i, j = 1, 2, \dots, n) \\ 0 & \text{jika tidak ada edge berarah dari} \\ & \text{node } i \text{ ke node } j (i, j = 1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

## Contoh : 2.4.7

Diberikan digraph  $G_d(V, E)$  dengan 3 node, yang masing-masing edgenya memiliki bobot.



Gb. 2.4.3 Digraph  $G_d(V,E)$

Matriks bobot dari digraph  $G_d(V,E)$  tersebut adalah

$$A = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & W_{13} \\ W_{21} & W_{22} & W_{23} \\ W_{31} & W_{32} & W_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Definisi : 2.4.8

Suatu graph berarah  $G_1(V_1, E_1)$  disebut sebagai subgraph dari graph  $G_d(V, E)$  jika  $V_1 \subseteq V$  dan  $E_1 \subseteq E$

Definisi : 2.4.9

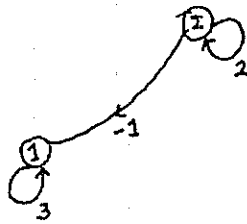
Dua subgraph  $G_1(V_1, E_1)$  dan  $G_2(V_2, E_2)$  dari suatu graph  $G_d(V, E)$  disebut Edge-Disjoint jika  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$  dan disebut node-disjoint jika  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$

Contoh : 2.4.8

Pandang digraph  $G_d$  pada contoh 2.4.7.

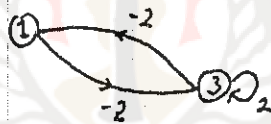
$G_1(V_1, E_1)$  dengan

$$V_1 = \{ 1, 2 \} ; E_1 = \{(2,2), (2,1), (1,1)\}$$

Gb. 2.4.4a  $G_1(V_1, E_1)$ 

$G_2(V_2, E_2)$  dengan

$$V_2 = \{1, 3\} ; E_2 = \{(3, 1), (1, 3), (3, 3)\}$$

Gb. 2.4.4b  $G_2(V_2, E_2)$ 

$G_3(V_3, E_3)$  dengan  $V_3 = \{3\} ; E_3 = \{(3, 3)\}$

Gb. 2.4.4c  $G_3(V_3, E_3)$ 

$G_1(V_1, E_1)$  dan  $G_2(V_2, E_2)$  disebut edge-disjoint

karena  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ , dan

$G_1(V_1, E_1)$  dan  $G_3(V_3, E_3)$  disebut node-disjoint

karena  $V_1 \cap V_3 = \emptyset$

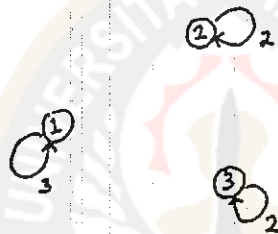
## Definisi 2.4.10

Suatu subgraph  $G_1 (V_1, E_1)$  dari suatu graph  $G_d (V, E)$  disebut sebagai spanning subgraph jika  $V_1 = V$  dan  $E_1 \subseteq E$ .

## Contoh 2.4.9

Pandang digraph  $G_d (V, E)$  pada contoh 2.4.8.

$G_1 (V_1, E_1)$  dengan  $V_1 = \{1, 2, 3\}$  ;  $E_1 = \{(2, 2), (1, 1), (3, 3)\}$ .



Gb. 2.4.5.  $G_1 (V_1, E_1)$  Spanning Subgraph

Karena  $V_1 = V$  maka  $G_1 (V_1, E_1)$  adalah spanning subgraph.

## Definisi : 2.4.11

Suatu digraph  $G_d$  dikatakan terhubung (connected) jika antara 2 titik sembarang terdapat path yang menghubungkannya. Jika tidak demikian disebut tidak terhubung (disconnected).

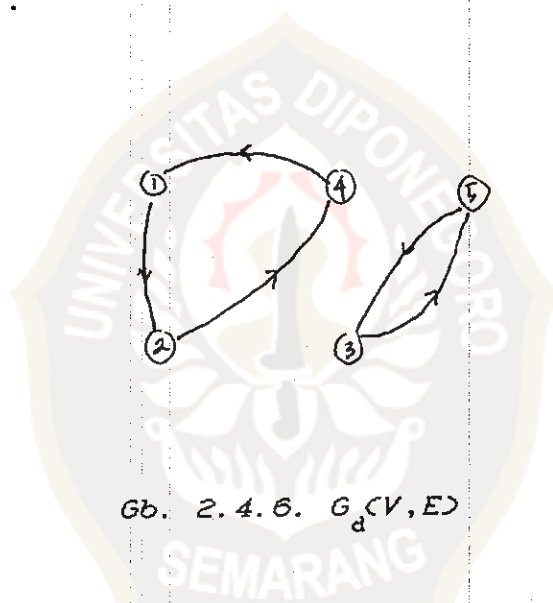


Definisi : 2.4.12

Komponen adalah subgraph terhubung maksimal

Contoh : 2.4.10

Diberikan suatu graph berarah  $G_d(V,E)$  dengan  
 $V = \{(1,2,3,4,5) ; E = \{(1,2), (2,4), (3,5), (4,1), (5,3)\}.$



Gb. 2.4.6.  $G_d(V,E)$

Karena tidak ada path yang menghubungkan node

4 dan 5 atau 4 dan 3 atau

2 dan 5 atau 2 dan 3 atau

1 dan 5 atau 1 dan 3

$G_d(V,E)$  di atas adalah disconnected. Sedangkan digraph pada contoh 2.4.1 adalah digraph yang connected.

Digraph pada contoh 2.4.6 mempunyai 2 komponen yaitu :

1. dengan  $v = \{1,2,4\}$  dan  $E = \{(1,2), (2,4), (4,1)\}$

2. dengan  $v = \{3,5\}$  dan  $E = \{(3,5), (5,3)\}$

## Definisi : 2.4.13

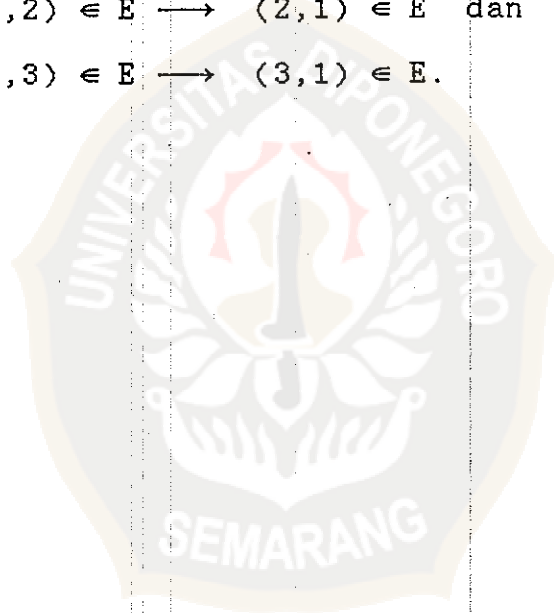
Suatu digraph  $G_d(V,E)$  disebut simetris jika untuk setiap  $(x,y) \in E$  memenuhi :  $(x,y) \in E \implies (y,x) \in E$ .

## Contoh : 2.4.11

Pandang digraph  $G_d(V,E)$  pada gambar 2.4.3. Digraph tersebut simetris, karena :

$$(1,2) \in E \longrightarrow (2,1) \in E \text{ dan}$$

$$(1,3) \in E \longrightarrow (3,1) \in E.$$



## 2.5. COATES GRAPH

### Definisi : 2.5.1

Diberikan suatu matriks bujursangkar  $A = [a_{ij}]$  dengan ordo  $(n \times n)$ , Coates Graph yang bersesuaian dengan matriks  $A$  dinotasikan  $G_c(A)$  atau  $G_c$ . Coates Graph yaitu digraph dengan  $n$ -node yang setiap edge berarahnya memiliki bobot dan node-node dinyatakan dalam bilangan bulat:  $1, 2, \dots, n$ . Jika  $a_{ij} \neq 0$ , maka ada edge berarah dari node- $i$  ke node- $j$  dengan bobot  $a_{ij}$ ;  $(i, j = 1, 2, \dots, n)$ .

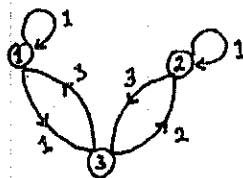
Apabila diketahui matriks koefisiennya, maka dapat digambar Coates Graphnya dengan terlebih dahulu mentranspose matriks koefisien tersebut.

### Contoh : 2.5.1

Diberikan matriks koefisien  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

maka :  $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

sehingga  $G_c(A)$  :



Gb. 2.5.1.  $G_c(A)$

Demikian juga apabila diketahui Coates Graphnya maka dapat dicari matriks koefisiennya dengan cara mentranspose matriks bobot Coates Graph tersebut.

Pandang persamaan linier nonhomogen  $AX = B$  ordo  $n$ .  $A$  adalah matriks koefisien,  $X$  dan  $B$  masing-masing adalah vektor kolom dari variabel-variabel dan konstanta-konstanta persamaan linier nonhomogen tersebut.

#### Definisi : 2.5.2

Matriks  $A_u$  adalah matriks yang diperoleh dari Matriks  $A$  dengan menambah kolom  $-B$  pada kolom ke- $(n+1)$  dan menambah baris nol pada baris ke- $(n+1)$  pada matriks  $A$ . Coates Graph yang bersesuaian dengan matriks koefisien  $A_u$  dinotasikan dengan  $G_c(A_u)$ .

#### Contoh : 2.5.2

Diberikan sistem persamaan linier nonhomogen ordo 3 :

$$x_1 + 3x_3 = 1$$

$$x_2 + 2x_3 = 0$$

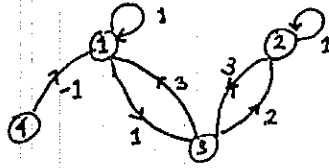
$$x_1 + 3x_2 = 0$$

Jadi ditulis dalam bentuk matriks :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot X = B$$

Sehingga  $G_c(A_u)$  :



Gb. 2.5.2  $G_c(A_u)$

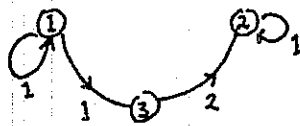
### Definisi : 2.5.3

$f(G_s)$  adalah hasil kali seluruh bobot yang dimiliki oleh edge berarah  $(i,j)$  dengan  $i$  sebagai initial node dan  $j$  sebagai terminal node dalam suatu subgraph  $G_s(V_s, E_s)$  pada digraph  $G_d(V, E)$ ;  $i, j = 1, 2, \dots, n$ ,  
 atau:  $f(G_s) = \prod_{i, j \in V_s} f(i, j)$

dimana :  $f(i, j) =$  bobot pada edge  $(i, j)$   
 $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$

### Contoh : 2.5.3

Pandang subgraph  $G_s(V_s, E_s)$  dari  $G_d(V, E)$  gambar 2.5.1 dengan  $V_s = \{1, 2, 3\}$ ;  $E_s = \{(1, 1), (1, 3), (3, 2), (2, 2)\}$



Gb. 2.5.3.  $G_s(V_s, E_s)$

$$\begin{aligned} \text{Maka } f(G_s) &= \prod_{i, j \in V_s} f(i, j) \\ &= f(1, 1) \cdot f(1, 3) \cdot f(3, 2) \cdot f(2, 2) \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2 \end{aligned}$$

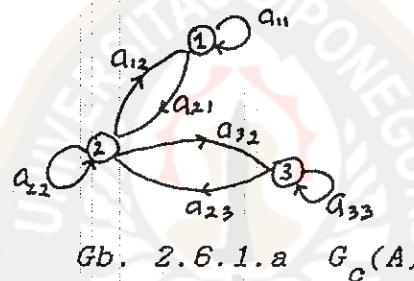
2.6. PERHITUNGAN SECARA TOPOLOGIS DARI DETERMINAN

Definisi : 2.6.1

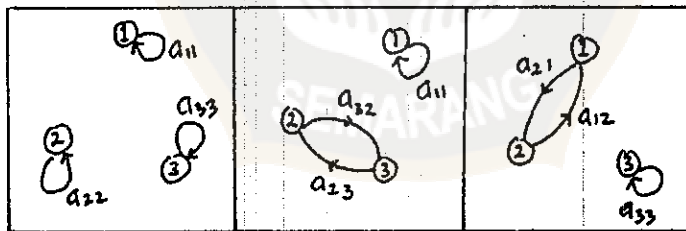
1-faktor dari suatu digraph  $G_d$  yang dinotasikan dengan  $h$  adalah spanning subgraph dari  $G_d$  yang merupakan regular digraph (digraph teratur) dengan derajat 1.

Contoh : 2.6.1

Diberikan suatu Coates Graph sebagai berikut :



1-faktor (h) dalam  $G_C(A)$  adalah



Gb. 2.6.1.b 1-faktor (h)

Lemma : 2.6.1

Perkalian elemen-elemen matriks  $A = [a_{ij}]$  yang tidak sama dengan nol dan sesuai dengan permutasi  $j_1, j_2, \dots, j_n$  berkorespondensi satu-satu dengan 1-faktor (h) dalam  $G_C(A)$  yang bersesuaian dengan matriks A; atau

$$a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \dots \cdot a_{nj_n} = f(h)$$

dengan :  $a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \dots \cdot a_{nj_n} \neq 0$

$j_1, j_2, \dots, j_n$  suatu permutasi

Bukti :

Diberikan perkalian  $a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \dots \cdot a_{nj_n} \neq 0$  ( $j_1, j_2, \dots, j_n$  suatu permutasi) yang merupakan perkalian bobot-bobot dari edge-edge berarah  $(j_1, 1), (j_2, 2), \dots, (j_n, n)$ .

Pada perkalian ini masing-masing  $k$ , muncul 2 kali pada barisan, satu kali pada elemen-1 dan satu kali pada elemen ke-2, pada beberapa pasangan berurutan. Hal ini menunjukkan bahwa indegree dan outdegree pada masing-masing node adalah 1. Graph berarah dari barisan edge berarah tersebut adalah spanning subgraph, dari  $G_c(A)$ . Jadi menurut definisi 2.4.6 barisan edge berarah tersebut merupakan regular digraph derajat satu dan menurut definisi 2.6.1 merupakan 1-faktor (h) dari  $G_c(A)$ . Jadi :

$$a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \dots \cdot a_{nj_n} = f(h)$$

$$a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \dots \cdot a_{nj_n} \neq 0$$

Terbukti

Contoh : 2.6.2

Pandang Coates Graph  $G_c(A)$  pada contoh 2.6.1 gambar 2.6.1.a. Matriks  $A$  yang bersesuaian dengan  $G_c(A)$  adalah :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Dari gambar 2.6.1. didapatkan :

Perkalian elemen-elemen Matriks yang $\neq 0$	$f(h)$
$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \neq 0$	$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$
$a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23} \neq 0$	$a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23}$
$a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} \neq 0$	$a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$

Terlihat adanya korespondensi satu-satu antara perkalian elemen-elemen matriks  $A$  yang tidak sama dengan nol dengan 1-faktor ( $h$ ) dari  $G_c(A)$ .

Tiap-tiap 1-faktor ( $h$ ) terdiri dari beberapa komponen, yang berupa sirkuit-sirkuit berarah. Komponen dari digraph  $G_d$  dikatakan komponen genap apabila komponen tersebut memuat edge berjumlah genap. Demikian juga dikatakan komponen ganjil apabila komponen tersebut memuat edge berjumlah ganjil.



Lemma : 2.6.2

$a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{nj_n}$  adalah permutasi dari elemen-elemen matriks koefisien  $A = [a_{ij}]$ , tanda dari permutasi :

$$\sigma(j_1, j_2, \dots, j_n) = (-1)^{n-L_h}$$

dimana :  $n$  = banyak node dalam 1-faktor ( $h$ )

$L_h$  = banyak sirkuit berarah dalam 1-faktor ( $h$ ) dari  $G_c(A)$  yang sesuai dengan matriks koefisien  $A$ .

Bukti :

$\sigma(j_1, j_2, \dots, j_n)$  bernilai  $\begin{cases} -1 & \text{jika permutasi ganjil} \\ 1 & \text{jika permutasi genap} \end{cases}$

Ambil  $(i_1, i_2) \cup (i_2, i_3) \cup \dots \cup (i_v, i_1)$  adalah suatu sirkuit berarah dengan panjang  $w$  dalam  $h$ . Ambil barisan  $(2 \times w)$  dengan :

- baris I terdiri dari node-node  $i_1, i_2, \dots, i_v$
- baris II terdiri dari node-node  $i_2, i_3, \dots, i_1$

Akan ada  $(w-1)$  pertukaran untuk membuat baris kedua menjadi baris pertama. Dengan demikian jika  $h$  mempunyai  $L_h$  sirkuit berarah yang memuat  $w_1, w_2, \dots, w_{L_h}$  edge maka ada  $(w_1-1) + (w_2-1) + \dots + (w_{L_h}-1)$  pertukaran untuk membuat baris menjadi kolom dalam perhitungan  $f(h)$ . Sehingga tanda permutasi :

$$(-1)^{w_1 + w_2 + \dots + w_{L_h} - L_h} = (-1)^{n-L_h} \text{.Lemma terbukti.}$$

## Contoh : 2.6.3

Pandang permutasi elemen dari matriks koefisien  $A$  pada contoh 2.5.1.  $a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$  adalah 1-faktor ( $h$ ) dari graph pada gambar 2.5.1 tersebut yang mempunyai 1 komponen genap.  $\sigma(1,3,2)$  : permutasi ganjil sehingga  $\sigma(1,3,2) = -1$ . Pada  $h$ ,  $n = 3$ ,  $L = 2$ , sehingga  $n - L = 3 - 2 = 1$   
 $\sigma(1,3,2) = (-1)^1 = -1$

## Teorema : 2.6.1

Misalkan  $G_c(A)$  Coates Graph yang bersesuaian dengan matriks koefisien  $A$  berordo  $n$ , maka :

$$|A| = \sum_h (-1)^{n-L_h} f(h)$$

dimana :

$h$  = 1-faktor pada  $G_c(A)$

$f(h)$  = hasil kali bobot-bobot edge pada  $h$

$L_h$  = jumlah sirkuit berarah pada  $h$

$n$  = banyaknya node pada  $G_c(A)$

## Bukti :

Pada definisi 2.1.5 dinyatakan bahwa :

$$|A| = \sum \sigma(j_1, j_2, \dots, j_n) a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \dots \cdot a_{nj_n}$$

Menurut lemma 2.6.1 berarti :

$$|A| = \sum_h \sigma(j_1, j_2, \dots, j_n) f(h)$$

dan menurut lemma 2.6.2 diperoleh :

$$|A| = \sum_h (-1)^{n-L_h} \cdot f(h) \text{ .Terbukti.}$$

Contoh :2.6.4

Pandang Coates Graph  $G_c(A)$  pada contoh 2.6.1 gambar

$$2.6.1 \text{ dimana : } a_{11} = z_1 + z_3; a_{22} = z_2 + z_3 + z_4;$$

$$a_{33} = z_4 + z_5 + z_6; a_{32} = -z_4; a_{23} = -z_4;$$

$$a_{21} = -z_2 - z_3; a_{12} = -z_3$$

$G_c(A)$  tersebut mempunyai 1-faktor (h) sebanyak 3 buah

$$\text{Maka } |A| = \sum_h (-1)^{n-L_h} f(h)$$

$$= (-1)^{(3-3)} (z_1 + z_3)(z_2 + z_3 + z_4)(z_4 + z_5 + z_6)$$

$$+ (-1)^{(3-2)} (z_1 + z_3)(-z_4)(-z_4)$$

$$+ (-1)^{(3-2)} (-z_2 - z_3)(-z_3)(z_4 + z_5 + z_6)$$

$$= (z_1 + z_3)(z_2 + z_3)(z_4 + z_5 + z_6) + (z_1 + z_3)z_4(z_4 + z_5 + z_6)$$

$$- z_4^2 (z_2 + z_3) - z_3(z_2 + z_3)(z_4 + z_5 + z_6)$$

$$= z_1(z_2 + z_3)(z_4 + z_5 + z_6) + (z_1 + z_3)(z_5 + z_6)$$

## 2.7. PERHITUNGAN SECARA TOPOLOGIS DARI KOFAKTOR

Pandang persamaan linier nonhomogen ordo  $n$   $AX = B$ .

### Definisi : 2.7.1

Matriks  $A_{\alpha}$  adalah matriks yang diperoleh dari matriks koefisien  $A$  dengan mengganti kolom ke- $j$  dengan kolom nol kecuali elemen baris ke- $i$  kolom ke- $j$  diganti dengan elemen 1, ( $i, j = 1, 2, \dots, n; i \neq j$ )

### Definisi : 2.7.2

Hubungan 1-faktor dari node- $i$  ke node- $j$  dalam suatu digraph  $G_d$ , dinotasikan  $H_{ij}$ . Hubungan 1-faktor adalah suatu spanning subgraph yang memuat :

- i. path berarah dari node- $i$  ke node- $j$ .
- ii. sirkuit-sirkuit berarah yang nodenya saling asing dan node-node tersebut tidak dalam path (i).

### Teorema : 2.7.1

$G_c(A)$  adalah Coates graph yang bersesuaian dengan matriks koefisien  $A = [a_{ij}]$  ordo  $n$ . Maka :

$$\Delta_{ij} = (-1)^{n-1} \sum_{H_{ij}} (-1)^{L_H} \cdot f(H_{ij}) ;$$

untuk  $i \neq j ; i, j = 1, 2, \dots, n$

dimana :

$\Delta_{ij}$  = kofaktor dari elemen  $(i, j)$  dari matriks  $A$

$H_{ij}$  = hubungan 1 faktor dari node-i ke node-j pada  $G_c(A)$

$L_h$  = jumlah sirkuit berarah pada  $H_{ij}$

$n$  = jumlah node pada  $G_c(A)$

Bukti :  $\Delta_{ij}$  adalah determinan dari matriks yang diperoleh dari matriks A dengan mengganti kolom ke-j dengan kolom nol kecuali elemen baris ke-i kolom ke-j diganti elemen 1. Menurut definisi 2.7.1 berarti  $\Delta_{ij}$  adalah determinan dari matriks  $A_\alpha$ .

Coates graph diperoleh dari  $G_c(A)$  dengan menghapus semua edge yang mempunyai node-j sebagai initial node dan kemudian menambahkan edge berarah dari node-j ke node-i dengan bobot 1.

Sehingga dengan ekspansi kolom ke-j diperoleh :

$$\det A_\alpha = \sum_{j=1}^n a_{ij} \Delta_{ij} = 1 \cdot \Delta_{ij}$$

$$\det A_\alpha = \Delta_{ij} = (-1)^n \sum_{h_\alpha} (-1)^{L_\alpha} f(h_\alpha)$$

dimana :

$L_\alpha$  = jumlah sirkuit berarah dalam  $h_\alpha$

$h_\alpha$  = 1-faktor dalam  $G_c(A_\alpha)$

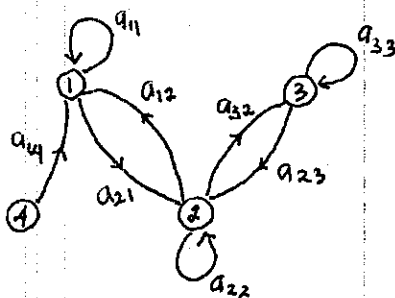
Masing-masing faktor  $h_\alpha$  dalam  $G_c(A_\alpha)$  memuat edge tambahan dengan bobot 1, jika edge tambahan dengan bobot-1 pada  $h_\alpha$  dihapus maka diperoleh  $H_{ij}$  pada  $G_c(A)$ , demikian juga jika pada  $h_{ij}$  dari  $G_c(A)$ ,

diberi edge tambahan dari node-j ke node ke-i dengan bobot 1 maka diperoleh  $h_\alpha$  pada  $G_c(A_\alpha)$ . Berarti ada korespondensi satu-satu antara  $h_\alpha$  pada  $G_c(A_\alpha)$  dan  $H_{ij}$  pada  $G_c(A)$ . Karena bobot edge berarah dari node-j ke node-i adalah 1, maka  $f(h_\alpha) = f(H_{ij})$ ; untuk  $h_\alpha$  dan  $H_{ij}$  yang bersesuaian Jumlah sirkuit berarah pada  $H_{ij}$  1 lebih sedikit dari Jumlah sirkuit berarah pada  $H_{ij}$ , maka  $L_H = L_\alpha - 1$  Dengan demikian diperoleh :

$$\begin{aligned} \Delta_{ij} &= (-1)^n \sum_{h_\alpha} (-1)^{L_\alpha} \cdot f(h_\alpha) \\ &= (-1)^n \sum_{H_{ij}} (-1)^{L_H+1} \cdot f(H_{ij}) \\ &= (-1)^{n+1} \sum_{H_{ij}} (-1)^{L_H} \cdot f(H_{ij}) \\ &= (-1)^{n-1} \sum_{H_{ij}} (-1)^{L_H} \cdot f(H_{ij}). \text{ Terbukti} \end{aligned}$$

#### Contoh 2.7.1.

Diberikan suatu contoh Coates graph sebagai berikut. Tentukan kofaktor elemen baris ke-4 kolom ke-1.



Gb. 2.7.1.  $G_c(A)$

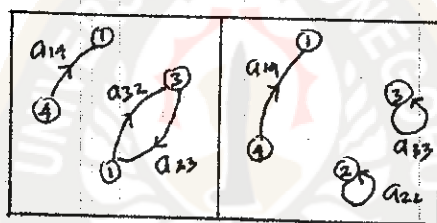
Dengan :  $a_{11} = z_1 + z_3$ ;  $a_{12} = -z_3$ ;  $a_{21} = -z_2 - z_3$ ;  $a_{23} = -z_4$

$a_{22} = z_2 + z_3 + z_4$ ;  $a_{32} = -z_4$ ;  $a_{33} = z_4 + z_5 + z_6$ ;  $a_{14} = -v_1$

Jawab :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hubungan 1-faktor ( $H_{41}$ ) :



Gb. 2.7.2.  $H_{41}$

$$\begin{aligned} \Delta_{41} &= (-1)^{n-1} \sum_{H_{41}} (-1)^{L_H} \cdot f(H_{41}) \\ &= (-1)^3 [(-1)^1 (-v_1)(-z_4)(-z_4) + (-1)^2 (-v_1)(z_2+z_3+z_4)(z_4+z_5+z_6)] \\ &= -v_1 [z_4^2 - (z_2+z_3+z_4)(z_4+z_5+z_6)] \\ &= -v_1 [-(z_2+z_3)(z_4+z_5+z_6) - z_4(z_5+z_6)] \\ &= v_1 [(z_2+z_3)(z_4+z_5+z_6) + z_4(z_5+z_6)] \end{aligned}$$

## 2.8. PENYELESAIAN PERSAMAAN LINIER NON - HOMOGEN

Pandang persamaan linier non-homogen  $AX = B$  dimana  $A = [a_{ij}]$  adalah matriks koefisien ordo  $n$  dan  $X$  dan  $B$  masing-masing vektor kolom. Transpose dari  $X$  adalah

$[ X_1, X_2, X_3, \dots, X_n ]$  dan transpose dari B adalah  
 $[ b_1, b_2, b_3, \dots, b_n ]$

Teorema : 2.8.1.

Jika matriks koefisien A non singular, maka solusi persamaan linier non homogen ordo n.  $AX = B$  diberikan oleh :

$$X_k = \frac{\sum_{H_{(n+1)k}} (-1)^{L_H} \cdot f(H_{(n+1)k})}{\sum_h (-1)^{L_h} \cdot f(h)}$$

dimana :

- $X_k$  = Solusi persamaan linier non homogen  $AX = B$   
 $H_{(n+1)k}$  = hubungan 1-faktorial dari node (n+1) ke node k pada  $G_c(A_u)$   
 $h$  = 1-faktor (h) pada  $G_c(A)$   
 $L_H$  = jumlah sirkuit berarah pada  $H_{(n+1)k}$   
 $L_h$  = jumlah sirkuit berarah pada h  
 $n$  = banyaknya node pada  $G_c(A)$

Bukti

Karena matriks koefisien A non singular, solusi persamaan linier non homogen ordo n oleh aturan Cramer adalah :

$$X_k = \frac{D_k}{|A|}, \quad \text{dimana } |A| \neq 0$$

$k = 1, 2, \dots, n$

$D_k$  adalah determinan matriks A dengan mengganti kolom ke-j dengan vektor kolom B.



Menurut definisi 2.5.2  $D_k$  merupakan determinan matriks  $A_u$  dengan menghapus baris ke-(n+1) dan kolom ke-k. Atau  $D_k$  merupakan kofaktor  $a_{(n+1)k}$  dari matriks  $A_u$ .

Sesuai definisi 2.2.2.

$$\begin{aligned} D_k &= \Delta_{(n+1)k} = (-1)^{(n+1)-1} \sum_{H_{(n+1)k}}^{L_{H_{(n+1)k}}} (-1)^{H_{(n+1)k}} \cdot f(H_{(n+1)k}) \\ &= (-1)^n \sum_{H_{(n+1)k}}^{L_{H_{(n+1)k}}} (-1)^{H_{(n+1)k}} \cdot f(H_{(n+1)k}) \dots \dots \dots (1) \end{aligned}$$

Menurut teorema 2.6.1 :

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_h^{L_h} (-1)^{n-L_h} \cdot f(h) \\ &= (-1)^n \sum_h^{L_h} (-1)^{-L_h} \cdot f(h) \\ &= (-1)^n \sum_h^{L_h} (-1)^{L_h} \cdot f(h) \dots \dots \dots (2) \end{aligned}$$

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh

$$x_k = \frac{(-1)^n \sum_{H_{(n+1)k}}^{L_{H_{(n+1)k}}} (-1)^{H_{(n+1)k}} \cdot f(H_{(n+1)k})}{(-1)^n \sum_h^{L_h} (-1)^{L_h} \cdot f(h)}$$

Terbukti

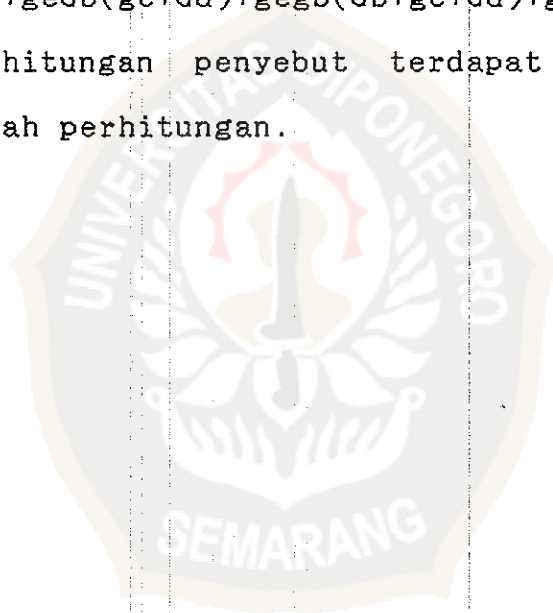
Contoh : 2.8.1.

Diberikan persamaan linier non-homogen  $AX = B$  ordo 3 dari suatu rangkaian listrik. Variabel-variabel sebagai fungsi dari Voltase, koefisien variabel merupakan konduktansi-konduktansi, dan konstanta merupakan besarnya arus.



$$\begin{aligned}
& \frac{Gd [Gb(gb+ge+gc-age) + gb(gc-age)]}{=} \\
& \frac{[(Gb+gb)(gb+ge)(gb+gc+Gd) + (gb+gb)(gc-age)(Gb+Gd) - Gb^2(gb+ge+gc-age) - gb^2(gb+gc+Gd) - gbGbgc - gbGb(gc-age)]}{=} \\
& \frac{Gd [Gb(gb+ge+gc-age) + gb(gc-age)]}{=} \\
& \frac{Gbgb(gb+gc+Gd) + ge(Gb+gb)(Gb+gc+Gd) + (Gb+gb)Gd(gc-age) - Gb^2(gb+ge) - gbGcGb}{=} \\
& \frac{Gd [Gb(Gb+ge+gc-age) + gb(gc-age)]}{=} \\
& Gbgb(gc+Gd) + geGb(gc+Gd) + gegb(Gb+gc+Gd) + gbGb(gc-age) - gcgbGb.
\end{aligned}$$

Terlihat pada perhitungan penyebut terdapat beberapa penghapusan langkah perhitungan.



## 2.9. METODE ANALISA RANGKAIAN

Sebelum menerapkan Modifikasi Coates Graph pada perhitungan jaringan/rangkaian listrik perlu sekali kita memahami hal-hal mendasar yang sangat penting. Kita harus mengenal apa itu jaringan (network), bagaimana bunyi hukum Kirchoff untuk arus dan hukum kirchoff untuk tegangan, serta bagaimana menganalisa rangkaian listrik tersebut.

### Definisi : 2.9.1

Jaringan (network) adalah suatu grup dari interkoneksi komponen yang membentuk rangkaian, yang sebagian dari jaringan sering dinamai edaran (sirkuit) tertutup.

### Hukum Kirchoff untuk arus :

Pada suatu titik pada suatu rangkaian listrik, jumlah arus sama dengan nol, atau  $\sum I = 0$ .

### Hukum Kirchoff untuk tegangan :

Jumlah aljabar semua tegangan cabang sekeliling lingkaran tertutup manapun pada sebuah jaringan adalah nol pada setiap saat.

Akan dipelajari cara-cara yang sistematis untuk merumuskan persamaan dari analisa rangkaian. Ada dua cara/metode untuk analisa rangkaian yaitu :

### A. Metode Tegangan Simpul

Metode ini mempunyai langkah-langkah sebagai berikut:

1. Dipilih sebuah simpul acuan  $o$ ; secara sebarang.

Simpul-simpul yang lain rangkaian itu diberi nama dengan huruf  $A, B, \dots, N$  dan tegangan-tegangan yang tidak diketahui  $V_A, V_B, \dots, V_N$ , dipilih sebagai tegangan naik dari simpul  $o$  ke simpul  $A, B, \dots, N$ .

2. Persamaan-persamaan simpul (hukum Kirchoff untuk arus)

dalam bentuk matriks akan berupa :

$$A : G_{AA} V_A - G_{AB} V_B - \dots - G_{AN} V_N = I_A$$

$$B : -G_{BA} V_A + G_{BB} V_B - \dots - G_{BN} V_N = I_B$$

$$\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots$$

$$N : -G_{NA} V_A - G_{NB} V_B - \dots + G_{NN} V_N = I_N$$

dimana :

$G_{xx}$  = jumlah semua konduktansi yang terhubung ke simpul

$x$  ;  $x = A, B, \dots, N$ .

$G_{xy}$  = jumlah semua konduktansi yang dihubungkan

diantara simpul  $x$  dengan simpul  $y$ ;  $x, y = A, B, \dots, N$ ;

$x \neq y$ .

$I_x$  = jumlah semua sumber arus yang mencatu simpul  $x$ ;

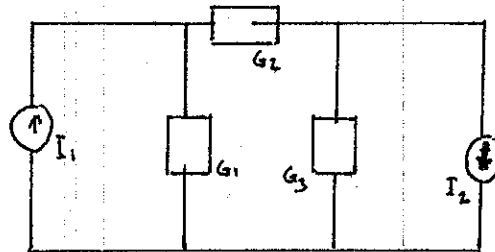
$x = A, B, \dots, N$ .

Jika  $R$  = hambatan maka  $\frac{1}{R}$  disebut konduktansi

dilambangkan  $G$ .

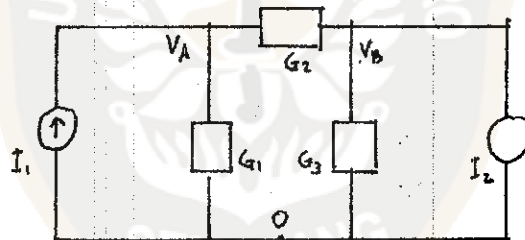
## Contoh 2.9.1

Diberikan rangkaian listrik sebagai berikut :



Gb. 2.9.1 Suatu Rangkaian

Maka untuk menganalisisnya, sesuai dengan langkah yang pertama rangkaian menjadi :



Gb. 2.9.2 Rangkaian untuk metode tegangan simpul

Sesuai dengan langkah kedua akan diperoleh persamaan linier dalam  $V_A$  dan  $V_B$ .

$$(G_1 + G_2) V_A - G_2 V_B = I_1$$

$$-G_2 V_A + (G_2 + G_3) V_B = -I_2$$

Sehingga jika dinyatakan dalam bentuk matriks :

$$\begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_2 + G_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

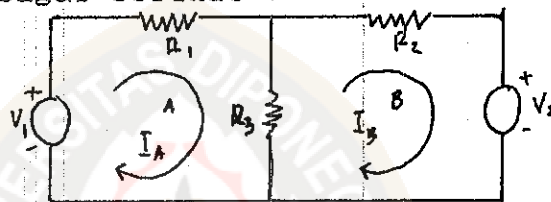
## B. Metode Arus Matajala

### Definisi : 2.9.2

Matajala adalah suatu rangkaian tertutup yang tidak mengandung unsur rangkaian di tengahnya.

### Contoh : 2.9.2

Diberikan suatu rangkaian untuk metode arus matajala sebagai berikut :



Gb. 2.9.3

Rangkaian pada gb. 2.9.3 merupakan suatu rangkaian yang mempunyai dua matajala. Matajala A mengandung  $R_1$ ,  $R_3$  dan  $V_1$  dengan  $I_A$  sebagai arus matajala. Matajala B mengandung  $R_2$ ,  $R_3$  dan  $V_2$  dengan  $I_B$  sebagai arus matajala. Langkah-langkah formal metode arus matajala adalah sebagai berikut :

1. Dipilih arus matajala menurut arah jarum jam. Pemilihan arus itu mengakibatkan arus unsur berupa arus matajala atau selisih aljabar dua arus matajala.
2. Persamaan-persamaan matajala (hukum Kirchoff untuk tegangan) ditulis menurut aturan untuk matajala-matajala A, B, ..., N.

$$\begin{aligned}
 A &: R_{AA} I_A - R_{AB} I_B - \dots - R_{AN} I_N = V_A \\
 B &: -R_{BA} I_A + R_{BB} I_B - \dots - R_{BN} I_N = V_B \\
 &\vdots \\
 N &: -R_{NA} I_A - R_{NB} I_B - \dots + R_{NN} I_N = V_N
 \end{aligned}$$

dimana :

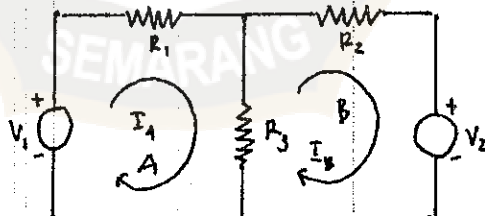
$R_{xx}$  = Jumlah semua resistansi yang membentuk matajala x  
 $x = A, B, \dots, N$

$R_{xy}$  = jumlah semua resistansi yang dimiliki bersama oleh matajala x dan y ;  $x, y = A, B, \dots, N$  dengan  $x \neq y$

$V_x$  = jumlah semua sumber tegangan naik dalam matajala x dalam arah jarum jam ;  $x = A, B, \dots, N$

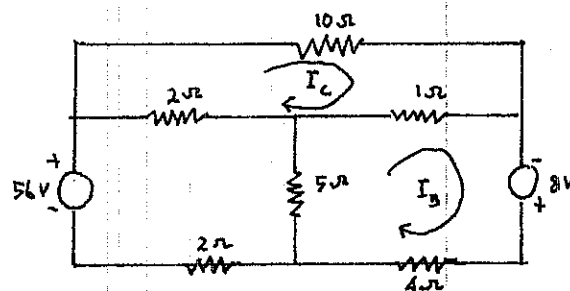
### Contoh 2.9.3

Diberikan rangkaian untuk metode arus matajala sebagai berikut :



Gb. 2.9.4 Rangkaian

Sesuai dengan langkah 1, rangkaian menjadi :



Gb. 2.9.5 Rangkaian untuk metode arus matajala



Sesuai dengan langkah 2, diperoleh persamaan linier dalam  $I_A, I_B, I_C$  sebagai berikut :

$$(2+2+5) I_A - 5 I_B - 2 I_C = 56$$

$$9 I_A - 5 I_B - 2 I_C = 56 \dots\dots(1)$$

$$-5 I_A + (5+1+4) I_B - I_C = 8$$

$$-5 I_A + 10 I_B - I_C = 8 \dots\dots(2)$$

$$-2 I_A - I_B + (10+2+1) I_C = 0$$

$$-2 I_A - I_B + 13 I_C = 0 \dots\dots(3)$$

